科學月刊【數‧生活與學習】專欄 103 年 5 月

由多項式轉入微分課程之芻議

單維彰‧103 年 4 月 9 日

Silvanus Thompson 在他出版於 1910 年的微積分教科書上說：『有些微積分技巧相當簡單，有些超級困難。那些寫高等數學教科書的傢伙，很少費功夫跟你說明那些簡單的計算有多簡單。』(Some calculus tricks are quite easy. Some are enormously difficult. The fools who write the textbooks of advanced mathematics seldom take the trouble to show you how easy the easy calculations are.)

大家都默認微積分的「高深」，長年以來不曾考慮將它放進高中數學課程。然而，不但許多學生發現微積分其實比多項式、對數、排列組合、三角及向量簡單，從數學發展的歷程來看，基礎微積分的發展更是顯然地早於複數、代數基本定理、集合論、以及空間向量。微積分當然有其高深困難之處，但是我邀請大家想一想，它困難的那一部份，是不是在 19 世紀嚴格化之後才發生的？而微積分的學習門檻，是不是嚴格化的極限觀念？如果這一套從 20 世紀傳到今天的由極限切入微積分的課程「傳統」是必須的，那麼 18 世紀以前的人們難道都沒學會微積分嗎？

這篇文章想要建議一套可以實施在高中一年級的多項式微分課程，它搭配著多項式的學習而進，不但發展微分的觀念並讓學生提早掌握（多項式）微分的威力，並使得多項式本身的學習充滿動機與活力，還爲數學的極限觀念與物理的自由落體課題奠定了基礎。它讓多項式的除法原理及其延伸的餘式定理與因式定理，綜合除法與泰勒形式，降冪與升冪排列，以及多項式等式求根、不等式求解區間等課題，都有了具體的學習動機和應用價值。

我爲這套課程編寫了 4 節課的教案，並且在麗山高中（僅前 2 節）、育達高中、武陵高中、和中壢高中對一年級的學生試教過。因爲我對學生的反應有第一手的經驗，並獲得其成效的信心，所以才寫在這裡就教於更廣泛的讀者。

假設多項式課程還是沿著 99 課綱的脈絡而展開，先學習單項函數 $f(x)=ax^n$ 的圖形特徵與係數 a 和次數 n 的關連，其中 n 以 1, 2, 3, 4 爲主，並討論奇偶性。然後講到 n 次多項式函數，指出一次函數的點、斜觀念，並複習配（平）方，認識到任意二次多項式函數的圖形，都是其首項函數 $y=a_2x^2$ 的平移（因此它必有一個極值）。然後，在數值上認識，當 $|x|\gg 1$， $f(x)\approx a_nx^n$ ，而表現在圖形上，就是多項式函數的圖形，宏觀而言就像其首項函數；這就是降冪排列的一個意義。

然後，複習多項式除法以及除法原理，但不必過多，很快就聚焦在除式爲 $x-a$ 的情況，而發展綜合除法。由餘式定理發現綜合除法也是求多項式函數值的快速算法。接著就講綜合除法的另一個應用：連續使用綜合除法，若得到的餘數依序爲 c_0、c_1、…、c_{n-1}，則 $f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots c_n(x-a)^n$ 稱爲 $f(x)$ 的（升冪）泰勒形式，其中 $c_n=a_n$ 而 $c_0=f(a)$。然後帶學生認識泰勒形式的典型

用途：當 $x \approx a$，估計 $f(x)$ 的值。由計算而認識：**泰勒形式意在估計**，越高次項越不重要；這就是升冪排列的一個意義。

以上兩段都還是傳統的高中數學課程。從這裡可以轉入微分了。從計算估計值的經驗得知：當 $x \approx a$，函數值 $f(x) \approx f(a) + c_1(x-a)$；既然如此，兩者的函數圖形也將非常近似。而 $y = f(a) + c_1(x-a)$ 與函數 f 通過同一點 $(a, f(a))$，是一條斜率為 c_1 的直線。用電腦繪圖，動態展現 $f(x)$ 在 a 附近之局部圖形，學生都能觀察出來局部圖形「像」一條直線的事實。在「看起來最彎」的地方（發生極值的點附近）的效果最具有戲劇性：它不但像一條直線，而且是一條水平線。我們定義 $y = c_1(x-a) + f(a)$ 是 $f(x)$ 在 a 的切線，並仿照其 c_0 的意義，將 c_1 記作 $f'(a)$，讀作 f prime of a，稱為 f 在 a 的**導數**。

