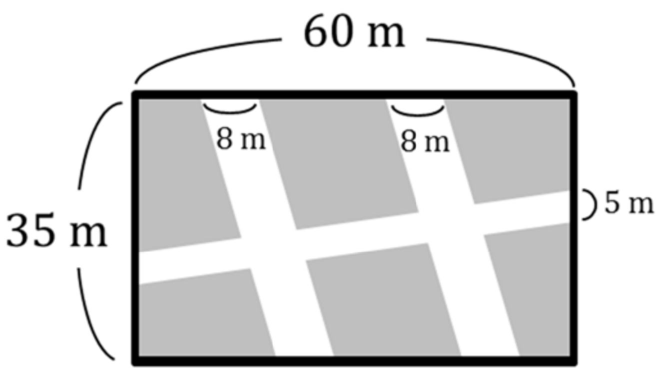
篇名：平行四邊形—從小學到高中

作者：單維彰

本文：

三月下旬，一則「小學問題」從網路流到了我的螢幕上：如圖一，求灰色部分面積。很多人，包括我自己在內，第一個念頭都是「不就這樣嗎？」。



圖一

可是第二個念頭就明白，只有當白色區域之一是水平或鉛直長方形的時候，才是小學問題。大家都知道，只要把長方形面積 2100 m^2 減掉白色部分的平行四邊形面積 860 再加回交集部分 A 的面積 $|A|$ 就行了。然而，問題就發生在 $|A|$。

「平行線」教育

感謝這個問題適時出現，帶領我想像一遍從小學到高中關於「平行線」的數學教育。在這個主題上，小學生要認識平行線的公垂線，由此得知平行線之間的「距離」，但是小學生只能用尺去量具體平行線之間的距離。然後，小學生也學會了平行四邊形的面積就是「底乘以高」。稍長，國中生應該要知道「高」就是平行線的距離，然後認識這條公式的真實意涵，是在兩平行線上，用固定長度的線段造成的任意平行四邊形，面積都相等。國中生進一步知道平行線之間的截線段比例，但那些都是「比」，能夠直接用於測量的情況，還很有限。

到了高中，平面坐標不再只是一張畫函數圖形的畫布，它展現了威力，其中之一就是可用行列式計算平行四邊形的面積。而「比」的觀念被「膠囊化」包裝到 sin 裡面，並且提供數據表格（或計算機），讓我們無往不利地測量這個世界。

在高中階段，平行四邊形還有一項「最後任務」，就是表現平面上「線性組合」的具體意涵。原來「平行」的教育，從小學到高中，有一條清晰的脈絡。

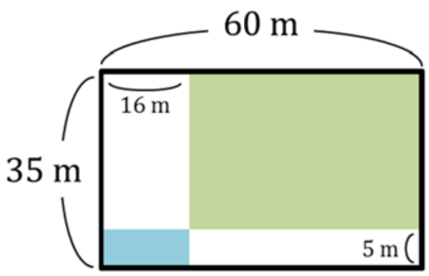
然而，這三階段的學習，至少是由三位老師接力完成的。老師們要接得好，學生才容易領悟自己所接受的教育的意義何在。

如何解讀題目

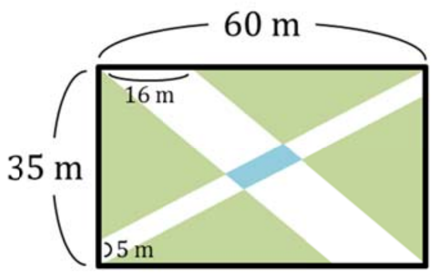
回到數學問題吧。認識這個問題的第一層次，便是讀懂題目。雖然題目配了一幅圖，但瞭解數學溝通「慣例」的人，都明白那只是滿足條件之所有情況中的一種配置而已；但題目並沒有明文列舉條件，而有賴受測者和施測者之間的「默契」。這個現象充斥在數學教育的現場，是筆者感到很無奈的現象之一。雖然國家級的大型考試都具備足夠嚴謹且充分闡述題目的條件，但一般數學評量題目普遍輕視文字描述的嚴謹性，筆者很希望這個現象能逐漸改善。

