

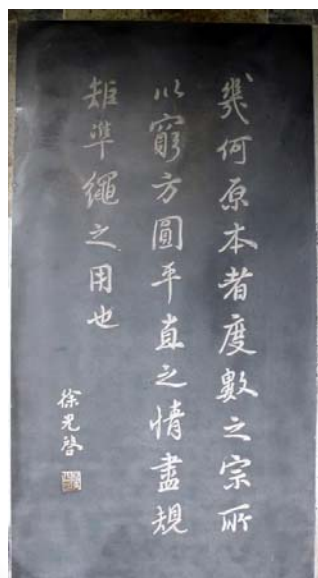
台北市立大學  
數據科學與數學教育碩士班

# 數與量 原理與商榷

單維彰

國立中央大學數學系  
師資培育中心、文學院學士班

民國 112 年 4 月 20 日




幾何原本者，  
度數之宗。

徐光啟〈幾何原本序〉  
1607

單維彰 · 數與量 · 2023/04/20

[ 2 ]



◆ 幾何、若干：有多少？

對酒當歌  
人生幾何  
譬如朝露  
去日苦多

◆ Geometria：測量之學

◆ 幾何原本 ≡ 基礎數學

單維彰 · 數與量 2023/04/20

3

## 度與數 ≡ 數與量

◆ 度：Quantities

- 測量連續量所得的數 (measuring)
- 如今就是實數

◆ 數：Numbers

- 點數離散量所得的數 (counting)
- 正整數及兩數之比

單維彰 · 數與量 2023/04/20

4

# 華人善算

但似有保鮮期

單維彰 · 數與量 · 2023/04/20

[ 5 ]

# 華語特別適算

## ◆ 語言對應數值

- 語音如數碼
- 語言本身就是十進位

## ◆ 也很適合記憶

- 九九表
- 圓周率 vs The ratio of ...
- N 邊形 vs quad-/penta-/hexa-...

單維彰 · 數與量 · 2023/04/20

[ 6 ]

中文	日文	韓文 (古代*)	韓文 (漢化*)	英文	法文	西文	德文
零	れい/ゼロ	×	영/공	zero	zéro	cero	null
一	いち	하나	일	one	un*	uno*	eins*
二	に	둘	이	two	deux	dos	zwei
三	さん	셋	삼	three	trois	tres	drei
四	よん/し	넷	사	four	quatre	cuatro	vier
五	ご	다섯	오	five	cinq	cinco	fünf
六	ろく	여섯	육	six	six	seis	sechs
七	なな/しち	일곱	칠	seven	sept	siete	sieben
八	はち	여덟	팔	eight	huit	ocho	acht
九	きゅう/く	아홉	구	nine	neuf	nueve	neun
十	じゅう	열	십	ten	dix	diez	zehn

陳文暉 (2014) 數詞語言學小論。

單維彰 · 數與量 · 2023/04/20

{ 7 }

## 西方數詞

- ◆ 英德 11 12、西 15、法 16
- ◆ 英語 13-19 vs 21-99
- ◆ 西語 21-29 vs 31-99
- ◆ 法語 70 80 90 無字



60+10 4.20 4.20+10



單維彰 · 數與量 · 2023/04/20



{ 8 }



**DIFFERENZE LINGUISTICHE**



**97**

   $90 + 7$

   $7 + 90$

   $9 \times 10 + 7$

   $4 \times 20 + 10 + 7$

   $7 + (-\frac{1}{2} + 5) \times 20$

**97**

丹麥語  
**Halvfemsindstye**  
fem 是五  
sind 是無  
tyve 是廿

單維彰 · 數與量 2023/04/20

[ 9 ]

**華語數詞就是教具**

- ◆ 華人兒童可能不太需要十進教具
- ◆ 花片與百數板
  - 有充分的證據
  - 有沒有必要的證據？

單維彰 · 數與量 2023/04/20

[ 10 ]

# 數字分節

小事卻可能大影響

單維彰 · 數與量 · 2023/04/20

[ 11 ]

# 華語四位一節

- ◆ 234,7000 vs 23,470,000
- ◆ 新加坡華語
  - 二十三百萬
  - 四百七十千
- ◆ 無礙會計金融專業

單維彰 · 數與量 · 2023/04/20

[ 12 ]

# 九章啟示錄

單維彰 · 數與量 · 2023/04/20

[ 13 ]

# 方田與商功

算法幾何 VS 推理幾何

單維彰 · 數與量 · 2023/04/20

[ 14 ]

