

國立中央大學

數學研究所

碩士論文

血壓與交感神經活性訊號  
關係的數學模型

研究生：陳柏成

指導教授：單維彰博士

中華民國九十三年七月九日



# 國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(93年5月最新修正版)

本授權書所授權之論文全文電子檔，為本人於國立中央大學，撰寫之碩/博士學位論文。(以下請擇一勾選)

- (  )同意 (立即開放)  
(  )同意 (一年後開放)，原因是： \_\_\_\_\_  
(  )同意 (二年後開放)，原因是： \_\_\_\_\_  
(  )不同意，原因是： \_\_\_\_\_

以非專屬、無償授權國立中央大學圖書館與國家圖書館，基於推動讀者間「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、公開陳列、與發行，或再授權他人以各種方法重製與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名： 陳 柏 成

論文名稱：血壓與交感神經活性訊號關係的數學模型

指導教授姓名：單 維 彰 博士

系所：數學 所 博士 碩士班

學號：91221017

日期：民國93年7月9日

備註：

1. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
2. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應依著作權法相關規定辦理。

## 摘要

許多心血管系統疾病與自主神經系統的活性息息相關，但若要對自主神經活性進行直接偵測，則往往必須經過傷害性較大的手術，如此一來則失去醫療本意。因此發展出一種傷害性小且能忠實反應自主神經活性的方法就顯的非常重要。

在所有描述心血管系統的參數中，心跳速率和血壓功率具有容易量測和操作過程幾無傷害等特性。而自主神經系統中的交感及副交感神經交互作用，則對此二數值有決定性的影響。因此在本論文中選擇以血壓功率和自主神經系統中的交感神經活性作為觀察的對象。

本論文總共分為五章，前面三章主要是推論有未受刺激訊號比對時的情形。第一章主要是將原始生物訊號作簡單的基本處理，並且作了未受刺激訊號的穩定性檢測。而第一章的結果，提供了第二章建構血壓變動量和交感神經活性數學模型的模擬依據。在第三章中，則是進一步利用建構的數學模型及生物上觀察到的現象，推論血壓變動量和交感神經活性之間的關係。在第四章中，則推論了沒有未受刺激訊號比對時的情形，其操作步驟和推論方式則與有未受刺激訊號比對時是完全相同的。最後在第五章中則呈現了數據分析的結果與討論。

本論文之主要結論有四點，一是找到符合生物現象並可用以推論的數學模型；二是建構受刺激血壓變動量數學模型，驗證了血壓於受刺激狀態下出現的起伏，只是數個相同受刺激血壓波形疊加出來的效果，並沒有因為刺激的關係產生其他的變化；三是以數學解釋了生物上觀察到的血壓和交感神經比值的對數，大約呈線性關係的現象；四是推論出血壓受交感神經活性影響後，其變動持續時間會維持約 4 到 6 秒。

## 致謝辭

辛苦了半年多來，終於也到了完稿的階段，寫致謝辭的這一刻。厚厚的一本數學論文可不是，在不斷改版的過程中，看著正文由二十幾頁、四十幾頁、六十幾頁到現在的近八十頁。心中還真有股莫名“初為人父”及“吾家有女初長成”的感動。

得一深具創意的良師是我碩士班求學過程中最大的幸福，感謝持續指引我的指導教授 單維彰老師，謝謝他能撥出寶貴時間引領我思考問題，適時的給予啓發和學期的機會，並教導我做學問應有的心態，甚至不厭其煩地校正本論文文稿，謹在此致上最深的謝意！

感謝另一深具關愛、包容與信任的指導教授 蔡孟利老師，蔡老師豐富的生物學養與經驗，讓我彷彿像是站在巨人的肩膀上，可以從數學的領域遠望生物領域之廣博。

同時，也感謝口試委員 于振華老師以其精闢的分析與創見提供許多寶貴的意見，使本論文得以更加周延與完備。

兩年的研究生生涯就要在本論文的完稿中結束，感謝同屆全體中大數學系碩士班同學們的陪伴，曾任教半學年計概的全體中大英文系 93 級學弟妹們的加油打氣，系辦賴小姐、美珍姊與圖書室孫小姐的關懷問候與技術支援，以及一路關心支持我的李元隆同學、李易霖同學、李澄賢同學、施柏如同學、施翔文同學、洪志宗同學、洪采筠同學、鄧錦程同學、陳宣(人予)同學、陳鴻儒同學、陳毓成同學、張琇雅同學、鄒承男同學、褚煜凱同學、羅文仁同學 ... 等一票本校外校同學們，讓我的研究生生活變得多彩多姿。

