多項式進路的微分課程

單維彰・國立中央大學師資培育中心與數學系

民國 105 年 11 月 22 日

多項式是數學的最基本物件，其基本性應該緊跟在實數之後。所以它在國中二年級就進入了數學課程，繼續發展到高中。國中時期學習了多項式的加減乘除四則運算，還看不出它何妙之有？這種學習聽起來就蠻枯燥的；但是，如果老師能用一種遊戲式的，甚至於帶著幽默感的態度，把多項式看成擴充了正整數的一種新玩具，把四則運算當作擴充了正整數（直式）四則運算的新遊戲規則，帶領同學「玩」一場新遊戲，則似乎這段學習還可以不太枯燥。對於年齡更長的學生，則更容易複習這些操作手段。

高中時期的多項式學習，已經可以讓學生領略它的美妙。現行的課本和教材基本上繼承了半個世紀以來的數學課程傳統，深入闡述了多項式的代數面向。事實上，只要在這時候偏一個小角度，就可以把課程的軌道銜接到微分。這篇報告就是要闡述，將高一的多項式教學橋接到微分學的方法。本報告並非根據更多或更新的數學內容，只是做了新的連結和詮釋而已；稍後，我將提出一個歷史證據，說明這個進路更接近十七世紀發展微積分初期的原本途徑，而多項式的微積分其實早於複數平面、代數基本定理、三角「函數」和指對數「函數」的發展。

・國中的先備知識

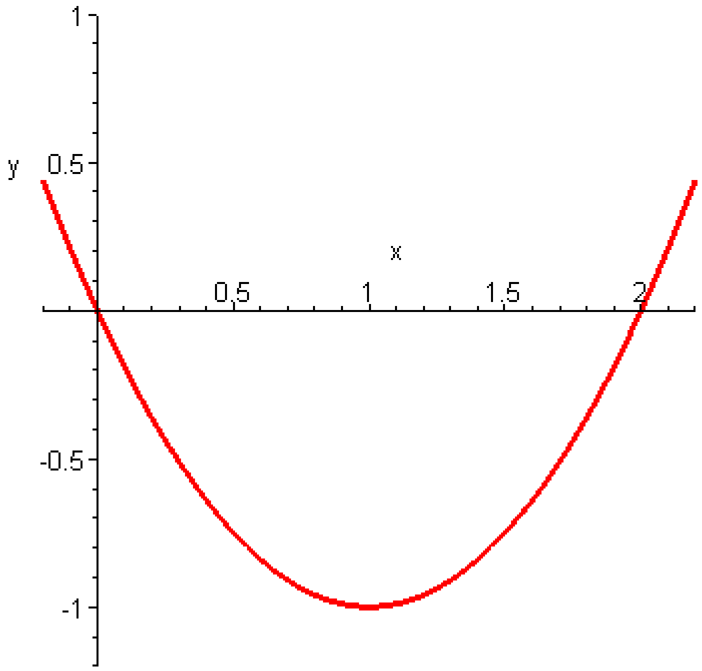
所謂多項式不過就是像 x^2-2x 這樣的式子，其中的 x 既不是未知數也不是變數，就是一個稱為「元」的、可以像實數一樣運算的符號而已。令 $h=x^2-2x$，則 $h=0$ 稱為方程式，x 就有了未知數的意義，然後可以玩「求根」的遊戲。當寫成 $h(x)$ 稱為多項式函數或者二次函數，x 就有了變數的意義，然後可以玩「函數圖形」的遊戲。

多項式的整理，亦即同類項合併（其實是分配律的應用），此時一律以降冪排列為慣例。多項式的加、減計算，其實是同類項合併的應用。多項式的乘法和除法，將被乘式和被除式侷限於三次以內、乘式和除式一次即可。用直式領略多項式是正整數的形式推廣，然後練習分離係數法。不要做因式分解。

平方公式，平方差公式，配方。尤其是配方，務必做足夠而基本的練習。複習平面直角坐標系，確實瞭解所謂點 P 的坐標是 (a,b) 的意義為何（正射影）。了解函數圖形的意義，然後複習常數函數 $y=c$ 的圖形，一次函數 $y=mx+k$ 的圖形，二次單項函數 $y=ax^2$ 的圖形，做練習確實掌握這些圖形的特徵。

利用配方，了解二次函數的圖形是「拋物線」，其開口方向決定了一個極大值或極小值。例如，接續前述的 $h(x)$，因為 $x^2-2x=(x-1)^2-1$，所以 $y=h(x)$ 的圖形就是以 $(1,-1)$ 為頂點，開口向上的拋物線，如圖一。此時，函數在 x=1 處發生最小值 -1。全面了解配方之後的 $y=a(x-x_0)^2+c$ 的圖形，多做精熟練習。以水平、鉛直平移的觀念，再次認識任意一次函數與二次函數，皆是單項函數 $y=mx$ 和 $y=ax^2$ 的平移；可以不必證明，純粹在圖形上解釋，但是最好練習變數的「代入」或「置換」手法。

最後，複習正整數的除法，從 $m \div n = q \ldots r$ 的形式，寫成 $m = qn + r$ 或者 $m - r = qn$ ，這就是**除法原理**；其中 m、n 為正整數，q、r 為全數。多做練習，並了解除法原理是驗算的利器。



[圖一]

・高中的銜接與換軌

先擴充單項函數圖形特徵的知識，從 $y = x^3$ 和 $y = x^4$ 開始，指出它們的圖形特徵。然後加入領導係數的討論：$y = ax^3$、$y = ax^4$，其中 a 為非零實數。建立係數和函數圖形特徵的視覺關連，並多做練習。所謂特徵也不過就是下面三點（以下均指單項函數）。

