

# 素養導向課程設計

## 11年級數學分類課程

### 教學與實作 (1)

單維彰、蘇麗敏  
國立中央大學師資培育中心與數學系  
2019 高中數學種子教師研習  
民國108年1月17日

1

## 對數律

- ◆ 每個正數都是 10 的次方
- ◆ 對數律 就是指數律

$$ab = 10^{\log a} 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$$

$$ab = 10^{\log ab}$$

3

## 連結、連結、連結

- ◆ 數學課程的有機脈絡  
不是一塊一塊互不相干
- ◆ 連結 10 年級
- ◆ 主題間連結
- ◆ 跨領域連結

2

## 一般底對數：觀念記號

- ◆ 每個正數都是 2 的次方 ...
  - ◆ 計算機實驗確認，然後
- $$a = 10^{\log a} = 10^{\log 2 \cdot \frac{\log a}{\log 2}} = \left(10^{\log 2}\right)^{\frac{\log a}{\log 2}} = 2^{\frac{\log a}{\log 2}}$$
- ◆ 把  $\frac{\log a}{\log 2}$  簡記為  $\log_2 a$
  - ◆ 是觀念上的簡記，非計算上的需要
  - ◆ 目前天下人只用三種底 ...

4

## $y = 2^x$ 就是 $x = \log_2 y$

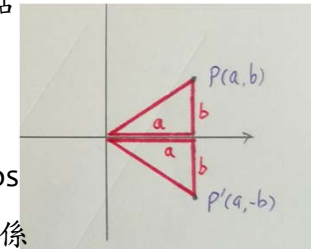
- ◆ 函數與方程式的形式互換
- ◆ 「沿著」 $y$  軸畫圖（確實練習）
- ◆ 往前連結  $x = -y + 1$
- ◆ 往後連結  $x = 4y^2$
- ◆ 連結 10 年級「坐標算法」

5

單維彰 · 11 年級分類課程 2019/01/7

## 基本對稱點的坐標算法

- ◆ 國中的全等三角形
- ◆ 邊長與坐標（象限）的轉換
- ◆ 三種基本對稱點  
連結函數圖形  
的對稱性；  
連結  $\sin$ 、 $\cos$   
負角、補角關係



7

單維彰 · 11 年級分類課程 2019/01/7

## 坐標算法：中學幾何的真貌

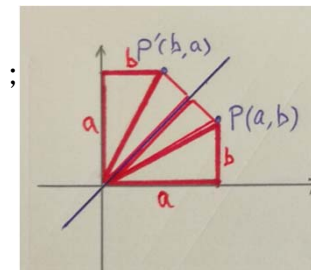
- ◆ 平面幾何到向量方法的中介
- ◆ 中學數學真正需要的幾何
- ◆ 關鍵技術：輔助（直角）三角形
- ◆ 統整複習國中幾何，提升視野
- ◆ 為向量鋪路；沒有向量符號的向量

6

單維彰 · 11 年級分類課程 2019/01/7

## 45° 對稱點的坐標算法

- ◆ 國中的全等三角形
- ◆ 一、三象限 vs 二、四象限
- ◆ 連結指對函數  
的圖形對稱性；  
連結  $\sin$ 、 $\cos$   
餘角關係



8

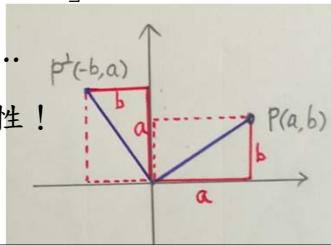
單維彰 · 11 年級分類課程 2019/01/7

## 繞原點旋轉 $90^\circ$ 的坐標算法

- ◆ 畫輔助長方形的效果夠好
- ◆ 再旋轉  $90^\circ$  連結對稱於原點

口訣「交換相反」

- ◆ 轉「回去」卻...
- ◆ 方向角的必需性!
- ◆  $P(1,0)$  之特例



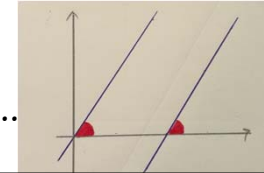
9

## 斜率：比例式的比值

- ◆ 輔助三角形的  $\tan$
- ◆ 斜率相同的兩直線平行
- ◆ 平行的兩直線斜率相同
- ◆ 所有直線都是過原點同斜率的平移

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} = m$$

假如有人擔心  $(0,0)$ ...



