帶領高一學生認識秦九韶的方程解法

單維彰・民國 106 年 10 月 23 日、109 年 11 月 6 日

在「zh.wikipedia.org/wiki/秦九韶算法」網頁裡面，藉以下四次方程為例，說明秦九韶的求解方法：

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$

關於秦九韶是何許人？可以輕易從網路查得初步資訊。如果想要獲得進一步的歷史評述，可以讀《數學傳播》的一篇文章 [1]；而目前最權威的文集，可能是中國吳文俊院士主編的「大系」[2]。本文作者要感謝建國中學林信安老師引起這個主題，本文的主旨是說明高中一年級的數學課程可以連結「秦九韶算法」，而高一學生有機會完整理解這個算法。

秦九韶算法的基本概念是勘根定理。令

$$f(x)=-x^4+763200x^2-40642560000$$

是以上述四次方程之中的四次多項式所定義的函數，因為 $f(800)>0$ 而 $f(900)<0$，所以判定原題有一個百位數為 800 的根。這裡有三件闡述：

(1) 雖然 108 課綱將勘根定理的正式教學移到了數甲，但是學生可以跟秦九韶一樣地從直覺認識勘根定理。既然當 x 從 800 變化到 900 時，多項式的值從正降到負，則想必有一個介於 800 和 900 之間的 x，使得 $f(x)=0$。

(2) 一般的計算機可能無法計算 $f(800)$ 和 $f(900)$，這裡反而筆算較為實際。而聰明的筆算，不是直接代入，而是綜合除法。（綜合除法的過程中，可以用計算機協助。）

(3) 根據「大域」的思考方法，可觀察當 x 超過 1000 則多項式的值恆負，所以不會有超過 1000 的根。

秦九韶算法的基本技術是綜合除法。前面求 $f(800)$ 和 $f(900)$ 的程序，都是用綜合除法。顯然秦九韶已經明白餘式定理。這個部分可能不是秦九韶的獨步技術，而是當時中國的疇人普遍知道的算法。至於綜合除法的確切起源，還需拜讀數學史的研究。

秦九韶算法的關鍵思想，是將方程中的多項式，從標準式改寫為 $(x-800)$ 的多項式。他想，既然原方程的根 x 介於 800 和 900 之間，那麼改寫為 $(x-800)$ 的方程之後，它的根就應該不到 100。以十進位數值的觀念來看，也就是說前面的「勘根」已經確定原方程的解的百位數為 8，改寫為 $(x-800)$ 的方程之後，就可以「堪」十位數的「根」了。

而秦九韶將標準式改寫為 $(x-800)$ 多項式的方法，就是高中老師們都知道的「連續綜合除法」。將原方程轉換為 $(x-800)$ 的多項式等式之後，就是

$$38205440000-826880000(x-800)-3076800(x-800)^2$$
$$-3200(x-800)^3-(x-800)^4=0$$

作 $x \mapsto x-800$ 的代換之後，令

$$f_1(x)=-x^4-3200x^3-3076800x^2-826880000x+38205440000$$

則 $f_1(x)=0$ 的根必定不到 100，現在用它來勘根原方程之十位數解：用綜合除法求 $f_1(10)$ 、 $f_1(20)$ 、...發現恰好 $f_1(40)=0$ 。所以 840 就是原方程的一個解。

顯然這是秦九韶精心設計的題目，使得十位數就恰好得到真解。但是這兩個步驟已經足夠了，依此類推，可以獲得任何一位的近似解。如果在十位數沒有恰好得到真解，則 $f_1(0)$ 、 $f_1(10)$ 、 $f_1(20)$ 、...、 $f_1(90)$ 、 $f_1(100)$ 之間必定有變號，其中 $f_1(0)=f(800)$ 而 $f_1(100)=f(900)$ 不必重新算。如此就能獲得原方程之解的十位數。譬如若 $f_1(40)>0$ 、 $f_1(50)<0$ 則原方程的解是 $84*.\ldots$ 。然後，重複以上的想法，做 $x \mapsto x-40$ 代換，就能繼續算出解的個位數。當時的人們還沒有小數概念，但是我們可以理解，秦九韶算法可以依樣畫葫蘆地繼續做解的十分位數、百分位數、千分位數...，直到「遇到」真解，或者近似值已經足夠精確為止。