(1) 在 $|x|$ 小時扁的程度，在 $|x|$ 大時陡的程度。

(2) 三次函數有凹向上和凹向下兩種特徵，而 $x = 0$ 是**反曲點**；四次函數（就像二次函數）凹的方向不變，沒有反曲點。

(3) 三次函數（就像一次函數）的圖形對稱於原點，四次函數（就像二次函數）的圖形對稱為 y 軸。

在以上地 (3) 點，倒不一定要急著講「奇函數」與「偶函數」這兩個名詞。因為，這套課程的用意之一，是希望提供學生一套學習「函數」觀念與符號系統的具體範例。證諸於數學發展史，函數觀念本來就是伴隨著微積分而誕生的。如果不是為了微積分和其後的各種應用，數學也許只需要方程式就夠了，不必發展函數觀念與符號。

再回到多項式本身的運算，從多項式除法的橫式 $f \div p = q \ldots r$ ，以除法原理轉換成等式 $f = pq + r$ 。從這裡導出因式定理和餘式定理，但是不必深入。須要了解的，只有以下兩點。

(1) 當 $p = x - c$ ，則餘數 $r = f(c)$ ；亦即餘式定理。

(2) $f(x) - f(c)$ 必然被 $x - c$ 整除；平方差公式成為特例，再導出立方差公式，多做練習，最後可以導出 $(x^n - c^n) \div (x - c)$ 的商式，其中 n 為正整數。特例：當 c 是一個根，則 $f(c) = 0$ 而 $f(x)$ 被 $x - c$ 整除；亦即因式定理。

接著導出一種特殊狀況的簡易除式算法，就是當除式 p 為 $x-c$ 這種一次式時，有所謂的**綜合除法**（Horner 演算法）。例如當 $g=2x^3-5x^2+4x-2$ 而 $p=x-1$ 時，則 $g\div(x-1)$ 的綜合除法算式如下：

$$
\begin{array}{rrrr|r}
2 & -5 & 4 & -2 & 1 \\
 & 2 & -3 & 1 & \\
\hline
2 & -3 & 1 & \underline{-1} &
\end{array}
$$

得到了商 $q=2x^2-3x+1$ 和餘 $r=-1$ 。所以寫成 $g=(2x^2-3x+1)(x-1)-1$ 。

至此大約是 99 課綱之數學 I 第二章 2-1 和 2-2 的內容。但是可以降低關於餘式定理、因式定理的習題量，因為現在可以切換軌道，朝著微分的方向發展了。

・多項式的升冪與降冪—圖形的巨觀與微觀

多做圖形辨識和看圖判斷函數的練習，建立函數圖形的視覺直覺。熟悉了一次至四次單項函數的特徵之後，展示（用電腦畫）一些一般一次至四次的多項式函數圖形，闡述**降冪排列**的用途：當 $|x|$ 大時，函數值被首項主控。所以，如果「zoom out」來看，多項式函數圖形大約就像由首項決定的單項函數圖形。這裡因為 x 軸和 y 軸的單位長必然不同，有「作弊」之嫌，但是與事實相近，不能算是錯誤。學生將會獲得多項式圖形的宏觀認識，降冪排列也有了意義。這時候複習「根」的觀念，引進中間值定理（憑圖形說明），利用計算器做些基本練習，然後可以瞭解奇次函數必有（至少）一根。

在微觀方面，先討論多項式函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的圖形特徵。所謂「在 $x=0$ 附近」就是要在 $x\approx 0$ 時討論 $f(x)$ 的值。不妨考慮 $x=0.1$ ，則函數 $f(x)=a_nx^n+\dots a_1x+a_0$ 的 k 次項 a_kx^k 的值就是 $a_k/10^k$ ，可見一般而言越高次項的（絕對）數值越小，對 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的值而言越不重要。所以此時慣用**升冪排列**，將多項式函數寫成

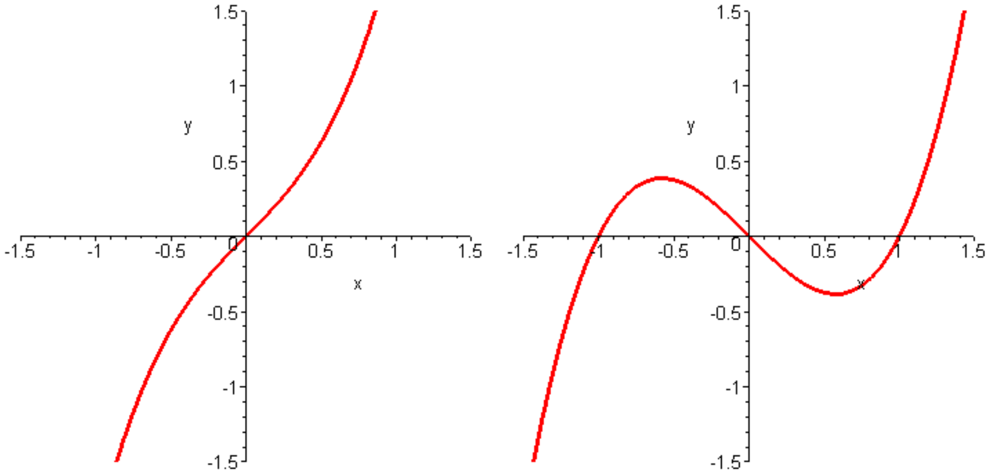
$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n \text{ 。}$$

此時 a_0 可以視為 $f(x)$ 的整數部分，而 a_1 、 a_2 、…就「幾乎」是 $f(x)$ 的小數點下第一位、第二位、…。越高次項越不重要，低次項就掌握了 $f(x)$ 在 $x=0$ 的局部性質。

局部性質的最基本要素就是，函數圖形通過點 $(0,a_0)$ 。教師可帶領學生在以 $(0,a_0)$ 為中心、以 2ϵ 為邊長的正方形區域內觀察 $y=f(x)$ 的圖形，其中 ϵ 為一微小的正數；善用電腦工具，將可以隨時調整 ϵ 的大小。同學將會發現，當 ϵ 很小時，圖形「幾乎」是直線 $y=a_1x+a_0$ ；當 ϵ 稍微大一些，才會發覺函數圖形的彎曲，而彎曲的方向（凹凸性）由 a_2 的正負號決定。

