科學月刊【數‧生活與學習】專欄 9906

「行列式」從何而來？

單維彰‧99 年 5 月 18 日

基於和上個月同樣的動機—為高中數學課程的幾個線性代數相關課題初步地整理一些歷史背景，期望引起同仁對於這方面資料較為匱乏的關心，以致有更豐富且適合高中課堂使用的歷史相關讀物產生—我在本欄繼續這一系列的報導。

當我們由後期的觀點來看數學史或科學史，特別是受限於篇幅和深度的時候，經常營造出一種假象，好像歷代（甚至不同種族、不同地域的）學者們都朝著一個共同而明確的目標前進，有如接力賽似地一棒傳一棒，而造就出今天教科書裡的內容。而真相並非如此。只要能夠多用一點篇幅，並且多引入一些數學內容，就能表現出更多的真相。

但是歷史也確實有其神秘之處；有時候，某些不凡的靈魂彷彿真的能夠跨越地理的障礙，又好像某些思維在某個時期確實充斥於「空氣中」，許多未能彼此溝通的人同時接受了訊息，而創造出極為類似的成果。上個月指出複數的幾何意義，是一個例子。Crowe 在其 “A History of Vector Analysis” 裡面，列出至少六名彼此極可能不曾聯絡也不知道對方思想的人，在十九世紀的最初 30 年，不約而同地思考這個問題，並提出幾乎一致（但是深度與廣度不一）的見解。這許多條的線索，經過後世的融合、簡化與詮釋，形成今天教科書所呈現的面貌。

行列式、向量和矩陣（在高中課程中其實是方陣），各有自己的發源，有它們自己的動機和應用。其中最早發生的是行列式，原初的動機是探討線性聯立方程組的解，最早出現在十七世紀的西歐和日本；而行列式與向量和矩陣那另外兩條線索的揉合，則發生於十九世紀的中期。至於它們三者被整合在「線性代數」的架構之內，則已經是距今 (2010) 一百年左右的近期發展了。

在高中課程的範圍內，我們只介紹了二階和三階行列式，又稱為 2×2 和 3×3 行列式（讀作二乘二而不是二乘以二），那是分別將四個或九個數映射成一個數的計算規則。若將四個或九個數排列成正方形，則其行列式計算規則如下：

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{和} \quad \begin{vmatrix} a & g & u \\ b & h & v \\ c & k & w \end{vmatrix} = ahw + bku + cgv - uhc - vka - wgb$$

一般而言，若 n 是正整數，則 n 階行列式就是將 n^2 個數映射成一個數的計算規則；某一個數的一階行列式就是那個數本身。以上記號是今日的標準：將 n^2 個數排列成正方形，在其左右兩側畫上直線（看起來也就是「絕對值」符號）。絕對值記號的「借用」以及把數排列成正方形的寫法，是英國人凱萊 (Cayley, 1821—95) 在 1841 年提出的。知道這件歷史，再得知凱萊也是矩陣理論的開路先鋒之一，就不會太驚訝了；凱萊在 1858 年發表了第一篇有系統地定義矩陣並

探討其代數性質的論文。

雖然前人並沒有把數排列成正方形，也沒有方陣的名字和觀念，卻其實已經考慮了所謂的矩陣乘法。早些時候，行列式有兩個意義：它既指那 n^2 個數，又指它們依規則算出來的那一個數。所以，柯西 (Cauchy, 1789—1857) 在 1812 年發表的「行列式乘法性質」，乍看是一句沒意義的話：『行列式的乘積相等』，其實就是我們今天所說的 $|A||B|=|AB|$，其中 A 和 B 是階數相等的方陣，而 $|AB|$ 的計算規則，就是先做 A 和 B 的矩陣乘法，再算其行列式。我們甚至可以說，柯西的行列式乘法性質「啓發」了後來矩陣乘法的規則。矩陣的乘法發生在矩陣誕生之前，數學史是不是很有趣？