## 《九章》1：方田

### ◆ 面積公式


- 基本是為土地丈量
- 圓面積 = 半徑與半周之積
- 真正關鍵的是圓周率

## 十進小數誕生

〔祖沖之以丈為徑，〕圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。

《隋書律曆志》





臺灣丈單

光緒十五年

陸厘肆毫玖絲

臺布政使司

單維彰 · 數與量 2023/04/20

17

分衰

不均的分配

單維彰 · 數與量 2023/04/20

18

## 《九章》3：衰分

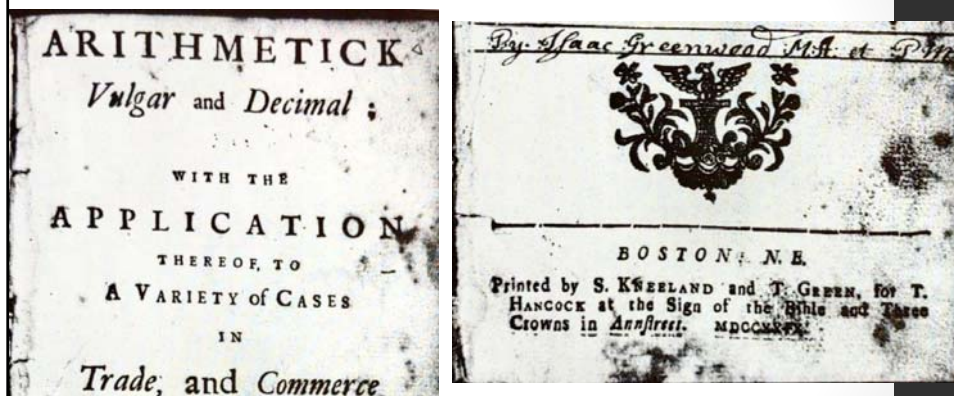
- ◆ 按比例分配
  - 包括正比與反比
  - 多達五項比
- ◆ 分數四則運算的必要
  - 可得真解，如何執行？

$$8\frac{104}{137} \text{ 錢}$$

## 不盡除的處置

- ◆ 讓它剩下
  - $22 \div 7 = 3 \dots 1$  並非等式
  - 什麼時候適合教等式？
- ◆ 記錄零頭：fractions
  - 18 世紀：vulgar / decimal fractions
  - 20 世紀美國：common fractions
  - 1980 後：fractions / decimals

## 十進小數 vs 日常分數



小數是「標準規格化」的分數。

21

## 分數與小數

- ◆ 本是同根生
  - 小數是特殊分數
  - $\frac{1}{3} + 0.3$  該做小數還是分數運算？
- ◆ 小數都是帶分數  
分數也該如此  
(假分數僅用於計算步驟)

單維彰 · 數與量 · 2023/04/20

22

## 分數小數誰實用？

### ◆ 由工具決定

- 英吋刻度尺： $2\frac{3}{8}$  吋比 2.375 方便
- 台斤槓桿秤： $1\frac{5}{16}$  斤比 1.3125 方便
- 若有對應的十進貨幣：

$$8\frac{104}{137} \text{ 錢} \approx 8 \text{ 錢 } 7 \text{ 分 } 5 \text{ 厘 } 9 \text{ 毫 } 1 \text{ 絲 } 2 \text{ 忽} \dots$$

(若 1 錢 = 10000 元...)

## 晚清臺灣 房屋稅

同治二年  
壹錢參分肆厘  
零毫捌絲貳忽



## 法國創造公制

- ◆ 就是希望以十進制「標準化」度量衡
- ◆ 英國偏不要，純屬意氣
- ◆ 不宜有...

$\frac{6}{7}$  公里     $\frac{11}{4}$  公斤     $\frac{5}{21}$  公升

## 方程

方形排列的計算程序

## 《九章》8：方程

- ◆ 二／三元一次聯立式
- ◆ 分離係數
  - 工具使然：籌算，無處寫未知數
  - 本質是「增廣矩陣」
  - 加減消去→高斯消去法
- ◆ 數，而非量

單維彰·數與量 2023/04/20

[ 27 ]

## 《九章》8：方程

- ◆ 負數誕生
  - 式中有減，分離成負
  - 紅籌為正黑籌為負，或邪正為異
  - 但只求正解（直到牛頓仍是）

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 3 & -2 & 15 \end{pmatrix}$$

單維彰·數與量 2023/04/20

[ 28 ]

## 負數之用

- ◆ 生活、科學、社會  
很少「真的」需要負數
- ◆ 純數學所需（完整性）
- ◆ 有助於程式設計

## 少廣

開方的推廣

## 《九章》4：少廣

### ◆ 開方

- 平方根的近似解
- 立方根的概數
- 原本求解  $x^2 = c$   
從第二步起「帶從」： $x^2 + bx = c$

## 電算器



## 使用工具的素養

- ◆ 日本小學生必學珠算
- ◆ 民62去珠算而未改電算
- ◆ 分數：表達 vs 運算
- ◆ 分數：近似小數
- ◆ 精確度

<https://shann.idv.tw/calc/>

# The End