在學生們理解秦九韶算法之後，應該要想到：顯然 $f(0)<0$，而既然 $f(800)>0$ ，其實原方程在 0 與 800 之間還有一個解。這是秦九韶留下的習題，請學生按照以上步驟，求出另一個解。

如果運用「高」一點的數學，則更容易求出「另一個解」。觀察 $f(x)$ 是個偶函數，所以 -840 必定是原方程的一個負根。因此 $(x-840)(x+840)$ 是 $f(x)$ 的一個二次因式。做多項式除法之後，得到的商是二次多項式，而它的根可以用公式求得；所得的正根就是秦九韶習題的「另一個解」。

108 課綱的高一多項式課程並不著重於方程求解，而著重於多項式函數的相關性質。何況如今電腦軟體可以輕易求得多項式的所有根（包括虛根），所以本文所舉的連結，主要是歷史的趣味，以及加強「連續綜合除法」和「$(x-a)$ 多項式」的連結，並不需要學生根據秦九韶算法，做更多的練習。

秦九韶算法的精神是「近似解」，而不是同時期阿拉伯人和歐洲人追求的「真解」。西方人要到十七世紀牛頓的時代，才開始考慮「近似解」。例如我們將會在高三選修課遇到求近似解的「牛頓法」。可是，牛頓的關鍵想法是切線的應用，而秦九韶是多項式除法的應用；牛頓法能對付任何可微函數，秦九韶算法只能對付多項式函數。所以，這兩種算法，不宜相提並論。

最後要說，秦九韶的「代換」其實就是把「x 多項式」轉換成「$(x-a)$ 多項式」，

後者有時候被稱為「泰勒形式」或者「泰勒多項式」，因為它是微積分「泰勒展開」的特例。可是，當秦九韶這麼做的時候，那位泰勒先生（Brook Taylor，1685—1731）還要再過 400 多年才會出生。所以，也許稱它「秦九形式」還比較恰當一點。

在前面「zh.wikipedia.org/wiki/秦九韶算法」網頁裡，大家看到頁面上出現一些「算籌」的操作動畫。算籌是當時的計算輔具，就像後來的算盤一樣。因為算籌是用手抓來抓去的，所以「籌算」常是一系列的動作，走過不留痕跡。「綜合除法」的操作程序，就像數學「化石」一般，保存著籌算的古老基因。請看作者提供的教學影片 [3]。

如果改用阿拉伯人求「真解」的方法：配方，則可看出原方程是一個「偽」四次方程，其實它是 x^2 的二次方程。原式可配方為

$$-x^4+763200x^2-40642560000=-(x^2-381600)^2+104976000000=0$$

中國古代就有開方術，讀者努力一點亦可發現 $104976=4^2\cdot 9^4$，故

$$x^2-381600=\pm 4\cdot 9^2\cdot 1000=\pm 324000，$$

所以 $x^2=705600$ 或 57600，再開方一次就得到四個解了。

延伸閱讀或參考文獻

[1] 蔡辰理[1]，中國數學史上的黃金時代及其四個偉大的數學家〈數學傳播〉第 3 卷第 2 期（民 67 年 11 月），37—43。

[2] 吳文俊主編，《中國數學史大系》[2]，北京師範大學出版社，2000。

[3] 單維彰，綜合除法，www.youtube.com/watch?v=28zj2-L9Zhw，2015。

[1] 蔡辰理是蔡仁堅先生的筆名，此篇文章經過李國偉教授的審訂與潤飾。

[2] 特別是第五卷「兩宋」以及第六卷「西夏金元明」（由李迪擔任此卷主編）。