最後，要感謝我的家人，謝謝他們時時付出的關懷與體諒，讓我能無後顧之憂地完成學業，更謝謝他們給我的鼓勵與支持。

甲申年孟夏於中大

# 目錄

<b>1</b>	<b>生物訊號取得與基本處理</b>	<b>1</b>
1.1	背景介紹 . . . . .	1
1.2	原始生物資訊對照 . . . . .	3
1.3	未刺激狀態下訊號之穩定性檢測 . . . . .	14
<b>2</b>	<b><math>BP_{NP}^*</math>、<math>SNA_{NF}^*</math> 數學模型之建構</b>	<b>17</b>
2.1	欲用來模擬之數學模型介紹 . . . . .	17
2.2	$BP_{NP}^*$ 數學模型之建構 . . . . .	21
2.3	$SNA_{NF}^*$ 數學模型之建構 . . . . .	28
<b>3</b>	<b><math>BP_{NP}^*</math>、<math>SNA_{NF}^*</math> 間關係之推論</b>	<b>35</b>
3.1	$BP^*$ 、 $SNA^*$ 間可能的延遲時間 . . . . .	35
3.2	$BP_{NP}^*$ 、 $SNA_{NF}^*$ 於不同振幅、持續時間與延遲時間下 之關係 . . . . .	39
3.3	$BP_{NP}^*$ 、 $SNA_{NF}^*$ 兩者間關係之數學推導 . . . . .	43
3.4	$BP_{NP}^*$ 與 $SNA_{NF}^*$ 振幅與持續時間關係之推論 . . . . .	53
<b>4</b>	<b>無未受刺激訊號比對時之受刺激訊號推論</b>	<b>59</b>
4.1	原始生物資訊之基本處理與數學模型建構 . . . . .	59
4.2	無未受刺激訊號比對下 $BP_{NP}^*$ 與 $SNA_{NF}^*$ 振幅與持續 時間關係之推論 . . . . .	70
<b>5</b>	<b>數據分析結果與討論</b>	<b>76</b>
	參考文獻	79

# 第 1 章 生物訊號取得與基本處理

## 1.1 背景介紹

許多心臟血管系統的疾病和自主神經系統的活性息息相關，例如高血壓、心臟衰竭及冠狀動脈病變等等。若要對內臟自主神經活性進行直接偵測，則必須經過傷害性較大的手術，於實驗動物或可為之，但用於人身上，則失去醫療之本意。因此對臨床醫學而言，發展出一種傷害性小且能忠實反應自主神經活性的方法就顯得非常重要，心跳速率及血壓功率頻譜分析技術，即是針對此一目標所發展之研究。

心跳速率和血壓功率在所有描述心臟血管系統運作的參數中，具有較容易量測且操作過程幾無傷害等特性。自主神經系統對於此二數值的大小有著決定性的影響，其中交感及副交感神經間的交互作用，於短時間內維持此二數值的恆定。此即以心跳速率或血壓功率的頻譜分析偵測自主神經活性的立論基礎。

在此選擇以血壓功率和自主神經中的交感神經活性作為觀察之對象，而若要以血壓功率的頻譜分析做為交感神經活性的指標，則有兩個問題必須解決：一是找出血壓頻譜中交感神經所能影響的頻率範圍，二是找出這些頻率範圍內的功率大小和神經活性間的定量關係。在 [4] 這篇論文中，結果顯示交感神經所能影響的頻率範圍大約是 0.02 到 1.7 Hz 之間，並且發現特定頻率的交感神經活性變動會造成同頻率的血壓變動。但隨著頻率的增加，因交感神經作用所導致的血壓變動量則呈指數下降的現象。我們可進一步用下式來描述老鼠血壓頻譜功率和交感神經活性頻譜功率之間的關係。

$$P_{BP} = 10^{1.3} \times P_{SND} \times 10^{-4.7 \times (\text{frequency})} \quad (1)$$

