

教育部國教署高中數學學科中心  
MTS 2022 全國高中數學教師教學研討會

# 高中數學課程 發展脈絡與建議

單維彰

國立中央大學數學系  
師資培育中心、文學院學士班

民國111年11月5日

## 不感矛盾嗎？

- ◆ 批評不善創新，都說
  - 西方重理論
  - 華人只顧實用
- ◆ 但檢視數學課程，卻見
  - 西方課程實用而素養
  - 臺灣課程偏向學科本位  
而且多的是「謎題」式評量

# 我不過是想 弄清原委

李宗盛〈給自己的歌〉

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

{ 3 }

## 縱向脈絡—中算

- ◆ 從九章到算法統宗
  - ◆ 幾何原本與崇禎曆書
  - ◆ 梅文鼎祖孫與談天三友
  - ◆ 李善蘭與華蘅芳
- 
- ◆ 從甲午到1945
  - ◆ 從光復到1962
  - ◆ 從51修標到99課綱

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

{ 4 }

## 以考試立國——科舉

- ◆ 從隋唐到 1902 張鎮華
- ◆ 余英時：  
科舉是政治制度，不是教育制度
- ◆ 考試院，而非教育部
- ◆ 考試為政治，不為學習
- ◆ 科舉遺緒涵蓋教育

## 縱向脈絡——中等教育

- ◆ 耶穌會羅馬學院中學雛形
- ◆ 夸美紐斯等經典關注初教
- ◆ 普魯士首創教育制度〔高斯〕
- ◆ 英國學者開始批判〔布爾〕  
「紋飾炫耀之學」
- ◆ 美國探索新途〔1890—〕
- ◆ 歐洲再論述〔1990—〕

# 數學與自然哲學史

- ◆ 古希臘經阿拉伯到歐洲
- ◆ 亞里斯多德到哥白尼前
- ◆ 哥白尼到牛頓
- ◆ 歐拉、高斯、柯西
- ◆ 康托、凱萊、勒貝格
- ◆ 機率、統計、電子計算機

# 橫向比較

- ◆ 中日韓  
星港  
美英德
- ◆ 課綱、  
教材、  
試題

Since 2003



西算也講實用  
中算也有純數

西方數學教育  
也曾不講實際  
但人家持續在改  
我們變革較慢

$$\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} \cdot \sin \frac{5\pi}{7}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3} + 4.2\right) \div \left(.125 \times \frac{5}{2}\right)}{.375 \times \left(\frac{3}{5} - .16\frac{2}{3}\right)}$$

為什麼變革較慢？

因為**考試**  
是原因也是目的  
而社會並無  
教育目標論述

因此  
學校+**考試**  
形成自給自足的  
動態封閉系統

# 「盡量具體」

曾政清 2022-10-26

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

[ 13 ]

## 自我革新的樞紐：

# 微積分

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

[ 14 ]

## 國際考察

- ◆ 日韓港德：11年級起融入
- ◆ 英星：大學預科概念
- ◆ 美：選修式 AP 課程



## 外部動機

- ◆ 不為準備大一微積分
- ◆ 卻為銜接大一專業課程
  - 物理、化學、統計、經濟學
  - 大學教材嚴重「美化」

高晟鈞(2009)

## 內部動機

- ◆ 高中數學注入活水
- ◆ 大概念與真實應用的泉源
- ◆ 不適內容的自然讓位
  - 稍後再議

## 支持理由

- ◆ 高中同仁容易上手
- ◆ 本就伴隨坐標幾何而生
- ◆ 函數本就伴隨而生
- ◆ 自然銜接現有課程
  - 迭代的綜合除法
  - 108 課綱已有伏筆

「先讓老師們習慣，下次再提。」

蘇麗敏 2014-11-07

## 坐標幾何 → 微積分

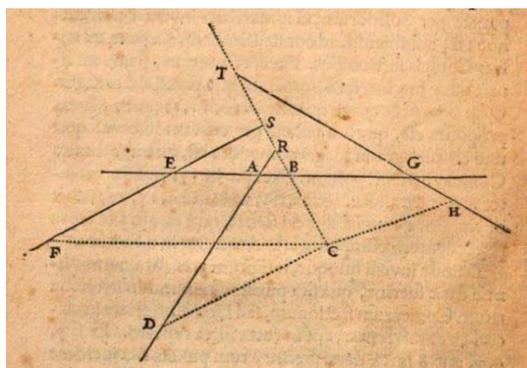
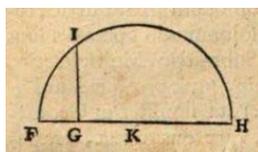
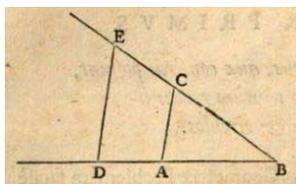