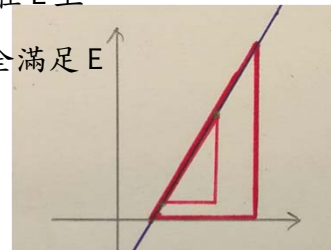
11

## 直線 $L$ 與二元一次方程式 $E$

- ◆ 坐標平面上兩點決定一直線  $L$
- ◆ 兩點坐標決定一方程式  $E$  (插值)
- ◆ 滿足  $E$  的點全在  $L$  上
- ◆  $L$  上的點坐標全滿足  $E$

比例式

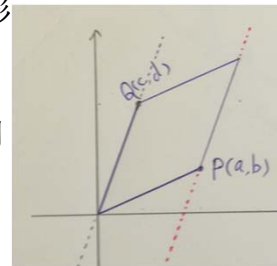
$$(y - k) : (x - h) = b : a$$



10

## 兩點「決定」的平行四邊形

- ◆ 給定兩點  $P(a,b)$   $Q(c,d)$
- ◆ 用  $\overline{OP}$   $\overline{OQ}$  作為兩邊的平行四邊形
- ◆ 國中的平行四邊形性質
- ◆ 「高」：平行線間的距離



12

### 平行四邊形面積的坐標算法

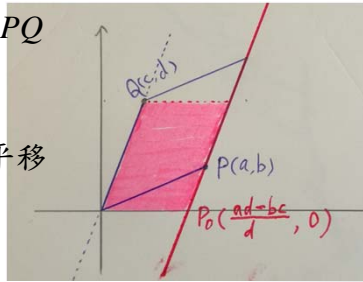
◆  $|ad - bc|$  簡記為  $|P, Q|$

口訣「交叉相減」

◆ 自動推論  $\Delta OPQ$

的面積

◆ 不用教就會平移



13

單維彰 · 11年級分類課程 2019/01/7

### 再現方向性的必要

◆  $(ad - bc)$  簡記為  $[P, Q]$

◆ 發現  $[P, Q] = -[Q, P]$

◆ 可理解但不 Care :

從  $\overline{OP}$  旋轉到  $\overline{OQ}$  是正 (劣) 角

◆ 心理困難：算出來再取絕對值即可，  
實務上不認為有必要釐清方向

15

單維彰 · 11年級分類課程 2019/01/7

### 壟中高一經驗

◆  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$  接受度低 (不需要也會做)

◆ 可推論  $d(P, L)$  可理解但

記不起來也不愛用

◆ 高一學生似難負荷  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$   
甚至不會代入  
(數學成熟度)

14

單維彰 · 11年級分類課程 2019/01/7

### 直到 12 月底 ...

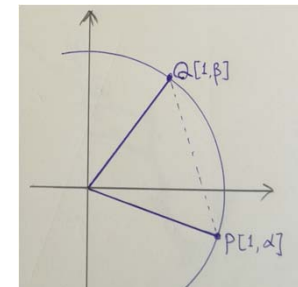
◆  $\sin$  差角公式 (面積思維)

$$\Delta OPQ = \frac{1}{2} \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} [P, Q]$$

◆ 教法：

把有向廣義角  
對應到數線上

(三角函數圖形前置經驗)



16

單維彰 · 11年級分類課程 2019/01/7

## 一點數學史

- ◆ 平行四邊形（三角形）面積的  
坐標算法與直角坐標系一同誕生  
求兩直線交點（約 1637-1659）
- ◆ Leibniz 在 1672 年從 Huygens 學  
導出三元一次方程的「克拉瑪公式」
- ◆ 克拉瑪 1750 發表論文，附錄中用  
「公式」解五元一次方程

17

單維彰 · 11 年級分類課程 2019/01/7

## 一點數學思維

- ◆ 行列式就是 Measure of Simplex
- ◆ 方向性是本質
- ◆ 降階和展開演算法是必要的  
而不是設計的

19

單維彰 · 11 年級分類課程 2019/01/7

## 「純」數學的行列式定義

- ◆ 骨子裡就是平行四邊形面積  
 $[e_1, e_2, \dots, e_n] = 1$   
若  $u_j = u_k$  則  $[... u_j ... u_k ...] = 0$   
 $[... cu_k ...] = c [... u_k ...]$   
 $[... u_k + v_k ...] = [... u_k ...] + [... v_k ...]$
- ◆ 可推論  $[... u_j ... u_k ...] = - [... u_k ... u_j ...]$
- ◆ 可推論降階公式、展開公式

18

單維彰 · 11 年級分類課程 2019/01/7

## 識：11 年級何需二元方程組？

- ◆ 發展新概念：線性組合
- ◆ 引進新符號（直式）  
$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$
- ◆ 從線性組合到線性變換（方程到方程式）  
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

20

單維彰 · 11 年級分類課程 2019/01/7

## 識：普高階段的矩陣

- ◆ 作為線性組合的記號
- ◆ 作為線性變換的記號
- ◆ 作為資料表格的物件

(離散數學、科學與統計計算)

- ◆ 克拉瑪公式沒有發展價值
- ◆ 反方陣可有可無(不用來求解)
- ◆ 矩陣本身的代數不是高中階段教學目標

21

有請  
蘇麗敏老師

To be Continued ...

22