為這幅圖示的題目配上條件敘述，或許是：如圖一，外框為邊長 60、35 的長方形（單位皆為公尺），白色部分由三個平行四邊形組成，其中兩個南北向，它們互相平行，且有一邊落在外框的上邊，其邊長為 8；另一個東西向，有一邊落在外框的右邊，其邊長為 5。求圖中灰色部分的面積。

滿足以上題意的配置不只一種，或者說，題目給的條件，不足以決定唯一的配置：只要南北向、東西向的平行四邊形有兩邊落在外框上，而邊長為 8 或 5，都滿足題意。例如，圖二圖三都是「合法」的配置（我把兩條南北向平行四邊形併在一起了，它的上邊邊長是 16）。



圖二



圖三

原題的配圖或許故意選擇一種配置，讓交集部分 A(淺藍色部分)看起來像個

長方形，而讓人誤以為$|A|=16\times5=80$。如果觀察以上兩種配置，則很明顯左邊的交集部分的確是$|A|=80$，但右邊的交集A在視覺上就明顯比較小，而且它的「底」和「高」也顯然不是 5 或 16 了。

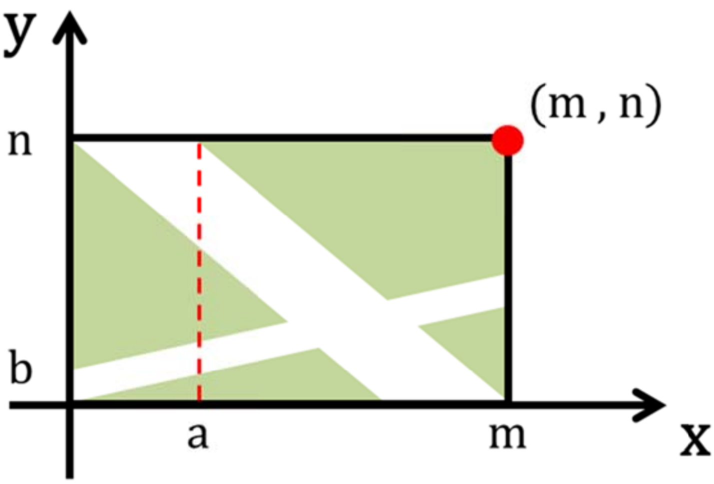
當平行四邊形的斜率容許在長方形內任意調整時，就算固定了其中一邊的邊長，它的高（也就是兩平行邊之間的距離）還是會跟著改變。邊長和高之間的比例關係是 sin，這是國中生還不能定量處理的問題。但是國中生應該知道，一旦平行四邊形的配置選定之後，三個平行四邊形在外框範圍內任意上下或左右平移，其交集部分的面積$|A|$是不變的。因此，兩條互相平行的南北向平行四邊形僅為障眼法，可以將它們合併為一個平行四邊形。同理，可以限定兩個平行四邊形各有一個頂點落在外框的頂點上。

從現在起，我們只討論兩條平行四邊形「交叉」的狀況，而把它們幾乎「重疊」的狀況留給讀者去練習。如果具備「斜率」觀念，交叉就是斜率異號。我們可以令東西向的平行四邊形有一個頂點在左下角，容許它的一邊在右側邊界上下移動；南北向的平行四邊形有一個頂點在左上角，容許它的一邊在下側邊界左右移動。國中階段的數學工具還不能處理任意斜率的交集面積$|A|$，但是或許可以推論兩個平行四邊形越「斜」則「高」越小，然後推論，如上圖之左側配置，是最大可能的$|A|$，而右側的配置（兩個平行四邊形都最「斜」），是最小可能的$|A|$。

