

中學數學教材教法的發展脈絡

單維彰¹ 鄭章華² 吳汀菱³ 曾明德⁴ 陳玟樺⁵

¹ 國立中央大學/副教授

² 國家教育研究院/助理研究員

³ 臺北市立中山女子高級中學/教師

⁴ 臺北市立南門國民中學/教師

⁵ 臺灣師範大學課程與教學研究所/博士候選人
新北市清水高中國中部/教師

摘要

本文先檢視中學數學教材與教法課程的現況與問題，並回顧過去半世紀以來對此議題有重大影響的五項要素。接著，試圖說明素養導向的教材與教法，如何承續、回應或轉化前述現象。最後提出對未來發展的期許。

壹、現況與問題

本節分別在中學數學科教材教法的課程、研究、新挑戰及考選方面，分析現況與指出問題。

一、關於師資生的教材教法課程

有些師培機構的「教材與教法」課程為合科授課，各領域師資生混班學習，教授只能給予一般性的指導，缺少針對中學數學的深入討論。有些機構雖然請到專業系所的教授支援「數學科教材教法」課程，但礙於系所教授多以數學研究工作為主，僅根據個人經驗而了解中學教育內容，導致比較著重數學知識 (CK)，而在數學教學知識 (PCK) 之著墨較淺。即使有幸請到參與教科書編寫或大考命題的教授，則在其經驗範圍內能給師資生深入的指導，但是在中學生的認知發展、十二年統整的課程架構、國家教育政策與理念的大方向、以及擔任教師所需的評量技術等方面，仍有可能不完整。

前述窘境的關鍵問題，應是缺乏針對國內中學數學課程編寫的中文數學教材教法專書。本團隊調查數學科教材教法的相關專書，自民國 51 年以來一共找到 22 本。其中包含論文集或特定理念的闡述，未必適合當作教科書。而教科書又大多專談小學數學，少數涉及中學者，僅及部分主題。專門論述中學數學教材教法的中文書籍，只有 3 本，其中最近的一本出版於西元 1992 年 (楊弢亮)；而有相當份量延伸至國中階段的最近一本，出版於西元 2005 年 (張英傑等)。

因為缺乏中文教材，許多教授因此分發研究論文當作參考資料。這些論文難免彼此缺乏關連結構，而且常常是英文文獻，都折損了教學的成效。更進一步看，即使前面所謂涵蓋「中學數學」教材教法的中文專書，也僅及於國中階段的中學，可謂沒有高中階段的。至於英文的研究論文，也幾乎如此。究其根本，乃是我國根據本身需求所做的中學數學教學「相關的研究不足」。以下是本文第二位作者所做的文獻調查簡報。

二、關於我國的中學數學教材教法研究

研究者查詢科技部的「學術補助獎勵查詢資料庫」，數學教育學門在民國78—106年這將近30年的時間裡，共補助810筆研究計畫；以「教學」為關鍵字來聚焦，共有82筆，約佔10%。相對於「科學教育類」共補助13,356筆研究計畫，以「教學」為關鍵字來聚焦，共有5,036筆，佔37.7%。從通過執行的計畫案來看，數學教育界在教學研究上的比例，遠不如科學教育界。不知是缺乏研究者投入？還是比較無法受到補助？

在「科學教育類」搜尋「數學教學」，發現科技部在近30年間共補助了193筆研究計畫。研究者深入檢視計畫摘要或是期末報告，發現與「中學數學教材教法相關」的有37筆，佔19.2%。其中以「教材教法」為計畫名稱的，只有林福來教授於民國86—88年執行之「教學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法」三年期計畫。同時發現，普高與技高的數學教學研究集中在民國82—90年之間；包括徐松梅教授執行的「模糊數學模式在高級工業學校數學教學評鑑之應用(I)」(民82)與黃大原教授執行的「網路多元數學教學模式的發展：高中職階段充實學習內容」(民90)。

上述少量的本地研究，產生了珍貴的成果，例如謝豐瑞教授(民91)的計畫期末報告，指出中學數學師資生有兩大數學教學知識方面的問題：一、職前教師缺乏理論與實務經驗來決定是否補充額外的數學教材，以及無法視學生的學習理解來安排數學內容、實例與練習的順序，或是適當安排數學內容或實例之間的對照和連結；二、職前教師缺乏充分的教學知識判斷在特定的時間點應提供學生什麼樣的評量題目，應評量學生哪些知識或能力，以及識別題目的特質為何。