然後特別指出 $a_1=0$ 的特例，觀察局部圖形「幾乎」是拋物線 $y=a_2x^2+a_0$ ，其開口方向由 a_2 決定，故發生極大或極小值。再看 $a_2=0$ 的特例。此時不妨詳細看看 $y=a_3x^3+a_1x$ 的圖形，不難理解：當 a_1 與 a_3 異號時，圖形像是將 $y=a_3x^3$ 以 $x=0$ 為中心「反扭」了一下，造成兩個新的（在 $x=0$ 以外的）實根；當 a_1 與 a_3 同號時，圖形像是將 $y=a_3x^3$ 以 $x=0$ 為中心「順撥」了一下；參照圖二。不論如何， $y=a_3x^3+a_1x$ 是奇函數，圖形對稱於原點，所以 $x=0$ 還是反曲點，在 $x=0$ 兩側的彎曲方向（凹凸性）由 a_3 的正負號決定。但是並沒有產生新的根。可見，當 $a_2=0$ 時， $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的局部圖形「幾乎」是 $y=a_3x^3+a_1x+a_0$ ，此圖形對稱於 $(0,a_0)$ ，

而 $x=0$ 必然是彎曲方向反轉之處，亦即 $(0,a_0)$ 也是圖形的反曲點。



[圖二]

$y=x^3+x$　　　　　　　　　$y=x^3-x$

該怎樣觀察多項式函數 $f(x)$ 的圖形在 $(c,f(c))$ 附近的特徵呢？我們引入泰勒多項式。接續前面 $g\div(x-1)$ 的例子，我們還會教學生再做 $q\div(x-1)$ ，如

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ & 2 & -1 & \\ \hline 2 & -1 & \underline{\,|\;0\;} & \end{array}$$

所以 $q=(2x-1)(x-1)+0$ ，代回 g 得到

$$g=\big((2x-1)(x-1)\big)(x-1)+1=(2x-1)(x-1)^2-1\text{。}$$

然而 $2x-1=2(x-1)+1$ ，所以

$$g=2(x-1)^3+(x-1)^2-1\text{，}$$

稱為 g 在 $x=1$ 處的**泰勒形式**。

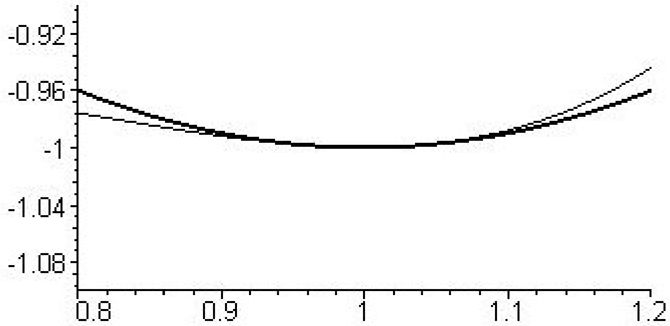
讓學生能夠使用泰勒形式估計多項式函數的值。例如若要估計 $g(1.12)$ 至百分位，則因為三次項 $2(0.12)^3<0.01$ 可以忽略不計，故

$$g(1.12)\approx(0.12)^2-1\approx-0.98\text{。}$$

依此要領多做幾個練習之後，說明泰勒形式的主要功能是估計多項式圖形在 $x=c$ 附近的「局部」特徵。因為所謂「局部」就是 $x\approx c$ ，所以 $|x-c|$ 是個很小的數，次方越大其值越小，所以我們的慣例是將泰勒多項式寫成升冪排列。一般而言，多項式函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 處的泰勒形式寫成

$$f(x)=c_0+c_1(x-c)+c_2(x-c)^2+\ldots\text{。}$$

代入$x=c$立刻得到$c_0 = f(c)$。注意，函數圖形在$x=c$附近的最基本的特徵，就是圖形通過$(c, f(c))$ 這一點，也就是 (c,c_0)。當$x \approx c$時，不妨將$x-c$想像成 0.1，則c_0可以視為$f(x)$的整數部分，而c_1、c_2、…就「幾乎」是$f(x)$的小數點下第一位、第二位、…。可見，越高次項越不重要，越低次項越掌握了$f(x)$的局部性質。



[圖三]

以(c,c_0)為中心、2ϵ為邊長的小正方形區域內觀察$y = f(x)$的圖形，發現它「幾乎」是直線$y = c_1x + c_0$；這條直線定義為$f(x)$在$x=c$處的**切線**。

・用泰勒形式徹底瞭解多項式函數圖形的局部特徵

回到前面舉例的g和h。改寫g在$x=1$處的泰勒形式為

$$g(x) = -1+(x-1)^2+2(x-1)^3 ,$$

忽略三次項不計，則$g(x) \approx (x-1)^2 -1 = h(x)$。參照圖三，$y = g(x)$在$x=1$附近的函數圖形（細線）跟$y = h(x)$（粗線）很接近，是個開口向上的拋物線，而且在$x=1$處發生（局部）極小值$-1$。

從以上經驗，搭配先前對一次函數之斜率的認識，以及函數圖形靠近切線的認識，課程可以做個小結論：連續使用綜合除法，能將多項式改寫成泰勒形式。而如果

$$f(x) = c_0 + c_1(x-c) + c_2(x-c)^2 + \ldots ,$$

當$c_1 > 0$時函數圖形在$x=c$附近遞增，當$c_1 < 0$時遞減；而若$c_1 = 0$但是$c_2 > 0$，則$y = f(x)$在$x=c$附近的圖形有如開口向上的拋物線，故發生極小值；而若$c_1 = 0$但是$c_2 < 0$，則$y = f(x)$在$x=c$附近的圖形有如開口向下的拋物線，故發生極大值。

