科學月刊【數‧生活與學習】專欄 9903

以對數律為例談數學操作練習

單維彰‧99 年 2 月 13 日

在高中數學課程綱要文件中，經常提起某些課題不宜過度操作，避免人工化的難題；同樣的建議也散見於許多教師研習的演講和文件中。高中數學課程中以及校內的評量中，數學考題的深度與複雜度，有時候已經困難到反而「考試領導教學」是一句好話：校內的形成性或總結性評量題目，不必超過大考（學測數學、數學甲、數學乙）題目太多。現在，我要以「對數律」爲例，申訴基本操作練習的意義和本質，並且對於「人工化難題」的來源，提出一點個人的觀察心得。

所謂對數原本只是一個記號，就好像平方根 $\sqrt{4}$ 是那個平方等於 4 的正數的記號，而「以 2 爲底 8 的對數」$\log_2 8$ 是那個使得 2 的次方等於 8 的數的記號。如果已經忘記了高中課本的對數內容，可以讀本欄 95 年 3 月〈相看兩不厭〉關於指數和對數的簡短介紹。從基本的乘法，我們知道 $\sqrt{4}$ 是 2，而 $\log_2 8$ 是 3。但是，一般的平方根或對數，就沒那麼簡單，例如 $\sqrt{7}$ 或 $\log_2 7$；它們需要大量計算來估計其近似值。以 10 爲底的對數稱爲常用對數，省略 10 不寫，例如 $\log 7$ 表示使得 10 的次方等於 7 的數。高中課本提供常用對數的近似值表格，但是這不是本期要談的重點，讀者只要知道這些記號都能算出估計值就好了。

由對數的定義，以及稱爲「指數律」的指數計算規則，對數符合幾個重要的計算規則，稱爲「對數律」。因爲 $a=\log b$ 就是 $10^a=b$ 的意思，所以合併寫在一起就是所謂的還原公式（b>0）：

$$\log 10^a = a \quad \text{或者} \quad 10^{\log b} = b$$

從指數律和還原公式就能導出以下三條對數律（a>0、b>0）：

$$\log(ab)=\log a+\log b \quad \log a^n = n\log a \quad \log(a/b)=\log a-\log b$$

僅以第一條爲例，示範推論的過程：

$$\log(ab)=\log(10^{\log a}\times 10^{\log b})=\log(10^{\log a+\log b})=\log a+\log b$$

其中第二個等號是因爲指數律，其他兩個等號都是因爲還原公式。

以上五條公式就是學習對數的入門操作，需要熟練。就像小學一年級必須熟練 20 以內的加減，二年級必須熟練兩個一位數的乘法（也就是九九乘法），三年級必須熟練兩位數除以一位數的除法，…；數學中不乏這類沒什麼大道理，卻因爲實用之所需而應該盡量熟練的課題。對於成年的讀者，應該明白，不只數學如此，工作、生活和娛樂中所遇的各種課題，還不都是如此？從刷牙漱口到晶圓廠的三百道製程，哪一樣不是同時需要理論的架構以及熟練的操作？理論的學習和練習，以及操作的學習和練習，在內涵與形式上，都是不一樣的。

所謂操作練習，簡稱「操練」，對應英文的 drill 或 drilling。就是那種「沒什麼道理，反覆練習就會熟能生巧」的事情。從煎荷包蛋到做直式乘法到罰球線投籃，都屬於這種事。體育教練不會因爲我第一球投不進，就指導我退一步再投；再投不進，再退一步。可是，數學的操練題目，卻可能一題比一題難。

在台灣的中學課堂內，關於對數律的操練題目有多難？我想要留到下個月再舉例，但是經歷過的人應該都有概念。以下，讓我拿出美國的微積分課本，看看人家的操練題目像怎樣？這些都是非常暢銷而儼然「標準」的微積分課本。

先看 Stewart Calculus 第 6 版，在 **7.3** 對數函數那一節，習題 3—8 求以下數學式的值。（第 5 題其實設計得不好：兩小題並不「匹配」。）

3. (a) $\log_{10} 1000$ (b) $\log_{16} 4$

4. (a) $\ln e^{-100}$ (b) $\log_3 81$

5. (a) $\log_5 \dfrac{1}{25}$ (b) $e^{\ln 15}$

6. (a) $\log_{10} 0.1$ (b) $\log_8 320 - \log_8 5$

7. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$ (b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