座標化解題法

國中生只用平面坐標來畫一次或二次函數的圖形，到了高中，就要逐步發掘坐標的威力。高中生應該有信心，在坐標化之後，我們可以用「蠻力」解決此問題；不太需要巧思，只要按部就班地做就行了。以下，我先跟高中同學分享「蠻力」的力道，然後解釋，如果善用三角的巧思，可以如何簡化解決問題的程序。

讓我們先將化簡後的問題坐標化。如圖四，在坐標平面上，以$(0,0)$和(m,n)為頂點做一長方形，其內有一個平行四邊形，其頂點在$(0,n)$和$(0,n+a)$且其對邊在x軸上，另一個平行四邊形，頂點在$(0,0)$和$(0,b)$且其對邊在$x=m$上，其中$0<a<m$，$0<b<n$。若依原題，則$m=60$，$n=35$，$a=16$，$b=5$。

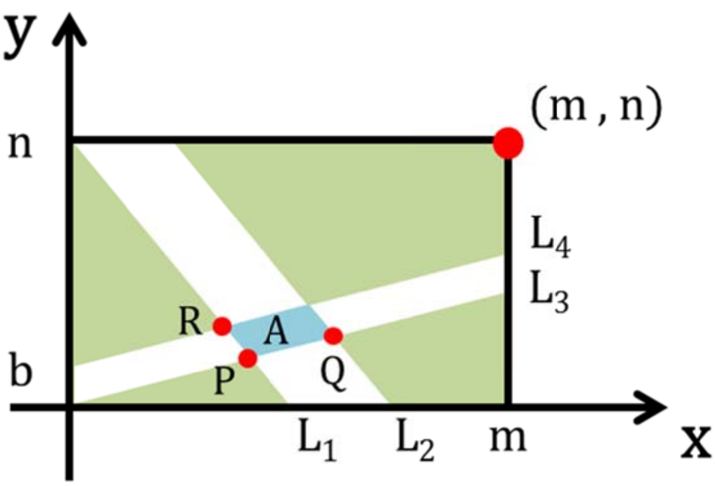


圖四

現在我們針對圖四，求灰色部分面積。兩條平行四邊形的面積分別為 na 和 mb，所以灰色面積為 $mn-na-mb+|A|$。參照圖五，令南北向平行四邊形的左右兩邊為直線 L_1 和 L_2 ，而東西向平行四邊形的上下兩邊為直線 L_4 和 L_3 。寫出它們的直線方程式，如下：

$$L_1:\ \ y=px+n\ ，\quad L_2:\ \ y=p(x-a)+n\ ，其中斜率\ \ p\le -\frac{n}{m-a}$$

$$L_3:\ \ y=qx\ ，\quad L_4:\ \ y=qx+b\ ，其中斜率\ \ 0\le q\le \frac{n-b}{m}$$



圖五

可見我們將 (p,q) 限制在 $\Omega = \left(-\infty, -\frac{n}{m-a}\right] \times \left[0, \frac{n-b}{m}\right]$ 範圍內。參照圖五，由直線的交點算出 A 的三個頂點 P、Q、R，其坐標分別如下：

$$L_1 \cap L_3 = P = (\frac{-n}{p-q}, \frac{-qn}{p-q})$$

$$L_2 \cap L_3 = Q = (\frac{pa-n}{p-q}, \frac{qpa-qn}{p-q})$$

$$L_1 \cap L_4 = R = (\frac{b-n}{p-q}, \frac{pb-nq}{p-q})$$

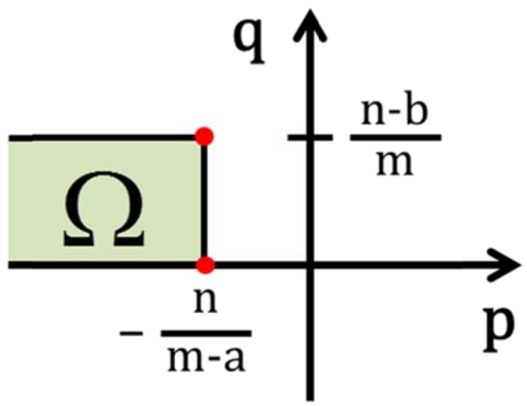
因為 $\overline{PQ} = (\frac{pa}{p-q}, \frac{pqa}{p-q})$，$\overline{PR} = (\frac{b}{p-q}, \frac{pb}{p-q})$，我們現在可以用行列式計算交集之平行四邊形的面積：

