

## 高中數學學科中心 109 研習

# 素養導向評量

## 種子教師研習

單維彰

國立中央大學師資培育中心與數學系

108 數學課綱高中組

民國109年1月15日

1

## 一脈相承

素養導向的數學評量，與向來認為  
「理想的」數學評量，並無太大差異。

- ◆ 「未來所需」的實用主義原則
- ◆ 從「解題」到「解決問題」
- ◆ 避免「人工難題」

2

## 教什麼就考什麼

評量是課程中不可分割的要素

- ◆ 課程綱要 OR 課程規劃
- ◆ 教材
- ◆ 教法
- ◆ 評量：前三項之實施成效的測量

3

## 評量的教育功能（複習）

評量在課程中...

- ◆ 作為改進學生學習的參考
- ◆ 作為修改課程之建議的憑據
- ◆ 作為補救教學的依據

4

### 數學作為鍛鍊心智的工具

十九世紀的概念，卻陰魂不散...

- ◆ 「人工難題」的存在價值
- ◆ 誤以為等於智慧
 

水心(1966)小學算術教學的新趨勢。教育與文化 344。
- ◆ 過當的篩選工具
  - 醫學系
 

張鎮華：「那是他們的權利，但大家要跳脫他們造成的困擾。」[2018-03-03]

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

### 評量不僅...還有...

- ◆ 不僅是常模參照，還有效標參照
- ◆ 不僅是總結性的，還有形成性的
- ◆ 不僅是紙筆測驗，還有態度的觀察
- ◆ 不僅要解非典難題，還要會做典型應用

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

### 評鑑試題的基本工具

- ◆ 邏輯效度：是否對準教學目標？
 

[共備、互審]
- ◆ 難度：效標 OR 常模
- ◆ 鑑別度：常模
  - ✓ 檢討試題或檢討教學
  - ✓ 題庫

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

### 評鑑試卷的基本工具

- ◆ 雙向細目表
  - ✓ 向度一：課程內容
  - ✓ 認知層次、難度、知行識
  - ✓ 素養的行為表現、情境的分類
  - ✓ 也許不只兩個向度 (color code)
- ◆ 組卷 vs 命題

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

## 素養評量的內容

- ◆ 不強制包含學科責任的評量
- ◆ 本著「未來所需」的實用主義原則
- ◆ 不等於「情境題」
- ◆ 情境切重常識，避免負面的潛在效果
- ◆ 留心避免：情境負荷

9

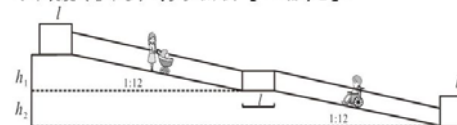
單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

## 情境負荷之例

題目引用真實文件，涉及專業語境。

- 坡道的中間應設置適當數量的平台，使得每段坡道的高差不超過 75 公分，且平台的水平長度至少 150 公分。
- 各平台之坡度不得大於  $\frac{1}{50}$ 。

圖一與圖二為側面示意圖，圖一摘自此規範書，圖二為圖一的簡明版，其中  $l \geq 150$ ， $h_1, h_2 \leq 75$ ；坡道之坡度相當於坡道斜率之絕對值。  
依上述規定，一條升高 2 公尺的無障礙坡道，在無轉彎的條件下，其最小可能的水平長度（含平台）為多少公尺？【104 指考乙】



10

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

## 專業語境之例

今有 21 人搭乘 3 艘船，每艘可載 7 人，  
若全部上船，共有幾種方法？

11

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

## 素養評量的形式

- ◆ 素養評量不是一種題型
- ◆ 測量素養導向之教學成效的工具
- ◆ 各「級」評量有自己的任務和目標，目的比形式重要
- ◆ PISA 可借鑑，但留意...
  - ✗ 15 歲（共同教育完成時）
  - ✗ 職能觀點的總結性能力評量

12

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

## PISA 之借鑑一：題組

- ◆ 正：容易分辨學生的認知層次
  1. 理解題意
  2. 典型應用，數學模型的基本演算
  3. 分析和批判
- ◆ 負：容易洩漏題意或者限制思維
  - ✗ 作答時間變長
  - ✗ 引導學生作答
  - ✗ 小題之間並不獨立

13

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

## PISA 之借鑑二：情境

情境是出於實用的需要，不要「硬拗」

PISA 的五種情境，值得參考：

1. 個人的
2. 公眾的
3. 教育的
4. 職業的
5. 科學的

老師教戰：題目裡第一個句點之前的字，全都跳過不要看。

(如果以上皆非，就可能是「硬拗的」)

14

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

## 「五類皆非」情境之例

某個手機程式，每次點擊螢幕上的數  $a$  後，螢幕上的數會變成  $a^2$ 。當一開始時螢幕上的數  $b$  為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近  $81^3$ 。試問實數  $b$  最接近下列哪一個選項？