從綜合除法的算則以及因式定理，我們發現 $f'(a)$ 就是 $\left(f(x) - f(a)\right) \div (x-a)$ 的商式在 a 的值。用多項式程序處理時，毫無問題，但是數學遇到一個窘境：

$$f(x) - f(a) = q(x)\,(x-a) \quad \Rightarrow \quad q(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a},\ \text{當}\ x \neq a$$

我們現在偏偏就要算 $q(a)$ 的值；從多項式的角度看來毫無問題，但是從分式看來就不能做了。上述分式的圖形，除了 a 那一點以外，都和 $y = q(x)$ 的圖形一樣。很明顯地，那缺掉的一點就是 $(a, q(a))$。我們用以下符號迴避這個窘境：

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (f\ \text{為多項式})$$

非常注意：此時的 lim 只是一個符號，代表一個程序：求右式的商並代入 a 求值，最多再代表一個觀念：將圖形中缺的那一點補起來。以後，在數學課或物理課的適當時機，再來處理「極限」觀念。此時，我們僅限於多項式範圍內的極限操作。

用極限定義並設定 $f(x) = x^n$，很容易推導公式 $f'(a) = na^{n-1}$。我們稱「求導數」的過程為**微分**。從泰勒多項式 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots$ 以及 $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \cdots$ 的係數積與和差計算，很容易推論微分的線性性質。然後，變個戲法，由實例認識 $f'(a)$ 其實是一個函數，a 是可以代入任意數的「變數」；但我們不習慣將變數寫成 a，不妨再寫回大家習慣的 x 吧。於是 $f'(x)$ 就稱為**導函數**了。至此，任意多項式函數的導函數、導數，都可以用微分基本公式和線性性質算出來。當然，切線方程式也有了更快速的算法。

其實微分不止用來算切線（何況目前看來，切線也沒什麼用），我們設定一個數學的目標吧：徹底了解三次函數的圖形特徵。通過配三方的觀念，以及泰勒形式的作法，我們認識到任意三次多項式函數的圖形都是 $y = a_3x^3 + f'(a)x$ 的平移，水平平移的量 $a = -a_2/(3a_3)$ 之公式與配方公式很對稱。因為後者是奇函數，它對稱於原點，所以原點具有反曲點的性質。因此，三次函數的圖形必定有一個對稱點，也就是反曲點。從 a_3 和 $f'(a)$ 的正負性，可以討論並歸納三次函數圖形的兩大類型：有極值、無極值。於是衍生了兩個（一體的）問題：函數的遞增、遞減情形如何？若有極值，發生在哪裡？

上述問題，為多項式方程式求解，以及多項式不等式求解區間，提供了一種

功能導向的學習動機；此時求解的對象都是 $f'(x)$ ，次數爲 2。至此，我們可以宣告，自從國中三年級徹底了解二次函數以來，我們現在**徹底了解三次函數**了。順帶地，我們發現了微分的一個用途：求多項式函數的極值。

最後，我們提供以多項式函數爲模型的最佳化問題，作爲多項式微分課程的收尾。試教的 4 節課都放在《數學 I》第二章之後，所以不處理求根與不等式的教學。但我認爲這些課題，以及堪根定理，都可以跟在徹底了解三次函數之後，並將操作的範圍略微擴張到四次函數。

如果師生都覺得恰當，可以在附錄裡用導數的極限定義，討論 $f(x)$ 爲 $\sqrt{x}$ 、$1/x$ 、$1/x^2$ 等簡單代數函數的微分公式。所須的技術爲平方差公式與繁分數化簡，都是部分高一學生能夠掌握的。附錄也可以提供以這些簡單代數函數爲模型的最佳化問題。

這套課程不涉及插值多項式與複數。有了微分工具之後，數學建模就有大量的新鮮空氣可以呼吸了。而我認爲，微積分的下一步未必要由數學課來走（芻議課程完全不含物理意義），何妨請物理課接下一棒，之後再由數學課接回來？