科學月刊【數・生活與學習】專欄 9907

「外積」從何而來？

單維彰・99 年 6 月 23 日

外積是個相當特別的計算規則；數學中很少像它這樣具有「針對性」的計算。在高中數學和大多數的工程數學、向量分析課程中，外積特指空間向量 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 和 $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 的一種計算，現在慣用的外積符號 $\vec{u}\times\vec{v}$ 是美國物理學家、數學家吉布斯 (Gibbs, 1839—1903)提倡的，因爲「×」符號稱爲 cross，所以外積又稱爲 cross product。而因爲兩向量的外積結果還是一個向量，所以外積也稱爲向量積。

雖然外積並不盡然僅限於空間向量（三個維度的向量），但是我們現在的確只關心三度空間中的外積，因此也就只介紹它在空間中的定義。在吉布斯那本影響深遠的向量分析《Vector Analysis》教科書裡（1881—84 年間寫成，在大學課堂與物理學者之間私下流傳，直到 1901 年由他的學生 Wilson 集結整理成書，正式出版），$\vec{u}\times\vec{v}$ 被定義爲向量 $\vec{a}$，其方向是 $\vec{u}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$ 依序符合「右手法則」的 uv 平面法向量，其長度是由 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 展成的平行四邊形面積；$\vec{u}$、$\vec{v}$ 之間所需的夾角指的是不超過 180° 的那個角。這是根據外積的幾何性質和物理意義所做的定義；現在許多教科書也從它的算法著手，寫出操作型的定義：

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

其中 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 依序是平行於 x 軸、y 軸、z 軸的單位向量：$\vec{i}=(1,0,0)$、$\vec{j}=(0,1,0)$、$\vec{k}=(0,0,1)$。所以，以上的操作型定義就是說 $\vec{u}\times\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)$，其中

$$a_1=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}、a_2=-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}、a_3=\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}。$$

以上那個以正方形格式將四個數寫在一對直線之間的物件，稱爲二階行列式，定義爲 $\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=ad-bc$，那是本欄上個月的歷史探討主題。

從操作型定義，不難想像外積的發現和行列式有關。外積的「形式」首次出現在 1773 年拉格朗日 (Lagrange, 1736—1813) 發表的論文裡，而它的內容的確與行列式有關。那篇論文探討的對象是三個不共面空間向量所圍成四面體（這是今天的術語，當時並沒有向量觀念），而他也知道那就是六分之一個上述三個向量展成的平行六面體。他首先用一個引理 (lemma) 探討空間中的平行四邊形面積。令 Ω 是空間中由 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 展成的平行四邊形，令 Ω_x、Ω_y、Ω_z 依序是 Ω 到三

個坐標平面：yz 平面、xz 平面、xy 平面的投影。不難想像，Ω_x 、Ω_y 、Ω_z 各是一個平行四邊形。爲了簡便，我們也用上述符號表示那些平行四邊形的面積，則 $\Omega^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2$ 。也就是說，**空間中的平行四邊形面積平方，等於它在三個坐標平面上投影的面積平方和**。讀者可以將此事實類比於畢氏定理，它就像是空間中的畢氏定理，闡述於下。

令 L 是平面上一個線段，L_x 、L_y 依序表示 L 在 x 軸和 y 軸上的投影。也用同樣的符號表示那些線段的長度。則其實把 L、L_x 、L_y 銜接在一起，就是一個直角三角形，所以 $L^2 = L_x^2 + L_y^2$ ：**平面上的直線段長度平方，等於它在兩個坐標軸上投影的長度平方和**。

1770 年代巴黎的數學圈正開始熟悉行列式，但是他們的研究都從線性聯立方程組出發，如上個月的專欄所述。當時拉格朗日在柏林，直到 1786 年才轉往巴黎，撰寫行列式歷史權威著作《The Theory of Determinants in the Historical Order of Development》的謬爾認爲當時的拉格朗日並不知道巴黎方面關於行列式的新發展，而獨立發現了二階行列式（之絕對值）就是兩平面向量展成的平行四邊形面積，而三階行列式（之絕對值）就是三空間向量展成的平行六面體體積。因爲Ω_x就是 yz 平面上(u_2,u_3)和(v_2,v_3)展成的平行四邊形，所以$\Omega_x = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ 的絕對值，同理可得Ω_y和Ω_z也是二階行列式，因此拉格朗日得到

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2$$

而他進一步計算，得到計算Ω^2的一個純「坐標」算法：不必經過夾角的正弦（也就是高中所說的面積公式）。用今天的符號來寫，就是$\Omega^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ ，其中$\vec{u}\cdot\vec{v}$是$\vec{u}$和$\vec{v}$的內積。學過三角和向量的高中生都知道，上式可以推論 $\Omega = |\vec{u}||\vec{v}||\sin\theta|$ ，其中θ是$\vec{u}$和$\vec{v}$的夾角。而 Gibbs 定義Ω就是$\vec{u}\times\vec{v}$的長度。

至於$\vec{u}\times\vec{v}$的方向，雖然拉格朗日並沒有所謂的向量觀念，可是他依然知道，若有第三個向量$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ ，則$\vec{w}$在$\vec{u}\times\vec{v}$方向的投影長就是以Ω爲底時，由$\vec{u}$ 、$\vec{v}$ 、$\vec{w}$展成之平行六面體的高。所以，他得到前述的體積是

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 \text{ 的絕對值。}$$

而上述的計算式，恰恰就是稍早 (1771 年) 范德蒙和拉普拉斯在巴黎提出的行列式之餘因子降階算法。所以，拉格朗日事實上得到了以下結論：

$$\vec{u} \text{、} \vec{v} \text{、} \vec{w} \text{圍成之四面體體積} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \text{的絕對值}$$

拉格朗日的時代並不需要規定右手法則，那是吉布斯的時代因為電磁學理論才發生的需求，可是拉格朗日顯然知道 $\vec{a}$ 垂直於 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 所展成的平面。至此，除了右手法則以外，向量外積的幾何性質和計算方法，也就是前述的幾何型定義和操作型定義，其實都已經具備了，只欠一個代數的形式而已。

內積和外積的線索，流傳半個世紀之後，讓漢彌爾頓和格拉斯曼不約而同地藉以發展他們的新代數系統，期望能在三度空間或者空間坐標系統上，造出一種能像實數或複數那樣做四則計算的數系，而演變成今天的向量分析與線性代數。那就是另一個故事了。