科學月刊【數·生活與學習】專欄 **9804**

遞迴的兩個層次

單維彰 98 年 3 月 7 日

「遞迴」(recursion) 是一種思考的方法、解決問題的策略，也是一種表現數列規律性的形式，從這種形式可以用固定的代數程序換算成一般性的公式。高中數學課程自從 95 暫行綱要引進這個課題，但可能是因爲缺乏詮釋也沒有範例，造成教學目標的不確定感，也形成評量上的疑慮。99 課綱對此課題有稍多的說明，並且限定在所謂的「一階遞迴」上，但有些教師還是認爲不夠清晰明確。

這一篇短文，企圖分兩個層次向一般讀者介紹「遞迴」，並順便嘗試以個人的理解來詮釋高中課程裡的遞迴課題。我要強調「個人」和「嘗試」兩個關鍵詞。

第一個層次，視遞迴爲數列規律性的一種形式。令 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$ 是一個數列，意思就是「一系列的數」。數列不一定有規律，例如我們按照座號請學生報出他生日中的日期部分，就會得到一個介於 1 和 31 之間的整數數列，卻不見得能觀察到什麼規律。但是有些數列是有規律的，而表現其規律性的形式之一，就是說每一項和它前一項之間的關係。例如，從 1 開始以 2 爲公差的等差數列（其實就是奇數）1, 3, 5, ⋯就有如此的遞迴關係：$a_1 = 1$ 且 $a_n = a_{n-1} + 2$，從此以後 n 都代表某個大於 1 的正整數。每一項只跟前一項有關的遞迴關係，稱爲一階遞迴。

利用一階遞迴關係，有一種固定的代數程序，可以轉換成一般公式，也就是得到 a_n 和 n 的關係。承接前一段的例子，因爲

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + 2$

$a_3 = a_2 + 2$

$\cdots$

$a_n = a_{n-1} + 2$

把這些等式全部加起來，得到

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 1 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + 2(n-1)$$

很明顯地，等式的左右兩側都有 $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$，可以抵銷，因此

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

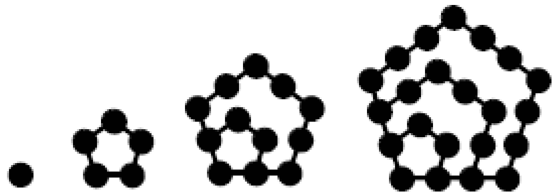
這就是所謂的一般項公式。上述的代數形式可以用來推導任意一階遞迴關係的一般項公式。

我們不該從少數幾項數列斷言它們的規律性。例如，看到 1, 4, 7, 10 這幾項，未必下一項就是 13。譬如，它們可能是一個函數的整數值：$f(1)=1, f(2)=4, f(3)=7, f(4)=10$，固然有可能 $f(x) = 3x - 2$，所以 $f(5)=13$，但是 $f(x)$ 也可能是

$$f(x) = \frac{1}{12}x(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) + x(x-1) + x$$

那麼下一項其實是 $f(5)=15$。運用同樣的想法，其實可以創造無窮多種可能的 $f(5)$。

所以，要發現有意義的數列規律性，不該單純地只看前面幾項的數，而是應該觀察某個具體程序所導致的數列。例如 97 年大學指定考試的數學甲科目，有一道題目以舉例說明的方式，定義每邊 1 顆、2 顆、3 顆和 4 顆球的正五邊形如下，而定義 a_1，a_2，a_3，⋯是它們總共含有的球數。



可見 $a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，⋯。若要用遞迴的策略寫出它們的規律性，我們發現每邊 4 顆球的正五邊形，是每邊 3 顆球的正五邊形，再加上三個邊，每邊 4 顆球，交點處的兩顆球重複了，所以多出來 $4\times3-2=10$ 顆球。根據這個經驗，我們發現一般而言 $a_n=a_{n-1}+3n-2$。然後我們列出以下等式：

$a_1=1$

$a_2=a_1+3\times2-2$

$a_3=a_2+3\times3-2$

⋯

$a_n=a_{n-1}+3\times n-2$

於是得到一般項公式

$$a_n=1+3\times(2+3+...+n)-2(n-1)=3\times(1+2+3+...+n)-2n=\frac{3}{2}n(n+1)-2n=\frac{3n^2-n}{2}$$

高中數學課程中的遞迴主題，應該僅止於發現數列的規律性，並用以得到一般項公式。而所謂的規律性，如前面的指考題目，不是單純由數字推測，而是由具體情境中的某種程序產生。這個層次的遞迴概念，並不只是代數操作而已，也可以成爲一種思考方法，並解決某種程度的問題。但是，我在第一段所提的，遞迴作爲一種思考方法與解題策略的層次，稍微更高一點。

專業人士的遞迴思考方式，並不在乎前幾項的特例如何產生。他們的思考模式差不多是，假設有一個黑盒子可以處理任意 $k<n$ 的狀況，如何利用這個黑盒子解決一般的 n 狀況？最近的指考與學測題目當中，僅有一題接近了這個層次。那是 95 年指考數學甲的題目，如下。

> 不透明箱內有編號分別為 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內；以 $P(n)$ 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。已知存在常數 r, s 使得 $P(n+1)=r+sP(n)$ 對任意正整數 n 都成立，求 r 與 s。

我們並不需要算出$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$ 等特例，也並沒有將$P(n+1)$和$P(n)$的關係視爲數列的規律性，就直接以遞迴的思考方式解決這個問題。要理解的是，$n+1$ 次取球編號之和爲偶數的情況，可以分成前 n 次的和爲奇數而第 $n+1$ 次取的球也是奇數，或者前 n 次的和爲偶數而第 $n+1$ 次取的球也是偶數這兩種情況。如果$P(n)$表示前 n 次的和爲偶數的機率，則$1-P(n)$就表示前 n 次的和爲奇數的機率。第 $n+1$ 次取的球是偶數的機率是$\frac{4}{9}$、是奇數的機率是$\frac{5}{9}$，所以

$$P(n+1)=\frac{4}{9}P(n)+\frac{5}{9}(1-P(n))=\frac{5}{9}-\frac{1}{9}P(n)$$

有了這條遞迴關係，再知道$P(1)=\frac{4}{9}$，當然就能輕易得到$P(n)$的一般公式。

指考的數學題目，特別是數學甲的考題，經常在考學生的數學創造力。所以，即使 95 年的高中畢業生，在校期間並沒有正式被教導遞迴思考策略，這一題也不算太過份。但是，就課程與評量理論而言，這個題目不太恰當。而高中數學課程，也可以不必觸及這個層次的遞迴概念。因爲，如果課程涵蓋這個層次，則評量的考題可能會非常難以掌握，而變成學生過度的負擔。如此的思考方式，以及這種思考方式（目前所知）對應的問題，並不普遍，只有數學領域中離散數學專業的人，以及計算機科學領域中演算法專業的人，將來會需要發展這種思考策略。因此，似乎不必讓全體高中生都學習這個課題。

很多高中生都私下表示，老師如果不是事先知道排列組合問題的作法，也沒那麼厲害可以看起來很輕鬆的解題；不少高中老師也承認。如果將遞迴的思考策略納入高中課程，像這樣令年輕人不服氣的題目，可能又會更多了。

表現遞迴思考策略之威力的最佳範例，應屬河內塔問題。只可惜這個問題太有名了，曝光率太高，許多學生在正式學習遞迴策略之前，可能就讀過它的解法，而降低了作爲教學範例的效果。