科學月刊【數・生活與學習】專欄 9904

以對數律為例談數學練習的意義

單維彰・99 年 3 月 18 日

上個月，本欄指出數學的學習可分「理論」的學習與「操作」的學習兩個層次，並指出操作練習的目的僅是熟練，所以這一層次的練習題需要基本而大量，不必艱難而繁複，以免日久造成「人工化的難題」。這個話題若要談得具體，必須舉例，而舉例就必須涉及數學內容。所以，上個月我們以對數律為例，推導了還原公式和指數的「乘法律」、「除法律」和「次方律」，並邀請讀者觀察美國暢銷微積分教科書內的操作練習題，看看它們是否滿足本欄作者主張的練習目的？

數學課程中的某些習題，超過了「操作練習」的層次而與數學理論或典型的應用有關。這些題目的數量可以不必像操作練習那麼多，但是每一題要表明一個數學的概念，讓學生透過操作獲得某種學習數學的意義：也許是一個數學理論的認識，也許是一種解決典型應用問題的方法。如果沒有達到這個層次的教學，則這類題目的大量變化，最後容易流於徒然的繁複操作，學生無法認知操作的意義，也就達不到學習的目標，並且很可能變得緊張無措。

為了要具體談論這個話題，讓我們言之有物並且盡量對讀者有實際的幫助，作者還是很抱歉地需要舉例。讓我們先看一個比較簡單的問題，所謂的「指數方程式」。這是很常見的一類題型：

$$求解\ 4^{x+1}-5\times 2^{x+2}+16=0$$

標準方法是觀察原式等於 $4\times(2^x)^2-5\times 4\times 2^x+16$，然後置換 $u=2^x$，得到二次方程式 $4u^2-20u+16=0$ 或化簡為 $u^2-5u+4=0$，然後就很容易做了。至此，請讀者想想，如果練習 4 或 6 道如此的題型，有何意義？

如果上述題型的目的僅是將指數形式的方程式改成二次或三次方程式，則這類題型就成為「指數律的操作練習」：練習將 2^{x+2} 寫成 4×2^x，並練習將 4^x 看成 $2^{2x}=(2^x)^2$。在這個層次上，其實這個題型很簡單，而且缺乏意義，學生不明白為什麼要學這個技巧？

如果老師能夠指出，練習這種題型的意義在於一種形式的「置換」技巧，就能跟過去以及未來的經驗連結，使得這個看似純操作的練習，在整個數學的架構中有了明確的地位。在指數方程式之前，學生曾經用置換的技巧化簡 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$：令 $a=\sqrt{5}$，$b=1$，而 $(a-b)^2=6-2\sqrt{5}$ 所以原式等於 $|\sqrt{5}-1|$；他們也曾用置換的技巧分解 x^4-5x^2+4：令 $y=x^2$ 則原式等於 $y^2-5y+4=(y-4)(y-1)$，所以原式可分解成 $(x^2-4)(x^2-1)=(x+2)(x-2)(x+1)(x-2)$。用「置換」這個大觀念連結這些題型，就有了一致性，而且它的確是數學操作中的一個重要觀念與技巧；之後在三角方程式與微積分的課題中，還會再使用置換來解決問題。

利用對數的還原公式和次方律，我們可以推導對數的「換底公式」。這是堪稱「偉大」的公式，是學習對數的核心知識，也是關於對數的最重要觀念之一。它雖然也有操作的層面，但是操作並非換底公式的重點；它的重點是觀念，而此觀念恰好是說（過於化約地說）：對數的底並不重要，任何底都一樣好。不論原先用了什麼底，一律可以換成另一個方便的底；通常選 10 或 $e \approx 2.7183$ 作爲底。

但是，有點不幸地，在我國的高中數學教室裡，更糟糕的是在校內的數學考卷上，有太多關於換底的人工化難題，不但不能凸顯換底公式的意義，更讓學生害怕數學，而可能錯失了學習這個美妙工具的機會。

現在我們不得不展示換底公式。如果 $0 < b \neq 1$ 是某個底數，而 log 表示常用對數（以 10 爲底），則

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

其中 $a>0$。這條公式的意義是：任何底的對數，都能換成常用對數。

大考的題目都能掌握換底公式的精神，所以當我普查 90—98 年度的大考數學試題（學測、數甲和數乙），發現總共只有 5 道題目出現非「常用」的對數；而「需要」換底公式才能做的題目數量是：0。其中一題 96 學測 A：令 $0<x<1$，求解 $\log_x 4 - \log_2 x = 1$，可以用換底公式再用前述的置換法（令 $u = \log x$）變成二次方程式求解，但是我猜多數做對這一題的考生，是用「湊」的。因爲是選填題，題目已經告訴考生答案是一個分數，所以很容易湊出兩個解 $x = 2$ 或 $x = \frac{1}{4}$，前者不合。所以這一題「可以」用換底公式，但是並「不需要」。

另一題 95 數甲 2：令 $x = \log_3 10$，需知道 x 是正數並估計 $y = 2 + x - x^2$ 是正數還是負數？考題中告訴學生 $\log 3 \approx 0.4771$，所以可以用換底公式估算 $x \approx 2.1$。但是，以 $3^2 = 9$ 來看，很容易估計 x 大約是 2.1。即使估得更小，例如 2.05，也還是能估計 $y<0$ 而點 (x, y) 在第四象限。所以這一題也是「可以」用換底公式，但是並「不需要」。

其他 3 道非「常用」的對數考題，全是對數的一般性基本觀念，與底數是幾其實並無關聯。

相對於大考的數學試題，讓我們「欣賞」一道高中段考的考題，想必高中階段的教師和同學都對此題型不陌生：

$$\text{化簡}\quad \log_2(\log_{16} 7) + 2\log_4(\log_7 4)$$

（答案是 -1）即使不是數學的專業人士，應該也能單純從形式上看得出來，高中段考的題目比大考題目複雜很多，而且完全沒有失去了操作換底的意義。這一道題目可能是針對以下「公式」設計的：

$$\log_{b^n} a^n = \log_b a$$

以上公式其實是以下公式的特例（$m = n$）：

$$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a \quad (設\, m \neq 0)$$

而以上公式又其實是換底公式和次方律的直接應用：

$$\log_{b^m} a^n = \frac{\log a^n}{\log b^m} = \frac{n\log a}{m\log b} = \frac{n}{m}\frac{\log a}{\log b} = \frac{n}{m}\log_b a$$

這是非常容易推論的形式，它比較適合用來當作換底公式的推理練習，卻在課堂中經常被設定爲「公式」，而這種公式只是爲了「速解」如前面所學的那種人工化的難題。

像這樣的「公式」，從核心公式或觀念推論所需的精力，遠低於把它置入大腦「長期記憶區」所需的精力，實在是造成數學難教難學，被人詬病爲「與生活脫節」的根本原因啊！作爲教師，應該培養自己取捨「公式」的能力與品味。如果，能夠推論的所有恆等式（或恆不等式）都變成「公式」，則數學的學習內容豈止繁重得難以承受，更可惜的是喪失了數學「以簡馭繁」的核心價值。