8. (a) $e^{-2\ln 5}$ (b) $\ln(\ln(e^{e^{10}}))$

再看 Thomas Calculus 第 11 版，在 **7.4** 一般底之對數函數那一節，習題 1—4 要求簡化數學式。

1. a. $5^{\log_5 7}$ **b.** $8^{\log_8 \sqrt{2}}$ **c.** $1.3^{\log_{1.3} 75}$

d. $\log_4 16$ **e.** $\log_3 \sqrt{3}$ **f.** $\log_4 (\frac{1}{4})$

2. a. $2^{\log_2 3}$ **b.** $10^{\log(1/2)}$ **c.** $\pi^{\log_\pi 7}$

d. $\log_{11} 121$ **e.** $\log_{121} 11$ **f.** $\log_3 (\frac{1}{9})$

3. a. $2^{\log_4 x}$ **b.** $9^{\log_3 x}$ **c.** $\log_2 2^{\sin x}$

4. a. $25^{\log_5 3x^2}$ **b.** $\log_3 3^x$ **c.** $\log_4 2^{e^x \sin x}$

再看 Larson Calculus 第 6 版，在 **5.5** 一般底之對數函數那一節，習題 1—4 求對數的值，5, 6 改寫爲對數等式，7, 8 改寫爲指數等式。

1. $\log_2 \dfrac{1}{8}$ 2. $\log_{27} 9$ 3. $\log_7 1$ 4. $\log_a \dfrac{1}{a}$

5. (a) $2^3 = 8$ (b) $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$ **6.** (a) $27^{2/3} = 9$ (b) $16^{3/4} = 8$

7. (a) $\log 0.01 = -2$ (b) $\log_{0.5} 8 = -3$ **8.** (a) $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$ (b) $\log_{49} 7 = \dfrac{1}{2}$

因爲篇幅所限，我不能毫無節制地舉例。相信這三冊「暢銷」微積分教科書的基本操練習題，讓許多讀者覺得簡單得「可笑」。但是，它們畢竟是近乎「標準」的大學用書，而且還是第五章或第七章的內容（美國教科書習慣先以微積分定義自然對數，然後才導出一般底對數）。觀察這些操練題，是否和台灣數學課堂中的習題很不一樣？

我個人先後在台灣和美國受教育，而我認同美國教科書對於「操練」題的看法：基本、大量、不會一題比一題難、不要求學生全部做完。

數學的學習過程中，學生有「迷思」，而教師也可能有「迷思」。教師的迷思可能來自於大環境的壓力，可能繼承於所謂的傳統，也就是台灣的數學教學典範。我猜想，數學教師的迷思之一，就是『題目必須一題比一題難』。對於操練型的題目而言，實在不必如此。試想，學生如果不會第一題，也許費了好大力氣懂了第一題；然後做第二題，但是題目變難了，又不會。依此類推，學生豈不是永遠追不上題目？

一題比一題難的效果，在內功深厚的教師之間傳承了三、五年之後，就出現了「超級版」的難題。這些難題，很可能就是所謂「人工化難題」的主要來源。教師們在命題的技巧與深度上，精益求精，本來是專業成長的喜事。但是也該切記，教師的功力與日具增，而我們的學生，卻永遠都是懵懂的新手啊！

教師的迷思之二，可能是『題目必須融通，不可平鋪直敘』。而操練型的題目，應該維持在「直接」的層次上，給學生大量的練習，以達到熟練的目的。那些融通了的、包含了兩種以上步驟的題目，的確「效率」比較高，做一題等於做三題。但是，這樣的題目，適當地用於總結性評量或許有意義，但是在形成性評量中，實在應該避免。

教師傾向使用效率高的題目，可能是爲了節省題目的數量。而這項傳統可能有兩個來源：第一，以前命題不易，刻鋼板很累，影印又不方便。這個理由現在幾乎消失了。第二，又是一個迷思：『題目一定要做完』。我們可以提供很多難度類似的「操練」題目給學生，卻不一定每個人都要做完。操練的題目就像無窮級數，根本沒有做「完」的一天。資質好或預習足夠的同學，也許只要在腦中默算就好；而需要更多練習的同學，則有足夠多難度相差不多的題目，供他反覆練習。

下一期，我將延續這個主題，舉出更多實例來探討高中數學課堂內的現象。