此外，研究者查詢「臺灣人文及社會科學引文索引資料庫」，以「教材教法」為「題名」、「關鍵字」或「書刊名」來搜尋，自西元2000年以來，共得46篇論文，其中數學教材教法有7篇：小學4篇，國中3篇，高中沒有。在西元2001年有的兩篇關於國中數學教材教法的學術論文之後，直到2016年才有另外一篇同類論文，主題是差異化教學。

三、關於「教材教法」內容的挑戰

近年產生多種數學教師尋求活化教學的自發性共備社群，發展出模型、探索、桌遊、摺紙、魔術等，琳瑯滿目的教學活動，意圖提昇學生的學習興趣與成效。

這個現象提出至少兩種新挑戰：其一，如何評判這些活動的品質？其二，如何將這些活動確保在教學目標之內，並達成目標？

其次，在活動與教育以外，網路上也有許多教學視頻，甚至完整的線上課程也唾手可得。師資生與在職教師一方面需要思考如何善用這些資源，協助自己更有效地達成教學任務，另一方面也可以參考有效的教學典範，從中學習而自我成長。善用教學視頻的意識與技術，也許還有待系統性的研究與開發。

最後，數位化的數學工具，有可能輔助數學的學習，也可能反而減損了學習數學的動機。教師如何將它們形塑成數學教學中的積極角色、成為學生運用數學解決問題時的有力助手？都是未來的數學科教材教法必須提出有效指引的領域。

四、關於教檢與教甄

中學教師的資格檢定考試科目，甚至數學教師甄試內容，多半不牽涉數學科教材教法，導致師資生不太重視此門師培課程的學習。在此制度面上，也值得相關人士思考合宜的因應變革。

貳、脈絡與傳承

回顧過去半個世紀，對臺灣中學數學教育發生長遠影響的自身傳統與西方思潮，主要有以下五項元素：

1. 按照知識之間的內部結構而編排的塊狀課程，來自每個主題獨立一冊的早期教材，長期實施以來，教師認定其為固有的內容與順序。
2. 重實用、崇拜考試名次的傳統文化，前者蒙蔽數學在文化與思想層面的底蘊，後者過度強調數學成績的重要性，反而折損了理解與欣賞數學的機會。此外，對於考試「公平性」的深度執著，也是我國傳統文化的特徵。
3. 強調數學抽象性原理的「新數學」，認為數學的威力來自其抽象性，甚至引伸至數學為不可懷疑之真理。此觀念流傳至今的跡象之一，是教師以為數學課程的每個主題皆以嚴謹的數學內部邏輯銜接，而且在教學上必須先證明才應用。
4. 源自 1980 年代美國數學教師協會提出「數學即解題」(Mathematics as Problem Solving) 的數學價值觀與教學觀。直到今日，所謂探究式、啟發式之名的教學法，乃至於所謂數學閱讀的試題型文本，皆可視為此理念的流傳延展。
5. 源自認知心理學而在 1990 年後逐漸興起的建構取向教學理念，關於學生主體性與鷹架設計的思想，以及結合前項理念而生的探究式教學，皆屬此類。

以上每項元素，皆以某種程度融滲在數學教育的學術界與實務圈，不容否認也不能忽視。任何新的課程理念與教學設計，都有責任傳承前述元素，以對比、類比或延伸轉化的形式，予以回應。

而此時之十二年國民基本教育揭櫫的理念乃是「素養」，其源起亦來自西方，但這次不是美國而是西元 2000 年代的歐洲（西歐）。此一思潮的根本理念，著眼在政府提供給國民的基本教育，對於建立和諧有效的社會所應負起的責任。而此

一為「未來生活」做準備的務實教育觀，已經先傳入我國，表現在九年一貫「帶得走的能力」上。

參、素養取向

當代之數學課程與教材教法，將以素養為取向。然而教育事業不宜劇烈地革命，所謂素養取向也可以承接傳統而做合適的轉移。以下第一小節即談承接與轉化，而第二小節對素養導向的數學課程，做簡明的詮釋。此番重新編寫的《中學數學教材教法》，當為實踐本節理念盡棉薄之力。