此時之血壓頻譜的功率代表單純因交感神經作用而導致的血壓變動量，所以此式亦可代表交感活性變動量和 sympathetic modulation of vasomotor tone 之間的關係。此結果顯示了與以往不同的觀點：一是交感神經活性對血壓各頻率變動量的影響並非等價的，其轉換效率是隨著頻率的增高而迅速降低；二是老鼠血壓頻譜中能受交感神經作用的頻率區並不限於某一小段頻率區，而是廣泛的從 0.02 到 1.7 Hz 左右均有可能。此結果類似於 Stauss 等人 [3] 的實驗結論。其預埋電極於老鼠的 splanchnic nerve，待老鼠清醒後再以不同頻率之電流刺激，結果發現以前認為無關交感神經作用的血壓頻譜高頻區，交感神經也有可能涉足其間。

論文 [4] 得到上述結果，而其依據的概念是：延腦是交感神經活性控制的中樞所在，若是於此找到交感神經的興奮區，並加以不同條件的電刺激，同時記錄周邊的交感神經活性，就可以達到控制及記錄交感神經活性的目的。若再輔以手術或藥物控制副交感神經、感壓反射及呼吸作用等對於血壓的影響因素，就能較準確的測定交感神經所能影響的血壓頻率範圍。而這樣的實驗設計既能定量交感神經活性，也可以得到近乎純粹由交感神經作用而改變的血壓頻譜。

上述是在控制了大部份和血壓變動有關的因素後所得到的結果。而更進一步的問題則是若沒有控制這些因素，血壓和交感神經活性兩者的變動量會不會出現如上的關係呢？論文 [5] 結果顯示，此狀況下的血壓及交感神經變動量之間亦出現類似之關係式，但其常數項則有所變動。這些常數項可能受到麻醉劑、angiotensin II 或其他非神經性因素的影響。

綜合此兩部份的實驗結果，確定了交感神經所能影響的血壓頻率範圍並非如前人所述為一狹窄的範圍，而是從接近零到與呼吸頻率相當之頻寬帶皆可為作用區。分析交感神經及血壓變動量的轉換函數與

頻率之間的關係，更得到一個由血壓頻譜估計交感神經活性低頻變動量的公式。在此即嘗試以數學模型模擬血管在接受交感神經刺激後的血壓反應模式，包括神經刺激量與血壓反應量比、血壓反應延遲時間、血壓反應持續時間與刺激頻率間之關係，以推測決定此關係式的主要因子為何。

以下為閱讀上之方便性，將血壓 (blood pressure) 簡稱 BP；而交感神經的活性變動 (sympathetic nerve activity) 簡稱 SNA。

## 1.2 原始生物資訊對照

老鼠在手術切除迷走神經、去除感壓反射、施以神經-肌肉偶和的阻斷劑 gallamine， $\beta_1$ -adrenoceptor 的阻斷劑 atenolol、angiotensin II converting enzyme 的抑制劑 captopril 及以人工呼吸器控制呼吸頻率及強度後，使用不同條件的電刺激興奮老鼠延腦的交感神經興奮區，並且同時記錄腎交感神經活性與股動脈血壓變動量；以下使用同一隻老鼠在未受刺激狀態下之記錄 (圖 1) 和受刺激狀態下之記錄 (時間同為 63.312 秒)(圖 2)，兩相比對並作以下之處理後，作為往後數學模型模擬受刺激狀態下的參考和驗證的依據。

