科學月刊【數‧生活與學習】專欄 101 年 3 月

從多項式開啟線性代數的序幕

單維彰‧101 年 2 月 16 日

本欄的過去兩篇，分別指出高中一年級（以後要叫它「十年級」了）的多項式課程，可以如何在同樣基礎之下換軌，成爲直達微積分和數學分析的大道。我要再度呼籲：以數學發展史爲佐證，（多項式的）微積分在認知能力上，絕對不比現行或前代高中課程內的代數、整數論、解析幾何、向量、機率與統計困難。大家心目中困難的，是 19 世紀倒過頭來爲補全微積分基礎而發展的極限觀念，而不是 17 世紀的微積分原貌。高中數學既然不再可能是個人的最終知識，則高中數學教育的宗旨，自然應該是爲銜接大學課程作準備、同時爲現代公民及職場生活所須之終身學習作準備。如果我們被 19 世紀的抽象化數學風格困住，而裹足不能及早認識 17、18 世紀之微積分帶來的驚人威力，繼而將來在社會、文化的層面了解微積分對現代文明的深刻價值，則實在是學生的不幸、社會與學術界整體的損失。

在前述中學教育宗旨之下，線性代數成爲另一個須要在中學數學課程中多所著墨的分科。據聞，有些長春藤大學裡的教授，打賭美國的大學將會在 2050 年以線性代數取代微積分爲工、管類組的必修數學課程。線性代數的操作或許不比微積分深奧，但是它的觀念卻比 17 世紀的微積分抽象（畢竟它是 19 世紀後半葉的思想產物）。因爲線性代數的普遍重要性，我們值得爲它大挪乾坤，將其基礎部分放進高中數學。但是，教導線性代數絕不等於探討矩陣乘法的規則和方陣乘法的代數性質（不可交換、未必可逆等等），而是線性組合、線性映射的意義；前者已經在 99 課綱開始設計課程了，但是後者實在找不到時間排入課程。如果適度調整課程，讓（多項式）微積分進入高一、高二課程，就有辦法將線性代數放進高三的選修課。順帶一提，假設微積分已經獲得了足夠的發展，則一般的極限課題根本可以從高中課程中全部移出，不必佔據高三選修的課時。

以下勾勒的多項式進路線性代數，必須放在三元一次聯立方程式以及空間向量之後。因爲過去的高中課程不曾包含這些課題，所以可能就連高中數學教師都會覺得這一篇不好讀（雖然老師們一定在大學讀過這個科目），作者先此致歉。

在舊課程裡，曾經使用平面上的基底變換作爲線性映射的具體範例。本欄的主要主張，則是平面坐標的變換缺乏動機（尤其是在取消了斜軸的二次曲線之後），而且標準基底 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 和一般基底 $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ 的係數互換，其實既不容易計算也不容易描述，何況我們的高中生向來不習慣以 $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ 表示 (a,b) 向量。最後，採用平面坐標變換的進路，等於在課程中另起爐灶，反倒不如採用多項式的標準形式與泰勒形式，更能夠一氣呵成、前後呼應，而且直接銜上大學課本的慣用例。

假設學生已經知道多項式有（降冪）的標準和泰勒兩種形式，例如

$$a_2x^2+a_1x+a_0=c_2(x-1)^2+c_1(x-1)+c_0 \text{ 。}$$

不論是採用連續的綜合除法，或者套用微分公式，學生已經能夠處理上述的轉換。這時候，我們引進基底觀念，令 $\{x^2, x, 1\}$ 稱爲 A 基底，$\{(x-1)^2,\ x-1, 1\}$ 稱爲 B 基底。然後用線性組合的觀念（假設已經用平面、空間向量教過了，而且在處理三元一次方程組時練習過），以係數和基底重新詮釋多項式（唯一性可以先省略）。

因爲多項式的基底變換是線性的（它根本只是個等式），所以，將係數依序寫成行矩陣之後，得知

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$ 的對應關係 T 是一個線性映射。

然後教導一種技術，可以將上述映射寫成一個三階方陣與行矩陣的乘積。只考慮 A 基底如何寫成 B 基底的線性組合即可：因爲 $x^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1$，$x = (x-1) + 1$，$1 = 1$，所以

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}、T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}、T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

根據方陣與行矩陣相乘的線性組合意義，輕易得知

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

此時應該讓學生驗算，確定若給定標準形式的多項式係數 a_2、a_1、a_0，則線性映射 $T\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$ 即可得到泰勒型式的係數；而且這個方法是可以平直地推廣的。反之

就更精彩了，若給定泰勒形式的多項式係數 c_2、c_1、c_0，則 $T^{-1}\begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$ 即可得到標準型式的係數；教師可帶領學生檢查

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}。$$

搭配平面上的旋轉，讓學生認識：逆方陣（如果存在）就是反映射。

有沒有不可逆的線性映射呢？微分就是一個例子。前面已經學過，微分（導數或導函數）是線性的，所以，從多項式函數 $f(x)$ 到其導函數 $f'(x)$ 的映射D是一個線性映射。按照前面的技術，給定二階多項式函數在標準形式之下的係數，其導函數係數，可以用 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$ 算出來。因爲此方陣的行列式爲 0，它是不可逆的。早先學習反導函數的時候，學生已經知道，反導函數是不唯一的，它不能成爲一種「映射」（函數的推廣意涵），由此獲得一個對照。

因爲標準形式的多項式是 A 基底的線性組合，我們稱上述導函數映射的方陣爲 A。如果現在給了一個泰勒形式的多項式，它是係數 c_2 、 c_1 、 c_0 與 B 基底的線性組合，我們有方便的程序，由 c_2 、 c_1 、 c_0 以線性映射的方式算出其標準形式的導函數係數嗎？那就是 $AT^{-1}\begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$ 。也就是說，方陣的相乘等於依序做線性映射；此關係也可以呼應平面上的線性變換。學生應驗算

$$AT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的確具備前面宣稱（或預測）的功能。

同理再推論，若 $B = TAT^{-1}$ ，則其意義（因爲行矩陣乘在右側，所以從右往左解讀）是，給定泰勒多項式的係數 c_2、c_1、c_0，先將它轉換成標準形式的係數，做標準形式的導函數，再轉回泰勒形式。在此特例下，恰好 $B = A$，但一般而言，如此的方陣 A 和 B 稱爲彼此**相似**。這只是本文銜接至大學線性代數課程的引伸，高中課程中，並不須要探討相似方陣。

從以上的引伸，我們知道：同一個線性映射（例如做導函數）在不同基底之下的方陣是（一般來說）不同但相似的。這就提出了純數學的「不變量」研究問題：怎樣判定兩個方陣是否彼此相似？也就是說，它們其實是表現於不同基底之下的同一個線性映射。純數學的線性代數課本幾乎投入了半本書來發展這個不變量課題；我個人也想要藉此園地呼籲工、管科的線性代數教師們，不要採用這種純數學口味的教科書，以免偏離了線性代數作爲應用與計算工具的要旨。