一、素養的傳承與轉化

以下先針對前節的 1—5 項元素，做簡短的回應。然後說明十二年國教課程對九年一貫課程的承續。

- i. 從建構取向獲得的寶貴經驗之一，是學生的認知發展影響教學成效甚鉅。當中學生的數學認知發展缺乏心理學研究證據時，現在公認可行的作法，是參照數學發展史。將傳統的塊狀課程對照數學史，經常可以解釋學生長期表現出學習困難的主題段落，也比較容易獲得數學教師同仁，對於拆解數學課程的諒解。這一點，已經盡量在課程綱要的層次解決，但是課程的基本順序，仍大致沿用教師習慣的順序。
- ii. 在狹義範圍內，國內的大型考試持續朝素養目標改變，受讚賞的數學考題層出不窮，這些題型反而是領導教學變革的有效利器。在廣義範圍內，匡正科舉遺績以及扭轉讀書惟高的社會價值觀，乃是文化革命等級的工作，急不得也不得急，需謹慎而堅定地推行。
- iii. 數學的威力確實來自其抽象性，但這是數學思考方式的特質，而非數學技術的表象。在課程綱要層面，「新數學」已經被拆解殆盡，但是在教材層面（包括經審查的教科書）還有此殘念；特別需要協調的是教法。實務上，可贊同教師的抽象信念，但是要以兼顧實用性和學生認知發展作為平衡的信念。
- iv. 把「解題」轉化為「解決問題」，亦即將「題」的觀念從數學專家精心設計的絕妙好題，轉化成融入議題、跨學科領域、在生活職場科學與文化情境中具體呈現數學之概念、技術、與思維特質的問題。
- v. 如第 i 項所述，學習者認知發展的考量，已經部分反應在課綱綱要的層面。然而，每個階段的教師，應當在每一個單元的教材教法中，隨時關照學生的認知發展。

十二年國教依然注重「帶得走的能力」，而九年一貫也無意貶損知識內涵。所謂素養，在知識與能力之外，多關注了態度。就中學數學而言，態度可以在個人感受的情意面以外，著重在學生心中建立以下意識：

- (1) 數學是「有用」的。
- (2) 數學對科技文明的貢獻良多。

(3) 對周遭事物或現象多加敏察，很可能發現數學可以協助解決問題。

(4) 數學是文化表現之一，它影響一個人的思維方式和處世傾向。

數學領綱以「知、行、識」作為課程設計的架構，意即設計教案時，以這三個向度來協助一份教案的均衡。而此架構以知、行對應素養所謂的知識和能力，以「識」包裹「態度」。在教學中關注「識」的向度，持續而具體地在學生的心中建立前述意識。

二、素養導向之教材教法簡明詮釋

用「多重解析度」的方法來詮釋數學素養，最低解析度的說法，就是一言以蔽之的「為支持終身學習所需的數學知識、能力與態度」。在這個最基本的意義上，要將數學教育視為數學的「掃盲」工作：掃除數學文盲。一個人只要不是文盲，將來就有機會自學。所以，在數學素養的內容取捨上，課綱已經有所抉擇，但教師在課堂裡面對具有個別差異的學生時，最低程度可以用這個詮釋，作為內容判斷的參考。

來到第二層解析度，素養導向的教材與教法，還是著重在提升學生的學習動機以及促進有效的學習。只是舉出三種特別推薦的方法：

(1) 講人話。盡量以學生經驗範圍內的自然語言開始教學。

(2) 重脈絡。為每個新課題找到前置經驗，從那裡出發。

(3) 跨領域。走入生活，自然就會跨領域。既然我們相信數學無所不在，它就一定在我們的周圍。既然我們認定數學是科學的語言，就一定能在（自然、社會）科學裡找到數學。我們不是談課外的跨領域，主動在數學課程裡，取其他領域的知識作為學習動機或典型應用。

等到教師能夠輕鬆掌握第二層次，可以進入第三層次，那就是寫在數學領綱第一頁的五項理念：語言、科學、文化、有感和工具。再來，可以閱讀素養導向教學設計的六項原則（鄭章華，2016）。而解析度最高的參考文件，則是課綱說明手冊。