[106 學測單選第 2 題]

15

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

## 數學素養之行為表現的關鍵詞

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能**辨識**問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當**工具與資訊**，去**描述、模擬、解釋與預測**各種現象，發揮**數學思維方式**的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效與他人**溝通**觀點。

16

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

## 描述、模擬、解釋與預測

- ◆ 數學教育「無法承受的輕」
- ◆ 過去缺乏這四個動詞的「問題意識」
- ◆ 亟待開發：教師共備社群

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

[ 17 ]

## 數學的思維方式

- ◆ 建立數學模型
- ◆ 發展「公式」
- ◆ 善用符號系統（天堂 vs 套房）

小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：  
 (甲) 每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次  
 (乙) 連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食  
 根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

[106 年學測第 7 題]

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

[ 18 ]

## 溝通

- ◆ 數學素養的最核心行為表現
- ◆ 形成性的實作評量
- ◆ 紙筆測驗只能倚賴非選題
- ◆ 題組中的「簡答題」

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

[ 19 ]

## 重點摘要 (1/2)

1. 評量的教育意涵
  - ✓ 莫忘「教育評量」的本意
  - ✓ 回顧可能被忽視的評量類型
  - ✓ 契合教學目標：命題效度、雙向細目表
2. 素養評量的形式與內容
  - ✓ 內容：為終身學習的國民而準備
  - ✓ 形式：向 PISA 借鑑——題組與情境
  - ✓ PISA 的五類型情境參考，避免情境負荷
  - ✓ 題組的認知層次功能，簡答

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

[ 20 ]

### 重點摘要 (2/2)

3. 數學素養的行為表現
  - ✓ 辨識、工具與資訊、溝通
  - ✓ 描述、模擬、解釋、預測
  - ✓ 數學的思維方式
4. 計算機融入評量
  - ✓ 盡量「自然」地在日常使用計算機
  - ✓ 容許攜帶與使用，跨出第一步
  - ✓ 從檢討舊題開始，逐漸發展新題
  - ✓ 大考准用與否，樂觀等候「日出」  
(雞生蛋還是蛋生雞)

單維彰, 素養導向評量 2020/01/15

### 置入行銷

《文化脈絡中的數學》  
新書發表會  
2.5.2020(三)  
18:00-18:45  
世貿一館二樓夢想沙龍

主講 單維彰  
國立中央大學  
數學系暨師資培育中心  
副教授

主持 李瑞騰  
國立中央大學  
中文系教授兼人文中心主任、  
中大出版中心總編輯

2.4-2.9  
2020台北國際書展  
國立大學出版社聯展

單維彰, 素養導向評量 2020/01/15

### 學科中心優良試題研發計畫

臺北市立北一女中	蘇麗敏老師	臺北市立陽明高中	王聖淵老師
國立臺東高中	王玟綺老師	臺北市立成淵高中	汪雅芬老師
國立華僑高中	蘇敬賢老師	桃園市新興高中	施琇敏老師
新北市立光復高中	周靜慧老師	臺中市立忠明高中	王曉鳳老師
新北市立林口高中	何思穎老師	臺中市立臺中女中	蘇彩琳老師
臺北市立北一女中	廖培凱老師	國立臺南女中	姜培元老師
臺北市立成功高中	陳彥宏老師	國立高師大附中	歐志昌老師
國立政大附中	賴政泓老師	高雄市立左營高中	魏光旺老師

單維彰, 素養導向評量 2020/01/15

### 工作項目一：有疑題型之議

108 課綱的實施，不論在教學內容與學習表現上都與舊課綱（99 課綱或更早期的版本）有著顯著的差異，教學上改變了，對應到的評量試題自然也有所不同。本文針對大多數高中一年級第一學期的期末考範圍：「多項式函數」，以 108 課綱的觀點檢視舊課綱的教科書、習作、學測與指考相關試題，指出超出新課綱的題型，就教於數學教師夥伴們，請斟酌貴校學生的學習狀況，避免在校內高一定期考（期中考、月考、段考）選用本文提出的題型。

- ◆ 先驗 (a priori)
- ◆ 陸續出刊 (高中數學電子報)

單維彰, 素養導向評量 2020/01/15



### 例 1/6：明顯不符綱要

1. 使用綜合除法求  $2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x - 5$  除以  $2x - 1$  的商式及餘式。  
【說明】。

本題型內容涉及到「一次除式的領導係數非 1 的綜合除法」。違反 108 課綱 A-10-3 餘式定理與因式定理中所提的綜合除法之除式僅作  $x - a$  即可，不必推廣到  $ax - b$  (其中  $a \neq 1$ )。