中文翻譯「行列式」的時候，凱萊的符號已經通行，所以那些數寫成了方陣形式，而橫排的數稱爲列，直排的稱爲行。西方稱之爲 determinant，是「決定性因素」的意思。在大勢底定以前，同樣的觀念和算法有過很多不同的名字，我們不必做語源的考據。而 determinant 之勝出，高斯 (Gauss, 1777—1855) 那本天才洋溢的《算術研究》肯定是個決定性因素：高斯在書裡用了那個字 (1801)，並且使用了 2 階和 3 階情況的「行列式乘法性質」；柯西推廣並證明了 n 階的情況。

中文「行列式」強烈暗示它是關於行和列的計算規則，這個非常優異的名字同時指出了算法。就好像中文「微積分」明白指出那是一套包括微分和積分的算法，比原文 Calculus 有意義多了。所以中學課程通常將行列式放在矩陣的章節之中。但是我們現在知道，行列式的發生，原本是某種性質的決定性因素，而且早在它被寫成行和列以前。

行列式是 n 元一次聯立方程式有唯一解的決定性因素，也就是課本裡的克拉瑪定律。克拉瑪 (Cramer, 1704—52) 在 1750 年發表了這個決定 (齊次線性) 聯立方程組有唯一解、有無窮多組解、無解的一般性方法。那篇論文的主題在探討「平面上通過若干點的代數曲線」，其實就是插值多項式啦；從已知點坐標求插值多項式係數的一般性方法，就是解聯立方程組。所謂的克拉瑪定律，寫在那篇論文的附錄，並無證明。在課本裡被當作應用的克拉瑪定律，其實是行列式的歷史源頭。

在克拉瑪之後，行列式逐漸成爲西歐學術圈內的共同知識。雖然圈內人普遍將克拉瑪定律視爲行列式的源頭，卻把開創行列式這門學問的榮譽，歸給了范德蒙 (Vandermonde, 1735—96)。這是因爲後者在 1770 年代的工作，將行列式從聯立方程式抽離出來，當作獨立的數學研究對象。范德蒙指出高中課本裡面列舉的那些行列式計算性質，並指出利用餘因子化簡的算法；但是他並沒有使用凱萊的方陣表達形式。這就是爲什麼明明克拉瑪已經知道，解插值多項式問題的係數矩陣都具有以下形式 (x_1，x_2，x_3 和 x_4 是相異的已知數)：

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix}$$

數學圈卻把這種形式的矩陣稱爲范德蒙矩陣。

但是在克拉瑪論文的一百年後 (1850)，西歐的學術圈有了新的「發現」。那一年，德國（漢諾威）出版了萊布尼茲 (Leibniz, 1646—1716) 書信全集，裡面有一封 1683 年寫給羅必達（一個大家熟知的極限法則以他命名）的信，也提出了所謂的克拉瑪定律，並且明確地寫出三階行列式的計算規則。更令人驚訝的是，萊布尼茲在信中使用了雙足標：他寫$10+11x+12y=0$，但那些係數不是十、十一、十二的意思，從後文看出來是a_{10}、a_{11}、a_{12}的意思。

當西歐和日本的交流更爲密切之後，他們又「發現」居然就在萊布尼茲寫信給羅必達的幾乎同時，在日本被尊爲「算聖」的關孝和 (Seki Takakazu, 1642—1708) 也撰寫了完全一樣的技術，他不但等同於發現了克拉瑪定律，也幾乎寫出了凱萊的方陣形式。我們相信萊布尼茲和關孝和不曾聯絡，而他們的前世，會不會都讀過卡丹諾 (Cardano, 1501—76) 的《大術》？因爲後來又發現，那本書裡隱藏了以二階行列式解二元一次聯立方程式的法則；卡丹諾只差一點點就要發現克拉瑪定律了。

當現代的學術圈發現卡丹諾、萊布尼茲和關孝和的早期思想時，行列式的知識已經完備了。所以，這些發現類似於「考古」的發掘，對於我們今日所知的知識架構，並沒有發生影響。

有些網路文件把行列式的「最早」發現歸功於中國漢朝的《九章》，我相信那是溢美之言。九章的確解了三元一次線性聯立方程式，但是所用的方法等價於高斯消去法，並不是行列式。