單純談虛數

既不虛也不幻，漫談實數王國裡的異鄉客。

撰文／單維彰

在〈虛數是想像出來的嗎？〉這篇文章中，作者表示某些科學家認為，站在物理的立場來看，使用複數只是為了數學演算的方便，但作者並不認為如此。文章說明了他們設計的想像實驗（gedankenexperiment，thought experiment），可以用來論證虛數是量子理論的本質成份，而不僅是提供計算方便的工具。但他們也聲明這項結果的意義是：如果拋棄虛數，則量子論將失去部份預測能力（predictive power）；他們無意討論虛數是否「存在」（exist）的問題。我猜想，一部份數學家可能對這個想像實驗表示歡迎，但肯定有頗多數學家認為那是物理的事，而不置可否。站在數學立場，虛數是真實存在的數學物件（mathematical object）。

虛數的英文是 imaginary number（或者該說，它的法文是 imaginaire），意思是「想像的數」。在數學中，想像的物件太多了，它們在數學研究者的心裡都是真實的。但是，就如〈虛數是想像出來的嗎？〉的作者無意討論「存在」，本文也無意討論「真實」——不論是在 reality 還是 truth 的意義之下。本文希望產生的影響是：邀請讀者理解虛數這個物件在數學中的角色，最後也談一下數學在自然科學中的有效性。

所謂虛數是指 bi 這種形式的數，它是 $b\times i$ 的縮寫，其中 b 是「普通的數」（自從有了虛數之後，它們就相對地稱為實數了），而 i 稱為虛數單位。所謂複數是指 $a+bi$ 這種形式的數，其中 a 是實數。在 108 課綱之前，學生都在高中一年級透過二次方程的複數解而學習了虛數：虛數使得負數可以開根號，例如 $\sqrt{-4}=2i$；但是在 108 年之後，就只有選修高三「數學甲」的普通高中畢業生，以及必修「數學 C」的技術型高中畢業生才學過虛數，導致許多國民沒有機會在學校裡習得虛數；這其實是違背「國民素養」教育理念的，但是課綱設計者有他們的苦衷，不得不做此痛苦的抉擇。

〈虛數是想像出來的嗎？〉勾勒了虛數在 16 世紀的發生史（大約 1520～1572 年之間發生在義大利與法國），值得注意的是：虛數並不是為二次方程而生的，而是為三次方程。所謂三次方程是指三次多項式等式 $x^3+bx^2+cx+d=0$，其中 b、c、d 均為實數。三次或更高次方程求解的問題，展現出古人思考純數學的興趣。在中國，解題的進路採用綜合除法做數值解，而三次方程一定有解（高中生知道三次多項式函數必有一實根），所以沒機會遇到虛數。

> 一般的三次多項式應該是 ax^3+bx^2+cx+d，其中 a、b、c、d 均為實數且 $a\neq 0$。當它寫成等式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$時，可以通除以 a 而化簡為 $x^3+bx^2+cx+d=0$。108 課綱之後的普通高中學生學過「配三方」或「泰勒轉換」技巧，可以「消滅二次項」，所以又能化簡為 $x^3+px+q=0$ 的形式。

在伊斯蘭以及後來的歐洲，則試圖找到公式，就好像高中生都會背的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解 $2a$ 分之 $-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$。到了 16世紀，開始有義大利人找到公式，直到邦貝利而完備。三次方程的公式解需要 A、B 兩個步驟，其中步驟 A 需要開根號，歐洲人就在這裡遇到負數開根號的需求；因為三次方程必有一解，所以即使步驟 A 需要對負數開根號，步驟 B 還是可以繼續執行求出一解（實數的解）；邦貝利因為完整解釋這些計算程序，而被尊稱為複數的發明人（或發現者）。

> 16 世紀的義大利數學家會配三方，但不習慣處理負數，且不接受負數解，所以只討論 $x^3=px+q$、$x^3+px=q$ 這些形式的三次方程，其中 p、q 皆為正數。網路上相關資料都顯示這樣的等式。但是邦貝利善於處理負數，他的書同時介紹了正負數和複數的計算規則，所以他討論的形式是 $x^3=px+q$ 而不限 p、q 為正數。

就好像〈虛數是想像出來的嗎？〉說，有些科學家認為虛數是量子論的計算技巧而非本質，早年也有人認為虛數是求解三次方程的計算技巧，而非本質。但是，後來有坐標幾何，三次方程 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 解的觀念轉化成三次多項式函數 $y=x^3+bx^2+cx+d$ 根的觀念。到19世紀，數學知識發展到：三次多項式必有一根或三根（這裡是指實數根，而且包含重根次數）。這時候看到：假如步驟A出現虛數（需對負數開根號），則多項式有三個根，假如步驟A不需對負數開根號，則只有一個根。因此，高斯（Carl Gauss, 1777~1855）主張虛數不僅是求解三次方程的計算技巧，而是本質。自此之後，虛數在數學中的地位，就沒人懷疑了。