$$|A| = \begin{bmatrix} \frac{pa}{p-q} & \frac{b}{p-q} \\ \frac{pqa}{p-q} & \frac{pb}{p-q} \end{bmatrix} = \frac{p^2ab - pqab}{(p-q)^2} = \frac{pab}{p-q}$$

我們不討論 $a=0$ 或 $b=0$ 的無聊情況，所以 $\frac{pab}{p-q} > 0$。於是可將此式改寫成：

$$|A| = \frac{ab}{1-\frac{q}{p}} = \frac{ab}{1+\frac{q}{|p|}}$$

因為分母不小於 1，所以 $|A| \le ab$；而且，當東西向平行四邊形是水平的（$q=0$），或者南北向平行四邊形是鉛直的（$|p| = \infty$），$|A|$ 達到最大值 ab。當 $|p|$ 變小，或者 q 變大，都會降低 $|A|$。參照 Ω 的區域範圍，如圖六，可見 $|A|$ 的最小值發生在 Ω 的右上角，也就是當 $p = -\frac{n}{m-a}$ 和 $q = \frac{n-b}{m}$ 時。



圖六

所以 $|A|_{\max}=ab$ ， $|A|_{\min}=\dfrac{ab}{1+\left(\dfrac{m-a}{m}\right)\left(\dfrac{n-b}{n}\right)}$

使用原題的數據，$|A|_{\max}=80$ ，$|A|_{\min}=\dfrac{80}{57/35}\approx 49.1228$。所以：

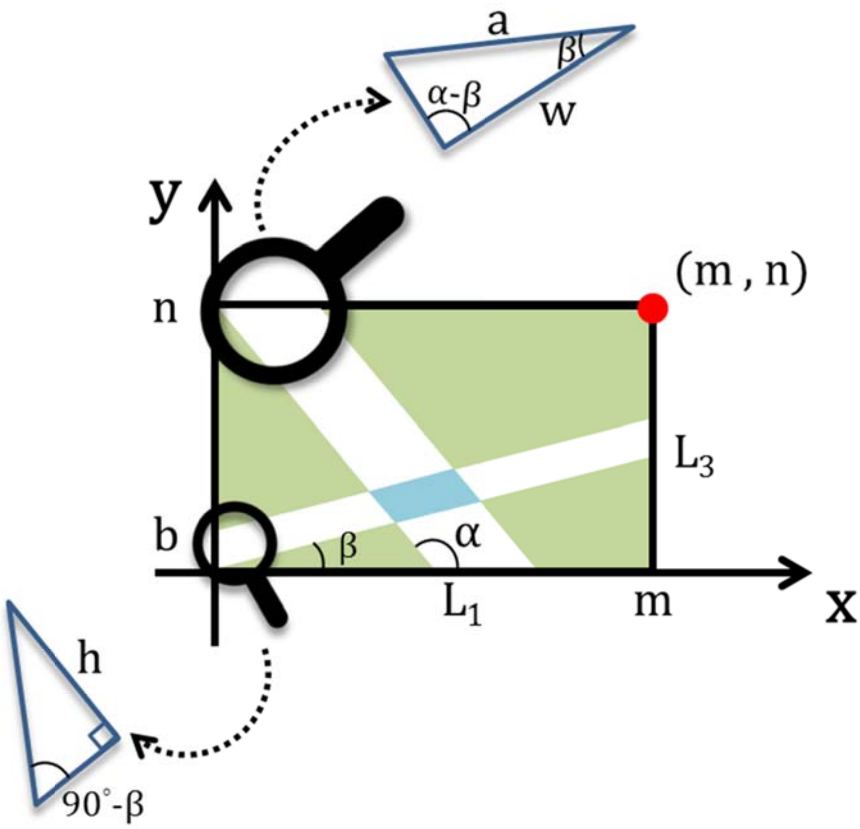
$$1289.1228\cdots \le \text{ 灰色區域的面積 } \le 1320$$