再討論$c_2 = 0$的情況（若f原本是三次多項式，它的泰勒形式還是三次，所以$c_3 \neq 0$總是成立的）。此時$f(x) = c_0 + c_1(x-c) + c_3(x-c)^3$，它的圖形是$y = c_3x^3 + c_1x$之圖形的平移（向右平移$c$，向上平移$c_0$）。根據之前對於這種函數的認識，以及對於平移的直觀認識，就能明白$f(x) = c_0 + c_1(x-c) + c_3(x-c)^3$的函數圖形對稱於$(c,c_0)$，而此點就是圖形的反曲點。

綜合之前關於二次函數之彎曲方向的知識（由首項係數的正負號決定），至此得到第二個小結論：如果多項式函數$f(x)$在$x=c$處的泰勒形式有$c_2 > 0$的情況，則函數圖形在$x=c$附近凹向上，反之若$c_2 < 0$則凹向下；而若有$c_2 = 0$但$c_3 \neq 0$的情況，則函數圖形在$x=c$處發生反曲點。

如果c是$f(x) = 0$的一個根，則因為f在$x=c$處的泰勒形式之常數項$c_0 = f(c)$，所以$c_0 = 0$

而 $f(x)=c_1(x-c)+c_2(x-c)^2+c_3(x-c)^3+\ldots$。這時候介紹重根的定義，如果 c 是 $f(x)=0$ 的 k 重根，則因為 $f(x)$ 被 $(x-c)^k$ 整除，因此前述泰勒形式必須是 $f(x)=c_k(x-c)^k+\ldots$，亦即 $c_0=c_1=\ldots=c_{k-1}=0$。由此可見，如果 c 是 $f(x)=0$ 的 k 重根，則 $y=f(x)$ 在 $x=c$ 附近的函數圖形近似於 $y=c_k(x-c)^k$ 的圖形，亦即單項函數 $y=c_kx^k$ 平移的結果；在課程中應將 k 限制於不超過 4 的正整數。

以上兩個小結論，再配合根或重根附近的圖形特徵，就完全掌握了多項式函數圖形的局部特徵。而宏觀特徵也在前面學過了。所以可謂徹底認識了多項式函數的圖形。

・導函數登場

這誠然是個了不起的發現：如果 f 在 $x=c$ 處的泰勒形式之 $c_1=0$，則 $f(x)$ 可能在 $x=c$ 發生極大值或極小值。但是為德不卒：我們要怎樣才能知道，哪裡去找一個 c，使得 f 在 $x=c$ 處的泰勒形式之 $c_1=0$ 呢？總不能一個 c 一個 c 地嘗試使用綜合除法去找 $c_1=0$ 的出現吧？

導函數回應了上述問題而得到圓滿的結果。先討論最單純的單項式 x^n，做除法 $x^n\div(x-c)$ 得到商式 $q=x^{n-1}+cx^{n-2}+c^2x^{n-3}+\ldots+c^{n-1}$。因為 c_1 是 $q\div(x-c)$ 的餘，所以根據餘式定理得知 $c_1=q(c)=nc^{n-1}$。因此，找到使得 $c_1=0$ 的 c，就相當於求解 $nc^{n-1}=0$ 的根。我們知道答案是 0，但這不是重點；重點是，我們將找到係數 c_1 的「公式」。

從前面的經驗，已經知道 c_1 是隨著參考點 c 而改變的量，也可以說是 c 的函數。數學家發展了一種慣例，用 $f'(c)$ 表示那個函數；而且，因為它是從 $f(x)$「導出來」的函數，所以稱為「導函數」。藉由導函數，我們可以將泰勒形式 $f(x)=c_0+c_1(x-c)+c_2(x-c)^2+\ldots$ 改寫為

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+c_2(x-c)^2+\cdots$$

當 $f(x)=x^n$ 為 n 次單項函數，其中 $n\ge 2$，從因式分解或綜合除法，都可以得到導函數的公式 $f'(c)=nc^{n-1}$。當 $n=1$，因為 $x=c+(x-c)$ 對任何 c 皆成立，可見當 $f(x)=x$，$f'(c)=1$。而當 $n=0$，因為 $1=1+0\cdot(x-c)$ 也對任何 c 皆成立，可見當 $f(x)=1$，$f'(c)=0$。如果我們不討論 c 確切的值，而一律在符號上規定 $1\cdot c^0=1$ 和 $0\cdot c^{-1}=0$，則發現

若 $f(x)=x^n$，則 $f'(c)=nc^{n-1}$ 對所有非負整數 n 皆成立。

特別提一下零函數 $f(x)=0$。因為 $0=0+0\cdot(x-c)$，所以零函數的導函數還是零函數。

以上公式雖然美妙，但是看起來不太有用，因為它只能處理最簡單的單項函數。然而，數學就在這裡展現了「以簡馭繁」的思維特色。運用 x^n 和 x^k 的泰勒形式，我們發現

$$\begin{aligned}ax^n+bx^k&=a\cdot(c^n+nc^{n-1}(x-c)+\cdots)+b\cdot(c^k+kc^{k-1}(x-c)+\cdots)\\&=(ac^n+bc^k)+\left(anc^{n-1}+bkc^{k-1}\right)(x-c)+c_2(x-c)^2+\cdots\end{aligned}$$