假如只關注 $i^2=-1$ 就很容易導致 i 是「虛假」的想法；這是因為我們以先入為主的「實數」立場來看待一個新來的異鄉人。其實它無所謂虛不虛假，如果它看起來陌生，只因為它來自實數之外的另一個「維度」。高斯在1799年的博士論文裡提出這個想法：把 i 視為一個「生成元素」，而複數 $a+bi$ 就是平面向量 (a, b)，這就相當於把直角坐標平面的 x 軸視為實數數線，它的生成元素就是我們的老朋友1，而 y 軸視為虛數數線，它的生成元素是新朋友 i；這個觀點下的坐標平面就稱為高斯平面。從這個角度看，$i^2=-1$ 是使得複數能夠等價於平面向量的必要條件，它必須如此。

所謂向量就是有「向」（direction）又有「量」（magnitude）的數學物件，它是不同於「數」的另一種物件，一般來說它只能做加減和係數積，不能做乘除計算。一維向量好比沿著線（直線或曲線）運動的速度，它的向不是朝前就是朝後，它的量就是速率。例如在台灣奇數編號的國道或省道上，車行方向不是朝南就是朝北。在數學發展中，不知不覺地「數化」了一維向量：量是非負實數（又稱為無號實數），只要指定某個方向為正號，它的反方向為負號即可。例如指定朝南的速度為正數、朝北的速度為負數。二維向量（又稱平面向量）本來用方位角表示方向（就是高中生學過的極坐標），有了直角坐標之後也可以利用點坐標來表示方向，但它們都不是數，不能彼此乘除。讀者如果想到向量內積，請注意它的運算結果是實數而不再是向量，所以內積並不是向量的乘法。

高斯平面就是「數化」的二維向量：把二維向量等化為複數，使得它們可以做加減乘除計算。為什麼這很重要？它的重要性族繁不及備載，一個根本原因是微分運算需要除，積分運算需要乘，把二維向量數化之後，它們才能做微積分（否則只能以複雜的方式間接處理）；這應該是波動方程式用到複數的根本原因。我猜，站在物理的立場，應該不會懷疑二維向量的真實性吧？既然二維向量就等價於複數，又何必懷疑複數呢？

成功把二維向量「數化」之後，下一個目標自然就是三維向量（又稱空間向量）。高斯和漢密爾頓（William Rowan Hamilton, 1805~1865）都想要增加一個生成元素 j，但是都不成功。一則著名的歷史故事說漢密爾頓在1843年10月16日發生「觸電式的頓悟」：需要第三個生成元素 k；把空間向量「數化」成所謂的四元數 $u+ai+bj+ck$。我們不知道是什麼促使他頓悟？但後見之明可能是：假如只有兩個生成元素，則把 $a+bi+cj$ 的 c 設為0就是 xy 平面上的高斯平面，把 b 設為0相當於 xz 平面上的高斯平面，那麼 yz 平面怎麼辦？為什麼要關心 yz 平面呢？這可能是因為數學思維相信「對稱性」吧（物理思維也相信）。

四元數的威力應該至少像複數那麼強大才對，但直到今日，我們對它的數學性質還是所知甚少。根據魏格納（Eugene Paul Wigner, 1902~1995）的感言「數學在物理科學中不可理喻的有效性」——這是他發表於1960年的一篇文章標題，四元數的低度開發或許連累了物理的發展。我沒有能力預測四元數會不會為〈虛數是想像出來的嗎？〉設想的「量子未來」提供有效的模型，但我如果要寫一篇關於未來科技的科幻小說，一定會拉四元數做為主要角色。

數學在自然科學中不可理喻的有效性可能源自於一種信念，就好像物理和數學都相信對稱性。有人揶揄我們這些人是「科學教」的信徒。我認為這沒什麼需要害羞，所謂理性與感性本來就不必互斥。科學人也是人，需要「信」，也有「愛」，這樣的科學所引導的文明才會有「望」，不是嗎？SA

單維彰
中央大學數學系、師資培育中心與文學院學士班合聘教授。

影像來源：單維章

延伸閱讀

〈虛數的實在存在〉，單維彰撰文，《科學月刊》2007年6月，412~413頁。
〈從四元數到空間向量（上）〉，單維彰撰文，《科學月刊》2010年8月，572~573頁。
The unreasonable effectiveness of mathematics in the physical sciences. Eugene Winger in *Communications on Pure and Applied Mathematics*. Vol. 13, No. 1, pages 1-14; February 1960.