坐標幾何出版於1637。



數學原理出版於1687。

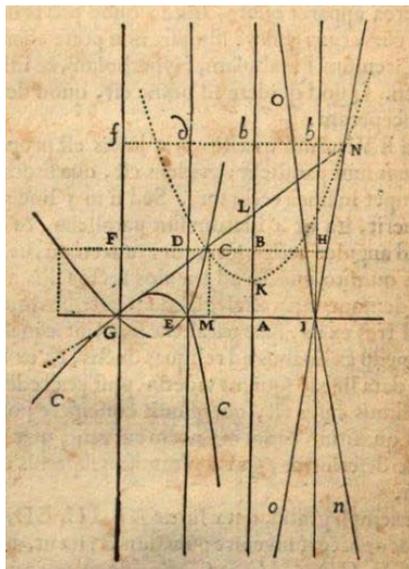
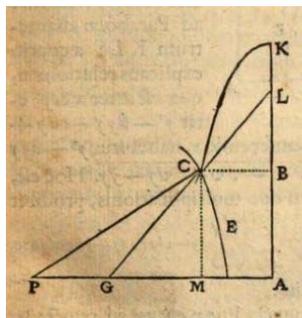
### 但是笛卡耳只用一條水平數線



單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

[ 21 ]

### 有需要時輔以鉛直線



單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

[ 22 ]

## Frans van Schooten (1615—60)

荷  
蘭  
萊  
登



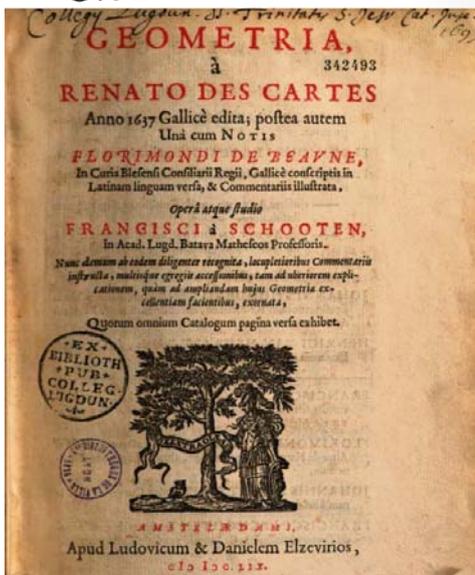
林  
布  
蘭  
作  
品  
229

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

23

## 施豪登的文化遺產

- ◆ 1649：拉丁文  
譯本
- ◆ 1659—61：  
拉丁文注
- ◆ 教出惠更斯



單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

24



# Naïve Calculus

- ◆ 牛頓、萊布尼茲固然是天才 ...

他倆的微積分能有多難？

- ◆ 高中一年級的知識背景
  - 直角坐標的基本方法
  - 直線點斜式
  - 多項式函數、多項式除法

# Lagrange Approach

- ◆ 以泰勒展開作為微積分的基礎
- ◆ 輸給柯西  
未成主流
- ◆ 仍有教育價值  
特別因為我們有秦九韶



# 綜合除法一

求解  $x^3 = 2$   
 一般式  $x^3 - 2 = 0$   
 顯然  $1 < x < 2$ , 從  $x$  扣 1

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 0 & -2 & \ll \\ & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & \\ & 1 & 2 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & & \\ & 1 & & & \\ \hline 1 & 3 & & & \end{array}$$

$(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 = 0$  **老九變換**

令  $(x-1) \rightarrow \frac{x}{10}$

$x^3 + 30x^2 + 300x - 1000 = 0$

—— 求解十分位 ——

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

[ 29 ]

# 綜合除法二

$x$  顯然超過 1, 從 2 開始

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 30 & 300 & -1000 & \lfloor 2 \\ & 2 & 64 & 128 & \\ \hline 1 & 32 & 364 & -872 & \\ & 3 & 99 & 1197 & \lfloor 3 \\ \hline 1 & 33 & 399 & -755 & \\ & 4 & 132 & 197 & \\ \hline 1 & 34 & 432 & -558 & \\ & 5 & 171 & 36 & \\ \hline 1 & 35 & 467 & -522 & \\ & 6 & 210 & 72 & \\ \hline 1 & 36 & 498 & -450 & \\ & 7 & 252 & 126 & \\ \hline 1 & 37 & 535 & -324 & \\ & 8 & 288 & 216 & \\ \hline 1 & 38 & 573 & -108 & \\ & 9 & 324 & 324 & \\ \hline 1 & 39 & 612 & 0 & \end{array}$$

故知  $2 < x < 3$ , 從  $x$  扣 2  
 繼續做 - - - - -  $\lfloor 2$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 68 & \\ \hline 1 & 34 & 432 \\ & 1 & 36 & \\ \hline 1 & 35 & 468 & \end{array}$$