亦即當 $f(x)=ax^n+bx^k$ 為多項式函數，則 $f'(c)=a\cdot[nc^{n-1}]+b\cdot[kc^{k-1}]$，執行的程序就是將係數分離出來，然後將每一個單項式代換成它的導函數公式。舉一反三，上述程序當然不僅限於兩項的多項式函數，例如當 $f(x)=5x^3-2x^2+3x-4$，則

$$f'(c)=5\cdot[3c^2]-2\cdot[2c]+3\cdot[1]-4\cdot[0]=15c^2-4c+3\text{。}$$

以上「可提出係數逐項做導函數」的運算性質，稱為導函數的**線性性質**。用一般性的函

數符號來寫，就是

$$[k\cdot f]'(c)=k\cdot f'(c)\text{ ，}[f+g]'(c)=f'(c)+g'(c)\text{ 。}$$

這時候也就展現出來「函數符號」的簡潔用途了。

運用泰勒形式，我們還能推論導函數的**乘法律**和**除法律**。在高中一年級，應該用不著這兩條公式，也不宜讓學生太早承受這些符號操作的負擔，我們只是記在這裡備用。令

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+u_2(x-c)^2+\cdots\text{ 、 }g(x)=g(c)+g'(c)(x-c)+v_2(x-c)^2+\cdots$$

是兩個多項式函數，則因為

$$[fg](x)=f(x)\cdot g(x)=f(c)g(c)+\left(f'(c)g(c)+g'(c)f(c)\right)(x-c)+c_2(x-c)^2+\cdots\text{ ，}$$

所以

$$[fg]'(c)=f'(c)g(c)+g'(c)f(c)$$

前式的右項可以用函數符號簡記為$[f'g+fg'](c)$。而當$g(c)\neq 0$，f與g的分式為

$$\left[\frac{f}{g}\right](x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots}{g(c)+g'(c)(x-c)+\cdots}=\frac{f(c)}{g(c)}+\left[\frac{f}{g}\right]'(c)(x-c)+\cdots$$

從以上等式求解$\left[\dfrac{f}{g}\right]'(c)=\dfrac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g(c)^2}$，而運用函數符號，可以簡記為

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(c)=\left[\frac{f'g-fg'}{g^2}\right](c)\text{ 。}$$

當我們省略了變數符號之後，前述四項導函數的公式，可以直接寫在函數符號上：

$$[k\cdot f]'=k\cdot f'\text{ ，}[f+g]'=f'+g'\text{ ，}[fg]'=f'g+fg'\text{ ，}\left[\frac{f}{g}\right]'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

至此，我們已經相當肯定，給定任一個多項式函數或有理函數（亦即分子和分母皆為多項式的分式函數）$f(x)$，我們都能計算它的導函數$f'(c)$。經過$f'(c)>0$和$f'(c)<0$的不等式解區間，可以探討函數$f(x)$在c點附近的遞增或遞減特徵，而$f'(c)=0$的解，就是$f(x)$可能發生相對極大或相對極小值的位置。這些發展，使得高一求解多項方程式的解，以及多項不等式的解區間等問題，有了實用的價值和意義。即使侷限在三次（或四次）多項式函數的範圍內，也有許多值得探討的應用問題了。

微分

學到這裡，好像還沒看到「微分」？求導數的動作，就是**微分**。它原本是「求多項式函數在特定數值附近之局部直線圖形的斜率」的動作，後來變成「求多項式函數$f(x)$之導函數$f'(c)$然後將c代入特定數值」的動作。因此，微分的意義就擴充到「求導函數」的動作了。

操作$f'(c)$一段時間，等待學生熟悉$f'(c)$是一個以c為自變數的函數以後，問學生「喜不

喜歡」或者「習不習慣」用 c 當作自變數符號？一般都會說不喜歡或者不習慣。這時候，就可以引導學生將導函數的自變數換回 x。但是這裡在技術上要小心，太早把 f' 的自變數寫成 x，將會在推論過程中產生混淆。

理解了符號的轉換之後，可以進一步簡化微分的操作程序，並且將導函數記號「 $'$ 」當作微分的動作。此處的符號操作轉換，可能是某些初學者的障礙，教師應小心觀察，不要因為符號障礙而阻擋了微分的學習。

簡化符號系統的步驟是，將函數 $f(x)=x^n$ 的導函數 $f'(c)=nc^{n-1}$ 改寫成 $f'(x)=nx^{n-1}$，然後進一步省略掉函數記號，直接對單項式做微分而得到導函數，就得到以下公式。

微分基本公式：$[x^n]'=nx^{n-1}$ ，其中 n 為非負整數

用這一套符號系統，多項式函數的微分運算就成為

$$\begin{aligned} f'(x) &= [a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0]' \\ &= a_n[x^n]' + a_{n-1}[x^{n-1}]' + \ldots + a_1[x]' + a_0[1]' \\ &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 \end{aligned}$$

微分除法律可以用來拓展微分的基本公式：

$$\left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} \text{ ，其中 } n \text{ 是正整數}$$

改寫成指數形式就是 $[x^{-n}]'=(-n)x^{-n-1}$ ，於是得到

拓展的微分基本公式：$[x^n]'=nx^{n-1}$ ，其中 n 為整數

以上公式只是有趣而已，在高中應該是用不著的。

高階導數

按泰勒形式的除法操作程序，c_2 是 $q(x)\div(x-c)$ 之商在 $x=c$ 的值。我們還是先討論單項函數 $f(x)=x^n$。已知 $f(x)\div(x-c)$ 的商為 $q(x)=x^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+c^{n-1}$，再用綜合除法得到 $q\div(x-c)$ 的商為 $x^{n-2}+2cx^{n-3}+3c^2x^{n-4}+\ldots+(n-1)c^{n-2}$ ，代入 $x=c$ 得到

$$c_2 = \frac{n(n-1)}{2}c^{n-2} \text{ 。}$$

但是，前面已經知道 $[x^n]'=nx^{n-1}$ ；我們可以對 nx^{n-1} 再做一次微分：

$$[nx^{n-1}]' = n[x^{n-1}]' = n(n-1)x^{n-2}$$

此結果稱為 $f(x)=x^n$ 的二階導函數，記作

$$f''(x) = [x^n]'' = n(n-1)x^{n-2} \text{ ，}$$

而 $f''(c)=n(n-1)c^{n-2}$ 就稱為 $f(x)=x^n$ 在 c 的二階導數。由此可見 $f(x)=x^n$ 在 $x=c$ 處的泰勒形式之二次項係數為