有一位熱心人士公布了一支互動的 Geogebra 程式 (網址 http://tube.geogebra.org/student/mHf26bqcB)。互動程式很容易讓人「盲動」，大家應該有計畫、有目的地操作它，以便觀察一些現象。比如說，從這支程式可以觀察：平行四邊形的平移，不影響結果；平行四邊形的傾斜程度，致使結果的單調變化（遞增或遞減），然後找到造成最大和最小結果的配置。

前面說過我們不考慮兩平行四邊形之斜率同號的狀況，但模擬程式可以讓我們做實驗。而前述處理問題的程序，也可以推廣到這種狀況。

三角函數解題法

最後，我們用三角的觀點再做一次。從圖五出發，令 L_1 的主幅角（與 x 軸正向所夾的有向角）是 α ，L_3 的主幅角是 β ，如圖七。



圖七

則 L_3 和 L_4 的距離是 $h = b\cos\beta$ ，令圖五中 PQ 線段長為 w，

可用正弦定律得到 $\dfrac{a}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{w}{\sin(180^\circ-\alpha)}$ ，所以 $|A| = wh = \dfrac{ab\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ 。

用正弦的差角公式 $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ ，再改寫成：

$$|A| = \frac{ab}{1-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}} = \frac{ab}{1-\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}} \text{ 。}$$

而 $\tan\alpha$ 就是 L_1 的斜率 p， $\tan\beta$ 就是 L_3 的斜率 q，最後可得到：$|A| = \dfrac{ab}{1-\dfrac{q}{p}}$ 。

張鎮華教授後記：

那一天，維彰用手機給我看圖的時候，我的第一個念頭也覺得這是一個小學問題。

當然，維彰往下說了一些，我就看出來，這和上下白色平行四邊形與左右白色平行四邊形交出來的小平行四邊形 P (只取一個來看就夠了) 的角度有關，P 的兩邊分別為 8m 和 5m，其大角越大，面積就越小。因為，灰色部分的面積等於，長方形的面積 2100 、減去上下兩個白色平行四邊形的面積 560、再減去左右白色平行四邊形的面積 300、再加上兩個 P 的面積，所以答案隨著 P 的面積在變。

不過我心中還是有許多疑惑，因為第一秒的直覺，這是一個小學問題，理由如下。假如我們只是要挖去上下的兩個白色平行四邊型，我就想像把它們剪掉，剩下的部分，合併成一個 (60-16)m x 35m 的長方形；同理，假如我們只是要挖去左右的一個白色平行四邊型，我就想像把它剪掉，剩下的部分，合併成一個 60m x (35-5)m 的長方形；所以，我如果先做第一種剪裁合併的動作之後、再做第二種剪裁合併的動作，剩下的部分，理應合併成一個 (60-16)m x (35-5)m 的長方形，就可以算出答案是 1320。我猜想，出題的小學老師可能也是這樣想的。自己也覺得很合理。

當然，這樣的答案，顯然跟前述的 "正確解答" 有出入，只是問題在哪裡？

我很認真的在紙上畫了圖形 (偷懶起見，我只劃了一個上下白色平行四邊形與一個左右白色平行四邊形)，拿出剪刀來剪紙。首先，剪掉上下的那個白色平行四邊形，把剩下的部分合併成一個小一點的長方形。接下來，想要做第二種剪裁合併的動作，不過，馬上就看出來，原來的那個左右白色平行四邊形，經過第一種剪裁合併的動作之後，並不是變成小一點的平行四邊形，而是變成兩個不相連的平行四邊形，因此，就沒法做第二種剪裁合併的動作。

這下，我完全回答了原來心中的疑惑。也覺悟到，有些時候，動手操作是不可或缺的。