**老九變換**

$(x-2)^3 + 36(x-2)^2 + 432(x-2) - 272 = 0$

$x^3 + 36x^2 + 43200x - 272000 = 0$

——  $\sqrt[3]{2} = 1.2 \dots$  由  $x$  求百分位 ——

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

[ 30 ]

## 多項式 $f(x)$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

- ◆ 基本公式  $[x^n]' = nx^{n-1}$
- ◆ 係數積與加減（線性）
- ◆ 乘法律
- ◆ 除法律（有理函數）
- ◆ 連鎖律

## 接回主流

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + a_2(x-a) + \dots$$

- ◆ 想要代入  $x = a$
- ◆ 成為  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  合理動機
- ◆ 當  $f(x)$  是三角、指對函數  
合理引進逼近意涵

## 誰讓位？

- ◆ 多項式學習目標轉向函數
- ◆ 函數轉向數學模型
- ◆ 適度三角、適量對數
- ◆ 過早的空間向量幾何
  - 英美日星港無，德/民51在12年級
  - 為向量分析、3D技術作準備

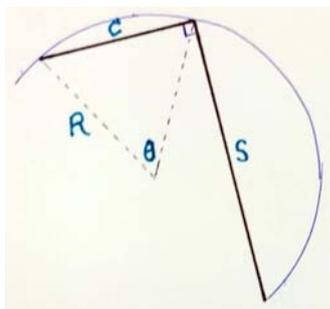
## 讓給誰？

- ◆ 線性代數準備不足
  - 資料科學
  - 離散數學
  - 演算法、數值方法
- ◆ 統計準備不足
- ◆ 慢慢商量，但要商量

# 附錄

為何只有  
三個三角？

## 弧與弦的對應觀念



$\theta$  : 圓心角  
 所對弦長  $c = \text{crd } \theta$   
 輔助(補)弦  $s$   
 倍角、和差需輔助弦  
 但三倍角不必：

$$\text{crd}(3\theta) = 3\text{crd } \theta - \text{crd}^3 \theta$$

托勒密不知，伊斯蘭成就

## 阿拉伯融合發展

- ◆ 從印度學來「半弦」 $\sin$

$$\text{crd } \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

- ◆ 發展出 12 個「三角比」  
 單位圓上出 12 條線段長



## 課綱規範大考 ※

- ◆ 教師可補充，但請確認
  - 學生受得了
  - 掌握補充的理由
- ◆ 也許改為數甲的 ※

## 西算務實一例

# crd $\theta$ 有公式嗎？

## 其實沒有！

(直到牛頓...)

# 希臘數學顧實用

Arcū		Chordarum	
partes	in	partes	in
0	Jo	0	32 21
1	o	1	2 50
1	Jo	1	34 15
2	o	2	5 40
2	Jo	2	37 4
3	o	3	8 28
3	Jo	3	39 52
4	o	4	11 16
4	Jo	4	41 40
5	o	5	14 4
5	Jo	5	43 17
6	o	6	16 49
6	Jo	6	44 11
7	o	7	19 33
7	Jo	7	45 54
8	o	8	22 15
8	Jo	8	47 31
9	o	9	24 54
9	Jo	9	48 13
10	o	10	27 32
10	Jo	10	49 49
11	o	11	30 5
11	Jo	11	51 21
12	o	12	32 36

## 還有什麼比 做表更實用？

某人很辛苦地算一遍，  
開放答案讓大家抄，  
以後只要查表即可。

理論是後來的！

## 食髓知味

- ◆ 阿拉伯發現了積化和差

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

- ◆ 查表可使乘法變成加減
- ◆ 後來想到指數律更好用
- ◆ 故計重施：對數表（為實用）

## 對數的「代數」

- ◆ 真的不必這麼多
- ◆ 前世僅為加速計算
- ◆ 今生
  - 指數方程的解
  - 代數函數的反導函數
  - 緩慢增加的模型

「未來如何，不能知道」

# 中算純數一例

單維彰 · 中數課程脈絡 2022/11/05

[ 47 ]

## 高次方程是純數學

- ◆ 高次方程當年並無需求
- ◆ 秦九韶示範10次方程
- ◆ 雖無變數，仍可平移
- ◆ 但無坐標幾何的契機

單維彰 · 中數課程脈絡 2022/11/05

[ 48 ]

# 角色演化再一例

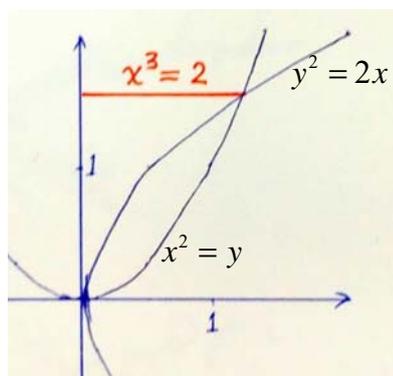
## 拋物線前世今生

(蘇惠玉)