$$c_2=\frac{n(n-1)}{2}c^{n-2}=\frac{1}{2}f''(c)$$ 。

這個關係對一般的多項式函數都成立：

$$c_2=\frac{1}{2}f''(c)$$

至此，我們有了找多項式函數之極大或極小值的一般性方法：先做 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$，求方程式 $f'(x)=0$ 的根 c，則因為 $f'(c)=0$，函數$y=f(x)$在 $x=c$「附近」的函數行為像開口向上或向下的拋物線：

$$f(x)=f(c)+\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2+\cdots$$

若 $f''(c)>0$ 則 $f(x)$ 在 $x=c$ 附近的開口向上，發生（局部）極小值 $f(c)$，若 $f''(c)<0$，則 $f(x)$ 在 $x=c$ 附近的開口向下，發生（局部）極大值。

以上程序須要求方程式 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的根，這些需求為方程式求解的問題提供了新的情境和具體的應用。回顧切線的定義，我們知道 $f'(c)$ 是**切線斜率**。但是，這個事實此時還不重要。這一段教學的重點是多項式函數圖形的局部特徵，兼顧函數符號的操作，而主要應用是找到多項式函數的（局部）極大值或極小值，並用來解決問題。

數學歸納法

特殊形式的函數及其導函數（或許是高階的）之間，經常會出現與正整數參數有關的規律。提早習得導函數之後，這些規律可以提供數學歸納法的「先觀察，再猜想通式，最後證明」練習範例。譬如以下公式是合成函數之微分連鎖律的特例，作者相信先學習這個特例，在高中就有用，而且有助於將來學習一般化的連鎖律。

令 $f(x)$ 是一個多項式函數，則

推廣的微分基本公式：$[f^n]'=nf^{n-1}f'$，其中 n 為任意正整數

因為我們規定$1\cdot f^0=1$，所以上述公式對$n=1$成立。利用微分乘法律和歸納法假設，可以推論上述公式對任意正整數皆成立。

一般的連鎖律也可以用泰勒形式推論出來，如下。為避免符號的混淆，我們還是用 c 當作導函數的自變數。給定多項式函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之泰勒形式如前述，令 $F(x)=f(g(x))$，則

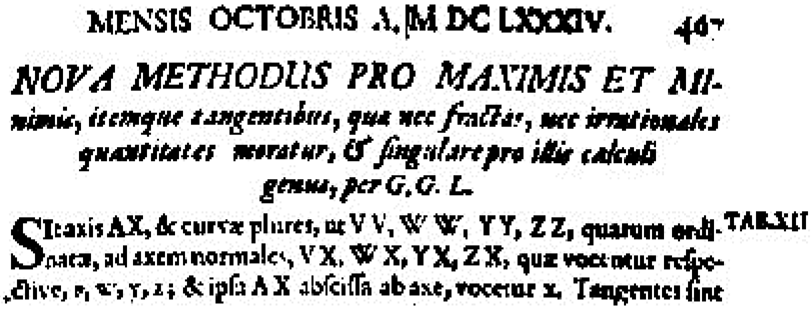
$$\begin{aligned}F(x)=f(g(x))&=f(g(c))+f'(g(c))\big(g(x)-g(c)\big)+u_2(g(x)-g(c))^2+\cdots\\&=f(g(c))+f'(g(c))\Big(g'(c)(x-c)+v_2(x-c)^2+\cdots\Big)\\&\quad+u_2\Big(g'(c)(x-c)+v_2(x-c)^2+\cdots\Big)^2+\cdots\\&=F(c)+f'(g(c))g'(c)(x-c)+c_2(x-c)^2+\cdots\end{aligned}$$

可見$F'(c)=[f\circ g]'(c)=f'(g(c))g'(c)$。合成函數的符號操作需要相當的數學成熟度，作者建議僅在高三選修數甲嘗試教給學生。

・學生的認知能力跟得上嗎？

以上的發展，其實非常接近 17 世紀的微分學發展進路。前一節的結論，大約就是萊布尼茲（署

名 G. G. L.）在西元 1684 年發表之論文的主題，如圖四，其中第一列還能看到 1684 的羅馬數字 M DC LXXXIV。論文的題目很長（寫了三行多）：Nova Methodus … calculi genus，大意是『新的找極大值和極小值的一般性計算方法』，倒數第二個字 calculi 是 calculus 的複數（陽性名詞），意即『計算方法』。就是這篇論文，導致牛頓的朋友們指責萊布尼茲抄襲，並督促牛頓趕快出版他的作品。也是這篇論文，使得後來 Calculus 成了這套「新」計算方法的總稱，我們（跟隨李善蘭）稱之為**微積分**。


MENSIS OCTOBRIS A. M DC LXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

TAB.XII

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint

[圖四]

圖四有論文的前三列，顯示當時討論的僅是多項式函數（YY 是 y^2 的意思）。在當時，三角和指對數的算術意義和代數性質雖然都已經知道了，但是它們的函數意義都還沒有發展出來。至於極限、複數平面、向量、矩陣和線性映射，都是 19 世紀的思想產物。我們雖然沒有「證據」，卻有理由相信，以上的多項式微分課程並不比現行課程困難，確實在高一學生的認知能力內。事實上，作者的意見是，前述多項式微分課程比現行的高一多項式課程簡單，而且充滿了動機和應用；而更多的動機和應用，稍後由極限形式的定義和物理意義展現出來。

直到此時，尚未引入極限觀念。而多項式的導數為微分的極限定義提供了動機，該形式的定義在數學上擴展了導函數的公式，在物理上提供了「瞬時速度」的數學模型。在高中階段，我們可以只討論很小範圍的函數極限問題，其動機、目的和技術都很明確，而且僅用來當作一個「記錄形式」而已。要特別謹慎的是不要在稍後的極限教學上，加重了高一學生的負擔。

