高中數學課程裡的線性規劃

單維彰·100 年 5 月 16 日

所謂線性規劃 (Linear Programming) 在其（經過整理的）數學形式上，是求 n 元一次目標函數 $P = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ 在滿足 m 個一次不等式

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \geq b_2$

…

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \geq b_m$

之限制條件下的最小值。（我們可以只討論 $m > n$ 的情況。）

就像許多數學概念一樣，線性規劃的初步想法可以追溯到更早以前，但是我們今天認識它的方式乃至於稱呼它的名字，乃是具體地誕生於西元 1948 年。名字之中的「線性」(linear) 表現了它在數學技術上的特徵：求最小值的「目標函數」以及設定條件的不等式，都是一次式，也就是線性的。而「規劃」(programming) 其實是軍事用語，意指一套兵力派遣、火力部署和補給作業的規劃；這個字表現了這套數學想要解決的典型問題。

但是讀者不該將「線性」字面地理解爲「直線的」。這是一部份高中學生具有的迷思：因爲二元一次方程式 $ax + by = c$ 的圖形是平面上的直線，就「自然地」以爲三元一次方程式 $ax + by + cz = d$ 的圖形是空間中的直線—不是的，它是空間中的平面。一般而言，n 元一次方程式 $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b$ 的圖形是 n 度空間裡，少了一個維度（也就是 n-1 維）的「平面」，稱爲超平面 (hyperplane)。而滿足 n 元一次不等式 $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n \geq b$ 的解，就是被超平面分割的兩個「半空間」之一。

線性規劃在 1960 年代因爲美國報紙的宣揚而成爲家喻戶曉的數學明星。做爲明星所達到的最高峰，或許是 1975 年的諾貝爾經濟獎，受獎者是兩位線性規劃的先行學者，得獎的原因是他們「在資源最佳分配理論上的貢獻」。而線性規劃的基本性質，和它的基本解法「單形法」(Simplex Method)，都在 1950 年代的前期就確立了。

當李新民教授在 1966 年前後，爲東華書局根據民國 53 年版之課程標準編撰高中數學教科書時，很有創意地將線性規劃的「淺薄特例」：$n = 2$ 的情況，寫進了教科書。將一個還在尖端研究領域的數學課題寫進高中數學教材，應當是一件令人歡欣鼓舞的事，很有趣也很有啓發性。李教授後來成爲中央大學復校（成爲大學）後的首任校長。

理論上，排除一些無聊的情況之後，滿足限制條件的點，是 n 維空間中被 m 個超平面圍成的區域；稱爲多胞形 (polytope)；這個看起來很時尚的名字，其實在二維（平面上）就是多邊形（例如三角形、四邊形等），在三維（空間中）就

是多面體（例如四面體、立方體、角錐體等）。數學定理保證了上述多胞形必然是「凸的」，所以如果目標函數在限制條件之下有最小值，則最小值一定發生在此多胞體的某一個頂點上。

這是一個美好的定理，但是實行上頗爲困難。首先，求取頂點坐標等於要算一個 n 元一次聯立方程式的解，在高中學習了高斯消去法求解三元一次聯立式，我們可以推廣此算法解 n 元一次式，但是其複雜的程度不是 n:3，而是 n^3:27。讀者只要代入 n=10 試試看，就可以想像其複雜的程度；而 n=10 是實際應用時常見的未知數個數。其次，頂點的個數非常多，而且不容易判斷。在 m 個條件中任選 n 個，就能計算一個交點（也就是 n 個超平面交於一點）。高中生可以了解，這是一個組合問題，限制條件形成的凸多胞體可能有 C_n^m 個交點。讀者只要試試看 C_{10}^{15} 就能感受交點數有多麼大！而 m=15 在實際應用時還不算太多。但是這些交點卻不一定是多胞體的頂點（稍後在平面上再解釋），我們還須要一些並不容易的步驟來判斷哪些交點是頂點？

因此，應用數學家（和經濟學者）並不直接使用上述美好的定理，設計求解線性規劃問題的演算法（否則，那個諾貝爾獎是不是來得太輕易了一點？）。單形法是最早發明的算法，雖然這個方法在理論上不如後來發明的兩種算法，但是實務經驗上卻相當可靠，所以至今仍是最普遍被採用的算法。單形法的重點在於效率，它使得我們不必嘗試目標函數在每一個頂點的值，就能找到發生極小值的那個頂點。

當 $n=2$ ，也就是目標函數與限制條件都只有兩個變數，我們可以限制在平面上探討它。此時我們習慣將 x_1 寫成 x， x_2 寫成 y，而限制條件就是由 m 條直線 $a_k x+b_k y=c_k$ ， $k=1, 2, \ldots, m$ 圍成的凸多邊形。事實上，每兩條直線就有一個交點，例如五個條件對應的五條直線一共（最多）有 $C_2^5=10$ 個交點，須要求解二元一次方程組 10 遍（通常包含 $x\geq 0$ 和 $y\geq 0$ 兩個條件，所以有兩條直線就是 x 軸和 y 軸，簡化了問題）。但是我們可以在平面上「看」到這 m 條直線，很容易不假思索地「看」到頂點的大略位置，只要算出形成頂點的交點即可，而不必經過計算交點然後判斷是否爲頂點的步驟。

