科學月刊【數・生活與學習】專欄 9806

證據與證明

單維彰 98 年 5 月 6 日

上個月，我們建議以人相對於研究對象的主體性，區分形成定理或理論的可能性。不論是理論還是定理，當然都不（應該）訴諸於權威或直覺，而需要驗證其正確性。對於人是爲客體的諸家理論，我們對它沒有宰制之力，於是基本上只能提出**證據** (evidence)；針對每個證據，以或多或少的個人經驗與專業慣例，判斷降低此理論爲誤的可能性。只要錯誤的可能性降到某種程度，我們就「暫且」相信了這個理論。所有的理論，不管我們信以爲真了多久，都不能是「在前提條件下絕對正確的」，例如托勒密的行星運轉理論，儘管被相信了一千五百年，一旦有了足夠的反面新證據，畢竟還是被拋棄了。

而定理是人的創作，當人是研究對象的主體，它的所有行爲和意義是由我們發明的，所以整個對象可以納入我們的語言體系。在這個情況下，我們可以全面性地探討一個定理，而不必舉隅爲證。用符合邏輯的語言論證定理之正確性的方式，稱爲**證明** (proof)。我們稍後就會舉例說明。

只有針對人創造的定理，才能證明。其他的情況，都只能提出證據。我們的日常生活語言，總是不準確的，所以容易造成混淆。例如經常聽說的「不在場證明」，其實不是證明，而是提出某一時間在某一地點的證據。這個證據，當然還得經過專家檢視，以其經驗賦予它排除嫌疑的可能性。例如，拿出 5 月 2 日的晚場電影票，並不能讓刑警相信我真的那時候身處電影院。如果我的女兒說，她和我一起看電影，我的證據成立之可能性當然提高了一點，但是也還不夠。如果再有一個天真無邪的小女孩，說在戲院買爆米花的時候看到我，一般的警察可能就認爲夠了，於是接受我的不在場「證明」。至於那些非常堅信直覺的警察，可能還是不願意接受，而繼續尋找證據來駁斥我的說法。

以下，我們用一個數學定理來展示證明的形式，並認識到，何以只有人的創造才有這種以語言驗證的可能。我們必須簡短地從**命題**說起。

表達一個事實或現象或關係，而可以容許驗證其正確性的陳述，稱爲一個命題。例如『玉山是台灣的最高峰』和『所有的台灣黑熊都生活在海拔 2000 公尺以上的山區』都是命題。前者指涉單一對象，是特殊性的命題；後者指涉許多對象，是一般性的命題。

用數學詞語或符號表達，並且可以用數學知識判斷真僞的命題，稱爲數學命題。例如『$\sqrt{2}$ 不是有理數』和『令 a, b, c 爲整數，如果 $a<b$ 則 $a+c<b+c$』都是數學命題。前者指涉單一的對象，是特殊性的，後者涵蓋無窮多種情況，是一般性的。

但是，請小心，諸如『黃金矩形是最美的長方形』或者『數學是科學之母』之

類的陳述，並不是數學命題；它們雖然提到數學，卻不能用數學知識判斷真僞。事實上，即使在數學知識範圍以外，可能也無法辨別它們的真僞。所以它們甚至於不是命題，僅是陳述而已。

雖然，像『$\sqrt{2}$不是有理數』這樣的特殊命題並不無聊，也不簡單，許多高中生在一年級的時候見識了它的證明（儘管可能並不明白），但數學很少將特殊命題視爲定理。數學定理通常是涵蓋無窮多種情況的一般性數學命題，例如『令a, b, c爲整數，如果$a<b$則$a+c<b+c$』。而數學證明的特性，也就在這種命題上展現出來：何以有限的字句與推論，能夠涵蓋無窮多種狀況的正確性呢？關鍵就在於，「小於」概念是我們創造的，「整數」是我們創造的，「整數相加」的意義也是我們創造的，便可以明確規定它們全部的意義，並不僅限於觀察之所得；萬一意外發現起初沒有設想的情況，也可以由人來決定如何權宜處置。

讀者一定早就熟知整數和相加的意義，爲了完整起見，還是用一段話贅述一下。在一條水平線上，隨便定一個點作爲原點，稱它爲 0，再隨便決定一個固定的長度。以此長度爲間距，在直線上從原點向右依序標定任意多個點，這些點所在位置的名字就是正整數，依序命名爲 1, 2, 3, …；以同樣間距向左依序標定任意多點，那些點所在位置的名字就是負整數，依序命名爲 $-1, -2, -3, \ldots$。正整數、負整數和 0 合稱爲整數。在 0 的左右兩側，與 0 間隔相同的兩個整數，互爲對方的相反數。例如 3 的相反數是-3，-3的相反數是 3。若a, b爲整數，我們兩數相加記做$a+b$，而「加」的意義是：當b是 0 或正整數，$a+b$是在a的右邊、與它距離b個間隔那個點的名字；當b是負整數，它的相反數$-b$是正整數，$a+b$是在a的左邊、與它距離$-b$個間隔那個點的名字。

規定某個概念的意義，就稱爲此概念的*定義*。前面我們定義了整數和它們的相加，現在我們定義整數的「小於」關係：若存在某個正整數h使得$a+h=b$，則稱a小於b，記做$a<b$。至此，我們應該已經具體地看到，整個命題『令a, b, c爲整數，如果$a<b$則$a+c<b+c$』其實建立在我們日常使用的語言之上，全是人類自身的創造，我們對命題中的所有概念：整數、小於、相加，都有完全的主宰。這個命題雖然看起來很「數學」，其實也不過是比較冗長的語言描述，改以比較精簡的數學名詞和符號表達而已。

現在我們已經可以「證明」上述命題了：在a, b, c爲整數的前提下，如果$a<b$根據定義就有某個正整數h使得$a+h=b$，那麼$a+h+c=b+c$ — (A)，而$a+h+c=(a+c)+h$ —(B)，所以再由小於的定義得知$a+c<b+c$。

讀者應該已經有所領悟：其實，是因爲「定義」涵蓋了無窮多種狀況，所以可以用有限的字句，證明包含無窮多種狀況的一般性數學命題。證明中的 (A) 和 (B) 兩個步驟都可以輕易由整數相加的定義推論出來，(A) 稱爲等量公理，(B) 稱爲加法的交換律與結合律。這些都是讀者早就熟悉的，只提醒一下而不再贅述細節了。

但是，如果定理的證明必須引用已經確立的定理，而定義也要建立在已經被

定義的數學觀念之上，依此類推一直上溯，很快就會產生「第一個定義由哪些數學觀念定義？」以及「第一個定理引用什麼定理證明？」這種問題。數學是以「公設」和「無定義名詞」來處理這種問題。只有專業的數學愛好者才有興趣思索這種問題，一般以數學爲工具或嗜好的大眾，根本不會察覺數學的公設與無定義名詞，因爲它們自然地交融在我們使用日常語言的直覺裡面。所以，我並不想要爲讀者擦拭這「本來無一物」的塵埃。