科學月刊【數‧生活與學習】專欄‧百年 7 月

高中數學程度的代數基本定理

單維彰‧100 年 6 月 12 日

我國的高中數學課程「有史以來」就包含了『代數基本定理』:

若 $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$ 是一個 n 次複係數多項式函數，其中 $n\ge 1$，則必存在一個複數 z 使得 $f(z)=0$。

常見的延伸命題是：在複數域裡，n 次實係數多項式函數必有 n 個根，其中複數根必然以共軛的形式成對出現；或者實係數多項式必有實係數的一次或（不可分解之）二次因式。因爲大學線性代數的入門課程須要它來確認 n 階方陣必有 n 個複數的特徵值（線性代數課本通常也是敘述而不證明代數基本定理），使得這個定理有它存在於高中課程內的正當性。

許多早期的教科書提到，這個定理乃是高斯於 1799 年首次證明的。但是，如果以後世的嚴格標準來看，高斯的證明有漏洞（再怎麼偉大的前輩數學家都難免被後進找到一兩個漏洞，但是皆無損於他們偉大的成就）。把同樣具有些微漏洞的證明算進來，則歐拉、拉格朗日、拉普拉斯都比高斯更早提出過證明。如今認爲第一個「完全正確」的證明，是一名在巴黎經營書店的業餘數學家阿岡 (Jean-Robert Argand, 1768—1822) 於 1814 年發表的。

這個定理雖然掛著「代數」頭銜，卻其實是一個「複數」定理。它所斷言的，不是代數的性質，而是複數的性質。這並不是因爲數學家喜歡亂取名字，而是因爲「代數」這個詞，已經從 200 年或更早以前的通義，轉變成了一個數學學門的專有名詞。當牛頓談論函數的微分規則時、當高斯談論複數的運算規則時、當漢彌爾頓談論四元數的運算規則時，都說那是一套「代數」規則。以前的「代數」是通用名詞，泛指一套計算規則。而『代數基本定理』是指由複數計算規則所導出的一個基本性質：不是常數的複係數多項式函數必有複數根。

仔細檢驗之後，發現這個定理的「完全正確」證明，須要兩種數學：

(1) 實數的完備性與連續函數在緊緻 (compact) 區域內的極值性質，

(2) 複數的極式及其運算性質。

其中嚴格理論性的第 (1) 項的確不能在高中課程中交代，但是關鍵技術性的第 (2) 項，卻是自然組高中學生已經學習的；就 99 課綱而言，屬於選修數學甲 I 第二章的內容。而第 (1) 項並非了解代數基本定理的關鍵，缺了它僅造成證明中專業數學家才能察覺、而一般人和初學者感到理所當然的「漏洞」。前面指出，就連歐拉、高斯這些偉大的前輩都曾忽略證明中的漏洞，我們更應該對高中課程裡留下的漏洞抱持寬容的態度。

所謂複數的極式 (polar form)，就是若 z 爲非零複數，則它可以（唯一地）改寫成 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ 形式，其中 $\theta=\arg(z)$ 是 z 的幅角。此處的 arg 恰好像是阿岡 (Argand) 的縮寫，但其實它是幅角 (argument) 的縮寫。而關鍵的運算

性質是，若 z、c 是兩個非零複數，則 $|zc|=|z||c|$ 且 $\arg(zc)=\arg(z)+\arg(c)$ 。

使得代數基本定理成立的最關鍵因素，是以下引理：

> 令 $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$ 是一個 n 次複係數多項式函數，其中 $n\ge 1$。若 $f(z_0)\ne 0$ ，則存在一個 z_0「附近」的複數 z_1 使得 $|f(z_1)|<|f(z_0)|$。

這個引理是複數的特性，它的「實數版本」並不成立。例如，若限定 x 爲實數，$g(x)=-x^4+5x^3-7x^2+3x+1$ ，則雖然 $g(1)=1\ne 0$ ，但因爲 $g(x)$ 在 $x=1$ 發生了相對極小値，所以 1「附近」沒有任何實數使得 $g(x)<1$ 。請參照附錄中的圖 1。