・極限形式的引入

再回到 $g \div (x-1) = (2x^2-3x+1) \ldots (-1)$ 的例子，其中 $g = 2x^3-5x^2+4x-2$。用除法原理寫成 $g = (2x^2-3x+1)(x-1)-1$，或者整理成等式

$$g(x)+1 = q(x)(x-1) \text{，其中 } q(x) = 2x^2-3x+1 \text{，} g(1) = -1 \text{。}$$

以上等式對所有實數 x 皆成立，可是我們卻不能用它來計算 $q(1)$（也就是 $g'(1)$）；因為代入 $x=1$ 之後，我們得到的是恆等式 $0 = q(1) \bullet 0$。

這是個一般現象。當 $f(x)$ 為 n 次多項式函數，$f(x)-f(c)$ 恆被 $x-c$ 整除，故

$$f(x)-f(c) = q(x)(x-c) \text{，其中 } q(x) \text{ 為 } n-1 \text{ 次多項式函數。}$$

當 $x \neq c$，亦即 $x-c \neq 0$，我們可以用消去律得到

$$q(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{，其中 } x \neq c \text{。}$$

在等號的左側，我們明明可以計算 $q(c)$，但是卻不能將 $x=c$ 代入這條等式。就圖形而觀之，

$$y=q(x)\text{ 和 }y=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\text{ 的圖形完全重疊，只差 }(c,f(c))\text{ 這一點。}$$

用前面的 g 做例子，

$$\text{當 } x\neq c\text{ ，}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=2x^2-3x+1\text{ 。}$$

而 $y=\frac{g(1)-g(1)}{x-1}$ 和 $y=2x^2-3x+1$ 的圖形完全重疊，只差 $(1,g(1))$ 也就是 $(1,-1)$ 這一點。但是我們就是須要代入 $x=1$ 以計算 $g'(1)$ 。

為了從這個窘況解脫出來，我們採用 $x\to c$ 的**極限**符號來代替 $x=c$ 的代入。沿用前面的符號，我們規定

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=q(c)\text{ 。}$$

例如

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=2\bullet 1^2-3\bullet 1+1=0\text{ 。}$$

現在，我們可以重新定義多項式函數 $f(x)$ 在 c 的導數為

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

而代入 $x=c$ 就能得到導數的函數 $f'(x)$ 仍然稱為導函數。

當 $x\neq c$ ，$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 稱為 f 在 x 和 c 兩點的**差分**（兩數相**差**的**分**數），而它是 $y=f(x)$ 函數圖形上，通過 $(x,f(x))$ 和 $(c,f(c))$ 兩點的割線斜率。用互動數位教具，可以表現給學生看，當 x 越來越靠近 c，割線將會越來越靠近一條固定的直線。這條直線當然就是通過 $(c,f(c))$ 且斜率為 $f'(c)$ 的直線，也就是之前定義的切線。現在，切線有了圖形的、動態的意義。而因為

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

是當 x 和 c 的間距越來越微小的差分，所以稱為 $f(x)$ 在 c 的**微分**；微分的結果就是導數。

這時候的函數極限，就好像小學一年級的乘法算式或小學二年級的除法算式，其意義僅用來紀錄一個觀念或一個操作的過程。可以讓學生做一些練習，但切勿延伸，僅限於上述（可整除）之多項式分式形式，讓學生事實上使用綜合除法就能計算。注意，無窮數列的極限尚未出現，不要混在一起。

・極限的用途一：擴展導函數公式

用極限定義的導數，使得我們擴展導函數公式到多項式函數之外。一般而言，如果

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=q(x)\text{，其中 }x\neq c\text{。}$$

即使 f 和 q 都不是多項式，只要 $q(c)$ 是可計算的，就說

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=q(c)\text{。}$$

例如當 $f(x)=\sqrt{x}$，根據以上定義並運用平方差的技巧，就能推論 f 在 $c\geq 0$ 的導數。亦即

$$[\sqrt{x}]'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

這條公式倒是在高中有許多應用的可能性，特別是在物理科。

[以下未完]

將來學習了指數、對數、三角函數之後，就像日本的高中課程，可以沿用上述觀念，略過一些技術上的細節，告知學生這些「新」函數的導函數公式。如果這個策略能夠實行，則形如 $y'=-ky$ 和 $y''=-k^2y$ 這樣的基本而且具有明確意義的微分方程，就都能求解了。

連續複利與指數標準底，第五常數 e 的「發現」。

以上的論述當然牽涉到函數的連續性。但是，對初學者而言，太早顧慮不連續或不可微函數，實為不智之教學程序。只要我們不故意出不連續或不可微的題目來考學生，而限定在上述基本函數的範圍內，則可以暫時不討論那些細節。

・極限的用途二：瞬時速度的數學模型

前面關於微分的教學，完全在數學範圍內。在我們進入物理意義之前，應該要講解一個長期被數學和物理教師忽略的轉換觀念。而此課題（及下一節）的內容，可以在協商後全部移給物理課程（適度地重疊應該效果更好）。

微分均值定理（Rolle’s 定理）。

・積分就是反導函數，用來解最基本的微分方程

以下課題不要放在高一，可以配合指對數或三角函數的應用問題來講。事實上，平均速度是差分的物理意涵之一，在自然科學、經濟學、統計和許多其他學門中，都可以賦予差分一種**平均變化率**的意涵。物理中還可以舉虎克定律（配合牛頓的力學理論）和牛頓冷卻定律為例，在經濟學可以舉供需函數為例，指出差分之單位量的解讀方式，在高中生可想像的範圍內解釋其意涵（彈簧恢復力、冷卻定律和供需曲線，應該都屬此類）。

