97 數乙關於實數概念的考題

我向來比較喜歡『數乙』的考題。這裡說的是大學入學考試中心（大考中心）指定科目考試（大學指考）的一個考試科目：數學乙。雖然新的大學入學制度（包括考招分離和多元入學）已經和過去大不相同，大學指考仍然被許多人認爲是大學聯考的繼續，使得它的考題還是具有相當程度的指標性。所有大考中心舉辦的考試學科當中，只有數學舉辦兩種考試：數學甲和數學乙。

傳統上，理工類的大學科系採計數學甲的成績，而商管法類的大學科系採計數學乙的成績。至於文史藝術類，在制度設計的理想上，可以不採計指考的數學成績，而採計學科能力測驗（學測）的數學成績，或者僅設定學測數學成績的門檻。因爲學測的考試範圍只涵蓋高中前兩年，僅採計學測的可能性，使得一部份學生可以在高三不選修數學，減輕了他們的學習負擔。延後到 99 年實施的 98 高中數學課程綱要，特別呼應了施行這個制度的可能性，較大幅度地重新規劃了高中前兩年的數學課程，使得它更恰當地符合所有高中學生在數學基礎方面的共同需求。

我耳聞別人推測，對於數學與資訊能力的需求越來越高的財務金融類科系，雖然屬於商或管理學院，現在已經招收了許多所謂跨組的考生，將來可能直接宣布採計數甲成績，而非數乙。其實，現在的組別分類，歷經半個世紀的學科演化，也許該開始調整了。在大學裡任教，也逐漸感到，通常歸類在理學院的化學系和生命科學系，似乎不必跟其他理工學生學習同一種的微積分。用一個學系所屬的學院來決定它的修課內容，就好像種姓制度一樣缺乏說服力。不過，最後的決策仍依賴於這些科系的現任教師們，是否願意投入一些時間來考慮大學部學生的教育問題。

順便一提：最近有種意見，認爲英文也應該舉辦兩種版本的考試。主要原因是英文科考試成績近年越來越嚴重的兩極化趨勢，使得設計一份具有鑑別度的英文考卷越來越困難。因爲缺乏經驗與資訊，我實在不應該對這個英文考試的議題有何意見，但是忍不住想要問：爲什麼不用全民英檢的成績就好了？英檢的費用高於指考，沒錯，但這是一個有好幾種方法可以解決的技術性問題。

相對來說，數乙的考題有很多奇妙的創意，比較活潑有趣，比較接近生活經驗，而數甲的考題很……數甲。絕不是說數甲的題目比較沒創意，而是，它總是很專業、很嚴肅。我特別喜歡今年數乙的第 7 題。這是個多選題，題目是

> 請問對於下列哪些選項，可以找到實數 a，使得選項裡面所有的數都同時滿足一元二次不等式 $x^2+(2-a)x-2a<0$？
>
> (1) -1, 0
>
> (2) 1, 2, 3, $\cdots$
>
> (3) -3，-4，-5，$\cdots$
>
> (4) 97, 2008

(5) $-\pi$, π

再度順便一提：我很不同意大考中心的數學排版。所有未知數符號或數字之間，只用（英文的）逗點符號隔開，在逗點後面應該有空格，考卷上幾乎全部漏了這些空格。逗點、句點和驚嘆號、問號等（英文的）標點符號之後，必定要有空格，我很納悶爲什麼有這麼多學生似乎從來沒聽說過這個基本規則？我們的英文老師都沒留意這個小小的細節嗎？我發現平均每個星期我都要重複跟三個不同的學生說這個規則。而大考中心是一個舉辦全國性評量的單位，更不應該犯這種基本的排版錯誤。少了空格之後，選項 (4) 的兩個數（其實就是今年的西元和民國年份）看起來像一個數：九十七萬兩千零八。想必是我多慮了，應該沒有考生產生這種困擾。

這個問題頗需要語文能力。我讀了三遍，又從答案來推測，才明白了題目。以前沒見過這種題目，也沒見過這種提問的方式，感到很有趣。看懂題目之後，就知道要決定所問不等式的解區間。學生只要不慌張，就該知道求解二次不等式的基本動作就是先做因式分解。這個題目顯然不想在這方面爲難學生，其因式分解是顯而易見的，用國中二年級學生都會做的交叉相乘法得到 $(x+2)(x-a)<0$。所以滿足不等式的數介於 -2 和 a 之間，不含兩端點，這是第一關。題目的選項設計得很好，過了第一關的人想必已經會選 (1)，得 1.6 分。

解此題的第二關則需要理解，此時並不知道 $a<-2$ 還是 $a>-2$，所以滿足不等式的數應該是從 -2 到 a 之間，或者是從 a 到 -2 之間，不含兩端點。所以選項 (4) 裡面的所有數也都可以同時滿足對某個 a 所寫成的不等式，例如取 $a=3000$ 即爲一例。而選項 (5) 則不能同時滿足任一個 a 所寫成的不等式，因爲 π 大約是 3.14（高中生必須知道這個數據），若 $a>4$ 則 π 會在解區間裡，但是 $-\pi$ 就不在裡面（因爲 $-\pi<-2$）；同理，若 $a<-4$ 則 $-\pi$ 會在解區間裡，但是 π 就不在裡面（因爲 $\pi>-2$）。所以 π 和 $-\pi$ 不能『同時』在解區間裡，也就是不能『同時』滿足不等式。所以選項 (4) 和 (5) 可以從正反兩面來測試考生是否過了第二關。通過者可以再得 1.6 分。

這個題目的第三關是對於『實數』的一個基本觀念：無限大不是實數。如果沒有經過細心地教導，學生在學會處理無窮等比級數或某些微積分課題之後，會被攪糊塗了，誤以爲 ∞（無限大符號）是一個可以像數一樣使用的符號。萬一有這種錯誤概念，就會以爲選項 (2) 裡面的數都滿足當 $a=\infty$ 時的不等式，而選項 (3) 裡面的數都滿足當 $a=-\infty$ 時的不等式。這就是選項 (2) 和 (3) 的『誘答力』之所在，而且它們還有『診斷迷思概念』的效用。每錯選一項，就會被扣 1.6 分，兩項都誤選，就抵銷了通過前兩關所得的分數。

在數學書寫中，我們的確會寫像 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\infty$ 這種式子。但是，教師應該向初學者強調：『這並不是等式，這裡的＝也不是等於』。此處的等號是被「借用」來表達『發散到無限大』的符號，圖個方便而已。前面那條式子的口語表達，應該是『調和級數發散到無限大』。調和級數是發散的，所以即使式子

裡有一個等號，並不是說它的極限等於 ∞：其實它的極限是不存在的。無限大並不是一個固定的對象，它表示某個操作的過程會產生沒有上界的結果。這是個極爲精微而基礎的概念，卻非常難測驗學生的理解，它可能在課堂中長期地被忽略。

以上是我非常喜歡這個題目的原因。也希望這一道題目，可以引起中學教師注意這個觀念，並且謹慎處理關於「無限大」的溝通方式。例如，在口語溝通上，不要說『等於無限大』這種話，而要說『發散到無限大』。