以上的數學素養詮釋傾向於內容向度，至於適合作為評量之參照的行為表現向度，則建議以教育部國民素養實施方案的數學素養研究報告為基礎（李國偉等，2013）。

肆、未來展望

本節以教師的數學認識觀和跨域協作兩個面向，闡述中學數學教學的未來展望，期望能喚起學界同仁予以重視。

一、以教師的數學認識觀作為教學信念的根本轉變

教師信念在特定的行動脈絡中潛在地影響教師的教學知識（Fennema & Franke, 1992），師資培育重點自也無法避免將教師信念（teacher's beliefs）列為關注

的重點。簡紅珠 (1996) 也提及，數學教師對數學本質的認知，及其對學生學習數學的信念，都會影響教學的實踐。因此，師資生以及在職數學教師本身的數學認識觀，可能是影響其教學信念及實際行動的最根本因素。數學領綱一再論述「課程綱要能夠支持素養的作為很少，唯有教師，才能將教學導向素養」便是此意。

然而，誠如張民杰 (2017) 所言，當前國內中等學校分科教材教法中主要涵蓋的內容，除了課程綱要、教案設計、教學策略方法、試教要領等外，其他的要素如教師信念與能力、勝任教師角色、教育理念等相關知能，卻較少有相關籌劃。事實上，國人對「數學」的刻板印象，經常僅體認其作為一門「利用符號語言研究數量、結構、變化、空間等概念」的學科，而較少體認其作為溝通媒介、思考方法、處事態度的文化特徵。是以，面對時勢急速變遷，數學教材教法除了仍需在技術層面持續調整、精進與改善外，更應積極協助準數學教師認識與發展其正向的教學信念。對於有效達成此任務的理論與實務作法，則需受到學界同仁適當的重視。

二、議題融入教學與跨領域課程統整下的數學教材教法新取徑—「跨域協作」

十二年國民基本教育的總綱和數學領綱，皆強調「議題融入數學領域」以及「跨領域統整性主題/專題/議題探究」的學習經驗。高中階段雖然以分科教學為原則，但亦得透過跨領域/科目專題、實作/實驗課程或探索體驗等課程，以強化跨領域或跨科的課程統整與應用。雖然 108 課綱開始實施之後，議題融入與跨領域統整的課程就已經起步，但是因為缺乏大宗的典範與普遍的經驗，實際的教材可能才同時開始產出，而教師的教學方法也才同步開始建立。

以往，數學學習之探究歷程無論於解題、推理與證明、溝通、連結上，多以實例進行解釋，且多具有「標準答案」。是以，在既有的數學教材教法參考書籍或手冊裡，自也多偏重以數學主題內容（數量關係、幾何、統計等）為教材，以系統化安排數學知識內容的教法。然而，在十二年國民基本教育的理念下，數學領域教學將遭逢的可能是學科界線的「交融」，也許要共同處理的會是一項可論辯、有選擇、以及需要行動實踐的「議題」。此議題可能無所謂唯一的「正確答案」，而更在乎找尋各種「可能答案」，而深入分析各種選項背後的觀點或假設，進行價值的澄清（教育部，2017）。是以，未來數學教材教法在勢必同步調整舊有之師資培育養成取徑。目前，較理想的作法仍是務實地進行「跨域協作」的實作；不過值得注意的是，究竟以學科本位進行知識統整，抑或以主題為中心進行學科統整，端視教學目標而定。

參考文獻

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏 (2013)。教育部提昇國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告。臺北市：教育部。

- 教育部 (2017)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校
議題融入說明手冊更新二版。取自 [http://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/
img/67/185528144.pdf](http://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/67/185528144.pdf)
- 張英傑、周菊美 (2005)。中小學數學科教材教法，譯自 John A. van de Walle，
Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally, 4th ed。臺
北市：五南。
- 張民杰 (2017)。中等學校分科教材教法課程綱要檢視報告。載於 106 年度工作坊
手冊：分科教材教法專書編輯計畫新課綱實施之中小學師資培育配套。台北
市。
- 楊弢亮 (1992)。中學數學教學法通論。臺北市：九章出版社。
- 鄭章華 (2016)。十二年國教數學導向教學模組之研修，載於單維彰、鄭章華主編，
素養導向數學教材。新北市：國家教育研究院。
- 簡紅珠 (1996)。師範學生對國小數學的學科知識與教學信念之研究 (報告編號：
NSC 84-2511-S-134-001)。行政院國家科學委員會。
- Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A.
Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A
project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (pp. 147-164). New
York: Macmillan.