李新民校長於民國 57 年版的東華版數學課本引進 $n=2$ 之線性規劃淺薄特例時，只有一個例題。其設計目標看來只想要連結二元一次聯立不等式的解區域（平面上的多邊形），並順便點到爲止地介紹一項數學新知（線性規劃）。用今天的說法，就是在教材裡添加一點「花絮」或「欣賞」。當時，他並未說明求解的方法及理由，只是說『（解法）一般將至爲繁複，但由線性規劃之理論，960-2x-y 之極大或極小值，將在五邊形之頂點出現』。然後就是頂點列表法。習題之中，六題是解兩條二元一次聯立不等式的操作練習，兩題練習畫解區域，一題練習由解區域找不等式，只有一個文字應用題。

如果將民國 53—61 年間的數學教材當作台灣「現代」數學課程的第一代，則 62—72 年間的第二代四種版本的數學課本中，仍然只有李校長的東華版在第六冊第四章〈總複習〉的「4-4 不等式與極值問題」裡，放了一個「線性函數的

極限」例題（例 8），內容就是線性規劃。這第二代的教材採用了平行直線系（$x+y=k$）來解釋$x+y$的最大值發生在一個四邊形區域的某頂點。這份教材沒有提到「頂點法」，甚至沒有設計類似的習題；整個教材中，僅此一個例題。

線性規劃在第三代數學課程（民國 72—87 年，全國統一使用的部編版）忽然變成了一個重要課題，在第一冊第三章〈直線方程式與二元一次不等式〉的「3-4 二元一次聯立不等式與線性規劃」裡，正式躍上了標題。這一冊課本平均每節只有 10.6 頁，而 3-4 佔了 19 頁，可見是一個「重點章節」。3-4 的內容完整地從平行直線系發展到頂點法，並介紹了頂點坐標不是整數的題型。

第四代數學課本又回到一綱多本的局面，共同的依據是民國 84 年 10 月公布的《高級中學數學科課程標準》。這一代的課本保存了部編版的線性規劃，但是移到了高中三年級選修的《數學甲》Ⅰ或Ⅱ，各版本都爲「線性規劃」獨立設了一節。當時認爲數學甲適合準備進入理、工、醫、農、商學領域的高中生，而數學乙則是爲了文、法、教育、藝術領域的學生設計的。

第四代課本中的南一版最接近前代部編版的內容，放在第二章〈不等式〉的「2-3 線性規劃」，佔了 18 頁，課後設計了 7 道習題，外加 2 個綜合練習題。相對於部編版，只在格子點問題上做了簡化。除了康熙版只用了 13 頁，各版本都盡情發揮這個課題，三民版用了 20 頁，翰林版 24 頁，正中版 30 頁，龍騰版甚至還框列了一個「線性規劃基本定理」！

即使$n=2$，目標函數$z=f(x,y)=ax+by$仍然應該在空間中（也就是$n+1$維）討論。高中生已經知道$z=ax+by$亦即$ax+by-z=0$是空間中的平面，稱它爲Γ。當(x,y)在限制條件圍成的凸多邊形區域內，相當於(x,y,z)形成了Γ上的一個凸多邊形。想像我們把一張紙平鋪在桌面上畫一個凸多邊形，然後隨意拎起這張紙，讓它斜立在空中（不得卷曲），則紙上多邊形的最高點，當然發生在某個頂點或某兩個頂點所連的整條邊！大一微積分的學生將會知道，目標函數$f(x,y)$的一次偏導數恆不爲零，所以在區域的內部沒有臨界點，因此它的極值必定發生在邊界上。同理討論邊界上的函數，也同樣沒有臨界點，所以極值必定發生在頂點。可見$n=2$的線性規劃問題，其實還有也許更自然的看法。

自從獨佔教科書市場 15 年的部編版課本之後，線性規劃就在高中數學課程裡站穩了腳跟。然而，與國際數學教材相比，線性規劃仍是本國之獨有特色之一。以二元一次聯立不等式找到凸多邊形之可行解區域，然後以平行直線系推導頂點法的思維過程，不失爲一本線性規劃教科書的絕妙入門教材；作爲數學應用之通識或欣賞，也不失爲高中教材的好範例。但是，將它作爲一個「課程主題」來處理，稍嫌孤立於核心知識之外，又未能掌握一般性問題的關鍵，則可以參考過去半個世紀的教材發展歷程，在整個高中數學教育的理念原則之下，重新思考其適當性。