上述引理的證明，按照課程綱要的規劃，應該是（自然組）高中學生可以理解的。事實上，我們不妨用這個證明來統整複習一部份的高中數學。

首先，將 $f(x)$ 改寫成以 z_0 爲參考點的泰勒形式（連續做除以 $x-z_0$ 的綜合除法）：

$$f(x)=c_n(x-z_0)^n+\cdots+c_{k+1}(x-z_0)^{k+1}+c_k(x-z_0)^k+f(z_0) ,$$

其中 k 是 $(x-z_0)^k$ 之係數不爲 0 的最低次數，也就是 $c_k\ne 0$ 。注意 k 不一定是 1，例如前述 $g(x)$ 以 1 爲參考點的泰勒形式爲

$$g(x)=-(x-1)^4+(x-1)^3+2(x-1)^2+1 ,$$

此時 k=2 而 $c_2=2$ 。以下，我們將要找一個 $z_1=z_0+z$ 使得 $|f(z_1)|<|f(z_0)|$ ，其中 |z| 頗小，所以 z_1 在 z_0 的「附近」。

先處理關鍵的 $c_k(x-z_0)^k+f(z_0)$ 部分。代入 $x=z_1$ 就是 $c_k z^k+f(z_0)$。取 $\arg(z)$ 爲 $\left(\arg(-f(z_0))-\arg(c_k)\right)/k$ ，則 $\arg(c_k z^k)=\arg(-f(z_0))$ 。因爲 $f(z_0)$ 和 $-f(z_0)$ 對稱於原點，所以 $c_k z^k$ 和 $f(z_0)$ 位於方向相反的兩條射線上；用平面向量的觀念來看，$c_k z^k$ 和 $f(z_0)$ 是兩個方向相反的向量，參照附錄的圖 2。只要 |z| 小得足以讓 $|c_k z^k|<|f(z_0)|$ ，則 $|c_k z^k+f(z_0)|=|f(z_0)|-|c_k||z|^k$ 。

再處理殘餘的 $c_{k+1}(x-z_0)^{k+1}+\cdots+c_n(x-z_0)^n$ 部分。代入 $x=z_1$ 就是 $c_{k+1}z^{k+1}+\cdots+c_n z^n$ 。令 M 是 $|c_{k+1}|$、$|c_{k+2}|$、…、$|c_n|$ 這些數的最大值（M 爲正數），則應用三角不等式，只要 |z|<1 就有

$$|c_{k+1}z^{k+1}+\cdots+c_n z^n|\le M|z|^{k+1}(1+|z|+|z|^2+\cdots+|z|^{n-k-1})$$

$$=\frac{1-|z|^{n-k}}{1-|z|}M|z|^{k+1}<\frac{1}{1-|z|}M|z|^{k+1}=\frac{|z|}{1-|z|}M|z|^k 。$$

參照附錄中的圖 3，當 |z| 越小，|z|/(1-|z|) 也跟著越小。所以，總有足夠小的 |z| 使得 $\dfrac{|z|}{1-|z|}M<|c_k|$ 。

任選一個滿足上述三種「夠小」要求而仍爲正數的 |z|，則

$$|f(z_1)|\le|f(z_0)|-|c_k||z|^k+\frac{|z|}{1-|z|}M|z|^k<|f(z_0)| ,$$

故得證引理。現在，反覆引用引理，如果新找到的 z_1 還是使得 $|f(z_1)|>0$，就可以在它附近找到 z_2 使得 $|f(z_0)|>|f(z_1)|>|f(z_2)|$。依此類推，持續找到 z_3、z_4、…，使得 $f(x)$ 的絕對值越來越小，直到「最後」找到某個 z 使得 $|f(z)|=0$ 爲止（這個 z 的存在性就牽涉前述的嚴格理論性問題）。而這個 z 就是 $f(x)$ 的一個複數根，我們也就得到了代數基本定理。

附錄‧爲方便讀者，我們做了幾幅圖，放在以下網頁。
http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/article/0007/index.html

後記‧這一篇專欄，在科學月刊截稿後做了一些修訂。刊登在月刊中的版本稍有疏失，前後稍有疏漏而缺乏一致性，耑此致歉。