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

[ 49 ]

倍立方： $(xa)(xb)(xc) = 2abc$



$$x^3 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

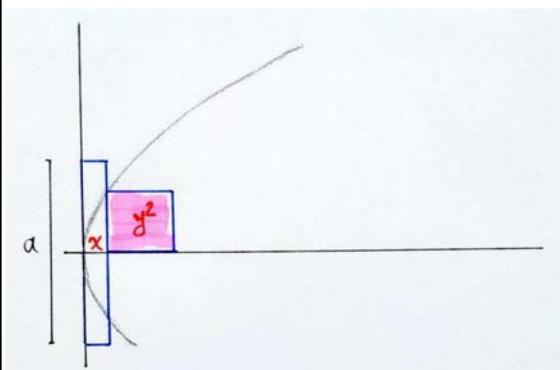
明明是人間所需，希臘卻託鬼神。因為...

希臘人自以為幾何作圖所得的解無誤差，是神要的真解。

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

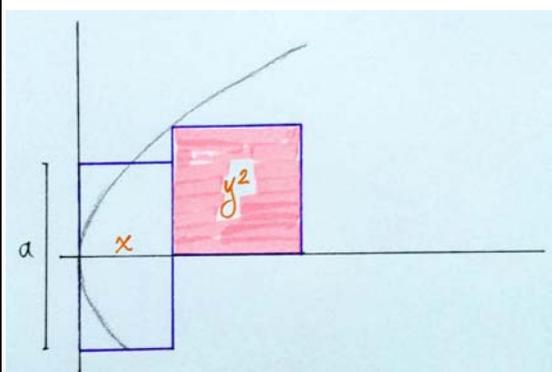
[ 50 ]

## Locus / 軌跡



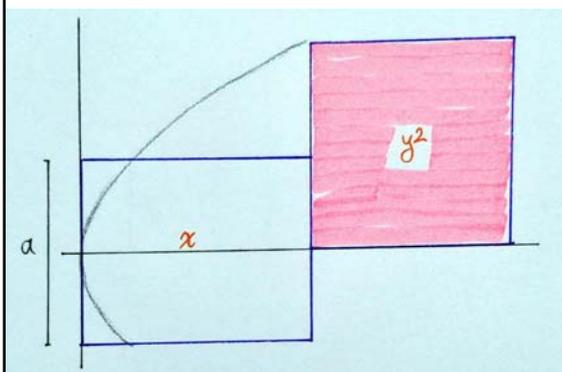
符合  $y^2 = ax$   
 的點集合，  
 非尺規作圖  
 可及者。

## 百年後命名 Parabola



Apollonius  
 (240BC-190BC)  
 發現那個軌  
 跡是圓錐截  
 痕。

# Parabola：併立線

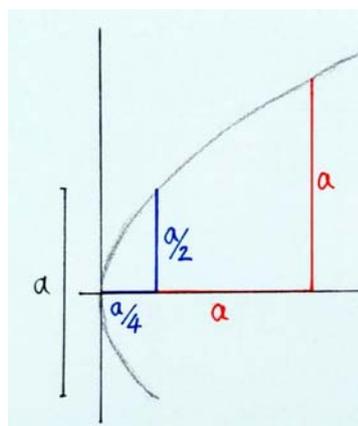


Para: 併立、可排比對照的。指正方形  $y^2$  與長方形  $ax$  的恰好相等。

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

[ 53 ]

# 還是叫它平方線吧



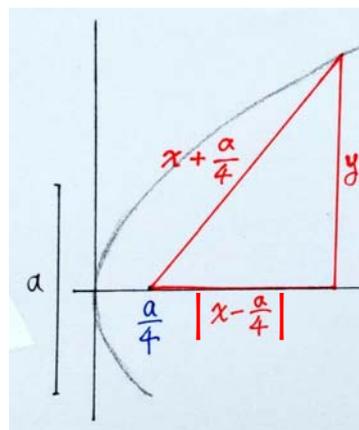
兩組明顯特例。其中一組如今稱為正焦弦，但是當年還沒有準線，也沒有光學性質，當然沒有焦點。

latus rectum: 豎邊

單維彰 · 中學課程脈絡 2022/11/05

[ 54 ]

## 再100年發現準線性質



Pappus (290-350)

最後的  
希臘數學大師

光學性質還要  
500年，拋射物  
還要再500年。

## Parabola 到 中國

- ◆ 「太聰明」的翻譯
  - 1850 咸豐年間
  - 李善蘭+偉烈亞力《代微積拾級》
- ◆ 教學可以有後見之明
  - 但是脈絡宜避免紊亂
  - 國中的平面幾何其患尤甚

The End