◆ 有些同仁不諒解

但是，對於此題的品味判斷，實為素養或學科導向的典型示例。

◆ 不是因為「沒用」，是「非素養導向」

沒有「絕對沒用」的數學。但教育是一種工程，需在限制條件下追求最高可能的成效。

25

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

### 例 2/6：不宜用於此時

6. 平面上兩點  $A$ 、 $B$  之距離為 5，以  $A$  為圓心作一半徑為  $r$  ( $0 < r < 5$ ) 的圓  $\Gamma$ ，過  $B$  作圓  $\Gamma$  的切線，切點 (之一) 為  $P$ 。當  $r$  變動時， $\Delta PAB$  的面積最大可能值為\_\_\_\_\_。(化成最簡分數)。**【107 學測 (選填 7)】**  
【說明】。

此題以圓與切線包裝，雖需有「圓心與切點的連線垂直此切線的觀念」，但此觀念為 9 年級的內容 (S-9-7)，也沒有談及直線或圓的方程式。此題雖然在圖像上有出現圓，但解題上並未使用到圓方程式，反而可以用算幾不等式、配方法或是二倍角公式來求解，而它們都不屬於 10 年級直線與圓單元的課綱條目範圍。此題型不建議於「直線與圓」單元進行評量，建議可在高三作為綜合性評量試題。

◆ 時而言

「Timing is Everything」。

「知無不言，言無不盡」並非教師的美德。

26

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

### 工作項目二：優良試題推介

這是 108 新課綱實施的第一年，108 課綱不論在次序的安排上、以及素養精神上，與 99 課綱在各單元上，多多少少是有些差異的，為了讓教學現場第一線教師們有互相交流觀摩的機會，數學學科中心廣邀全國各高中分享高一第一學期第二次定期考試題，由於各版本課綱編排順序有所不同，本次選題以大多數學校的考試範圍「直線與圓」為主。學科中心選出 10 所學校，經由指導教授及試題小組成員共同討論，挑選出優良試題，供教師們參考。

◆ 後驗 (a posteriori)

◆ 108 學年蒐集，編寫。109 學年陸續出刊。

27

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

### 例 3/6：基礎重要

如右圖，已知直線  $L: y + 2 = m(x - 1)$ ，試問當直線  $L$  通過以下哪個點坐標時，斜率  $m$  最小？

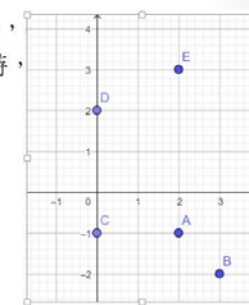
- (1)  $A$  (2)  $B$  (3)  $C$  (4)  $D$  (5)  $E$

出處：中山女中。

修辭斟酌「已知...」

「如右... 以下」

如右圖，試問當直線  $L: y + 2 = m(x - 1)$  通過圖中哪個點時... ?



28

單維彰 - 素養導向評量 2020/01/15

### 例 4/6：基礎重要

利用計算機可以找出四位小數  $L$ ，使其滿足  $10^L$  與 2 的誤差小於 0.001。試問滿足以上條件的  $L$  有幾個？

(1) 1    (2) 2    (3) 3    (4) 4    (5) 5

【大園國際高中】

有「形成性評量」的氛圍。

「誤差」內含絕對值概念。

(29)

### 例 5/6：新穎創意

坐標平面上有二圓  $C_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ， $C_2 : (x-7)^2 + (y+2)^2 = 2$ ，若直線  $L$  將這二圓  $C_1$ 、 $C_2$  的面積同時平分，則直線  $L$  的斜率為下列哪一選項中的數值？

(1)  $\frac{2}{3}$     (2)  $-\frac{2}{3}$     (3) 0    (4)  $\frac{1}{2}$     (5)  $-\frac{1}{2}$

出處：臺中一中。

未刻意增加評量目標以外的複雜度：給標準式，毋須配方。

(30)

### 例 6/6：新穎創意

已知一個人的體重與所在星球的重力加速度成正比，且地球的重力加速度為  $9.8\%g$ 。天文館有一個體重計，站在上面即可顯示在地球和在木星上的體重數值。若此體重計顯示在木星的體重約為在地球的  $x$  倍，且與理論值的誤差不超過  $k$ 。若  $x$  滿足  $|x-2.53| \leq k$ ，試回答以下問題。

(1) 木星的重力加速度理論值約為 \_\_\_\_\_  $\%g$ 。（取三位有效數字）。

(2) 今有一對姊弟和父母去量體重，呈現出的體重數值如下表。

	弟	姊	母	父
地球（公斤重）	20	40	50	80
木星（公斤重）	50	102	127	202

依照父母姊弟量測的體重數值判斷， $k$  的值至少為下列哪一個選項？

(A) 0.0003    (B) 0.003    (C) 0.03    (D) 0.3    (E) 3    【北一女中】

誤差的意涵、有效位數。

(31)

# 請提出討論...

(32)