瞭解平均變化率之後，即可類推微分即可做為該現象之**瞬間變化率**的數學模型；微分的單位同於差分的單位。然後可以推導諸如 $y'=-ky$ 和 $y''=-k^2y$ 的微分方程。

・插值多項式去哪裡？（兼談多項式與線性代數的銜接）

切換到多項式之導函數和圖形局部特徵的課程軌道之後，插值多項式就不在思想的主軸上了。可以岔出一個枝節，從「兩點決定一直線」擴展到「三點決定一拋物線」，並介紹牛頓形式的

解題技巧。引用微分均值定理，可以證明 n 次方程式最多只有 n 個相異實根，再推論差值多項式的唯一性。但是此唯一性定理在高中階段幾乎不可實驗（不能解標準形式之插值多項式係數而確認與牛頓形式求得的相同），而且插值多項式在高中缺乏應用，可以簡化成僅限於「三點決定一拋物線」的技術即可。如果這樣，可以在開始發展泰勒形式之前，先完成這個枝節。

在數學 II 告知學生 $F_k(n)=1^k+2^k+\ldots+n^k$ 當 $k=1$ 的公式之後，可以用 $F_k(n)-F_k(n-1)=n^k$ 推論 $F_k(n)$ 是 n 的 $k+1$ 次多項式函數。這倒是一個做高次插值多項式的動機。先前學的牛頓形式可以派上用場，因為 $F_k(0)=0$ 而 $F_k(1)=1$，所以

$$F_2(n)=1+2^2+\ldots+n^2=a_3n(n-1)(n-2)+a_2n(n-1)+n\text{ ，}$$

依序代入 $n=2$ 和 $n=3$ 算出 a_2 和 a_3 之後，再將它轉回標準形式，和另一個熟知的公式（通常在「數學歸納法」的例題中出現）做比較，務實地讓學生認識插值多項式的唯一性。同樣的手法可以推論任何 $F_k(n)$ 的公式，但是不應該做太多這種練習。

事實上，插值多項式更適合與（三元或四元）線性聯立方程式的課程結合，用這套技術作為線性代數之基底變換以及線性映射的基礎範例。多項式在標準形式、泰勒形式、牛頓形式、拉格朗日形式之間的係數轉換，為線性代數提供了抽象層次中的最基礎範例。而多項式函數與導函數之間的係數變化，因為具備線性性質，所以也為線性映射的矩陣表達方式提供了抽象層次的基礎範例。

・複數去哪裡？

複數的引入，以及複數平面的發展、代數基本定理，可以全部移至選修。雖然在數學發展史上，複數早於向量。但是現在向量的使用比複數的幾何性質更普遍，而且是引入線性代數課題的必備知識，所以值得為此違反歷史的脈絡，在學習的軌道中，讓向量早於複數出現。

・定積分課程設計

就數學發展史看來，「求面積」相對於微分及反微分的觀念，本來就是另一支數學課題。這條脈絡無可避免地，須要放在無窮數列的極限以及夾擠定理之後。雖然 17 世紀前葉的費瑪和巴斯卡就已經有初步的成就，但是系統性的處理方法，還是用黎曼和較好。但是，盡量簡單地瞭解黎曼和想法之後，應盡快直接告知柯西積分定理，確定其收斂性並認識「求積」問題的解讀方式。此時，就像前面處理「極限」一樣，先暫時性地以定積分符號作為「記錄」一個觀念和程序的符號。

從黎曼和以及單位量的操作，讓學生明白「求面積」問題其實也是「求位移」問題。此時的學生已經學習過微分在運動學上的解讀，所以能訴諸於位移和速度的類比，在概念上直接講解**微積分基本定理**，正式讓「求積」問題和「反導函數」做成連結：

$$\int_a^b \dot{x}\,dt = x(b)-x(a) \quad \text{（位移就是結束位置與開始位置之差）}$$

若將參考坐標的原點放在開始位置，則得到另一形式的微積分基本定理。然後就接上了 99 課綱數甲 II 第二章在求面積或體積方面的定積分應用。

連結 $\int_0^1 x^k\,dx$ 與 $F_k(n)$ ，我們將可推論 $F_k(n)$ 的首項係數必為 $\dfrac{1}{k+1}$ 。

從微分和反導函數發展出來的數學課程脈絡，並不須要定積分。因此，定積分仍可放在選修數學，整個高中數學課程的後段。

・對考試和數學外部連結的影響

本文建議的數學課程，在高一就進入微分，並使得（特定形式的）函數極限成為學生可操作的工具。這將使任何自然科學、社會科學課程（不僅限物理）有更寬的內容彈性，也比較接近日本、新加坡的課程設計架構（尚不確定大陸和香港）。這也使得多項式的微分及其基本應用，變成了全體高中畢業生在學測中的測驗內容。因為微分觀念是 17 世紀科學思想的樞紐，可謂近代科技文明的轉捩點，值得考慮納入文、史、哲、藝術性向學生的基礎數學教育中，但應謹守學測題目的難度。更多的微分應用（微分方程）則可以用選修課程處理。

因為大家都在必修課程中先學了微分，社會組學生的選修數學，可以與自然組一樣地涉及定積分。現行的社會組高三下學期課程僅有極限而完全沒有微積分，使得學習較無應用的目標。將來可以考慮讓社會組的定積分課程偏重於機率分佈函數的意義解讀，讓老師們可以真正在數學模型上說明信賴區間的意涵，也讓社會組學生們做好進入大學統計課程的準備。而自然組的定積分課程，則可以大致如現行的內容。

・結語

本篇提議的微積分課程與教材設計，並非新創，反而比較接近微分與積分算法的歷史發展程序。我在陽關大道的旁邊，發現了一條很久沒有人走的古徑，稍事開闢之後，發覺它既平緩且優美，只是被今人遺忘了很久。我重新找出這條路徑，跟大家分享。