為明顯比較訊號在未受刺激狀態和受刺激狀態間的差異，在不影響訊號本身性質的前題下，對 BP 和 SNA 進行以下“簡化”、

“求基準線”和“正規化”之基本處理：

### 1. 簡化 BP 和 SNA 之訊號圖

為了觀察 BP 波形上受刺激後能量的變化情形，於是藉由時間點上適當的逐段選取，取其所對應時間區段內之曲線下面積，則此面積的變化情形即為負載能量上的改變，在此我們稱這種經過逐段選取，並計算出各小段面積的圖形為 - 能量圖。



BP 能量圖的作法：將 BP 圖形上兩相鄰間最低點的間隔時間作為選取時間，並對這些選取的時間段分別求其對應時間內的曲線下面積，再將此求出之面積值對所對應的時間長度作平均 (圖 3、4)。

簡化 SNA 訊號圖的作法：SNA 的波形由於較不規律，所以無法像 BP 一樣有效地判斷兩相鄰間最低點的間隔，求 SNA 的能量圖。於是改成取其低頻，亦即將 0.8 Hz 以上由呼吸和其他不相干訊號所造成的高頻先濾掉 (圖 5、6、7、8、9、10)。以下稱經過上述處理之 SNA 訊號圖為 SNA 濾波圖。

## 2. 找出 BP 和 SNA 之基準線

為了瞭解訊號圖上 BP 和 SNA 在受刺激狀態下和未受刺激狀態下，能量上提高了多少，因此需要在未受刺激的狀態下，找一條基準線，以作為和受刺激狀態相比較的依據。在未受刺激狀態的能量圖上，找基準線的方法如下。

BP 基準線的作法：將未受刺激狀態下的 BP 能量圖上各起伏的最低點收集起來，並將這些數值作小數點下第二位四捨五入，找出四捨五入後的眾數 (73.6)，此即 BP 之基準線值 (圖 11、12)。

SNA 基準線的作法：同 BP 找基準線的作法，將未受刺激狀態下的 SNA 濾波圖上各起伏的最低點收集起來，並將這些數值作小數點下第五位四捨五入，找出四捨五入後的眾數 (0.0021)，此即 SNA 之基準線值 (圖 13、14)。

## 3. 將上述所得的結果正規化

在不改變原來波形的前提下，為方便往後之觀察與數學模型的驗證，分別將上述所記錄的值作正規化 (Normalize) 處理。正規化方式如下：

BP 正規化作法：將受刺激的 BP 能量圖減去 BP 基準線 (73.6)，再除以未受刺激狀態下的 BP 能量圖標準差 (2.028) (圖 15)。

SNA 正規化作法：將受刺激的 SNA 濾波圖減去 SNA 基準線 (0.002)，再除以未受刺激狀態下的 SNA 濾波圖標準差 (0.0004) (圖 16)。

觀察受刺激狀態下的 BP 正規化能量圖和 SNA 正規化濾波圖，可以明顯看出各有數個異常的高起，此即生物在受刺激狀態下 BP 和 SNA 能量上的變化。此異常的高起除了振幅和持續時間有些不同外，兩者的發生時間也有一些差異。已知在受刺激狀態下 BP 能量上的變化主要是受 SNA 變化的影響，所以若能藉由適當的數學模型來模擬受刺激狀態下 BP 和 SNA 的反應情形，並進一步建構完整的受刺激狀態下 BP 和 SNA 數學模型，便能藉由 BP 和 SNA 數學模型上參數的調整，找出兩者振幅、持續時間和時間差的關連性，並進而以較無傷害性的血壓量測推測自主神經活性的變化。

以下將受刺激狀態的訊號，於上標處記 \* 表示，能量圖於下標處記 P 表示，濾波圖於下標處記 F 表示，正規化於下標處 N 表示。例如：未受刺激狀態下之 BP 能量圖記作  $BP_P$ ，未受刺激狀態下之 SNA 濾波圖記作  $SNA_F$ ，受刺激狀態下之 BP 訊號圖記作  $BP^*$ ，受刺激狀態下之 SNA 訊號圖記作  $SNA^*$ ，受刺激狀態下之正規化 BP 能量圖記作  $BP_{NP}^*$ ，受刺激狀態下之正規化 SNA 濾波圖記作  $SNA_{NF}^*$ 。

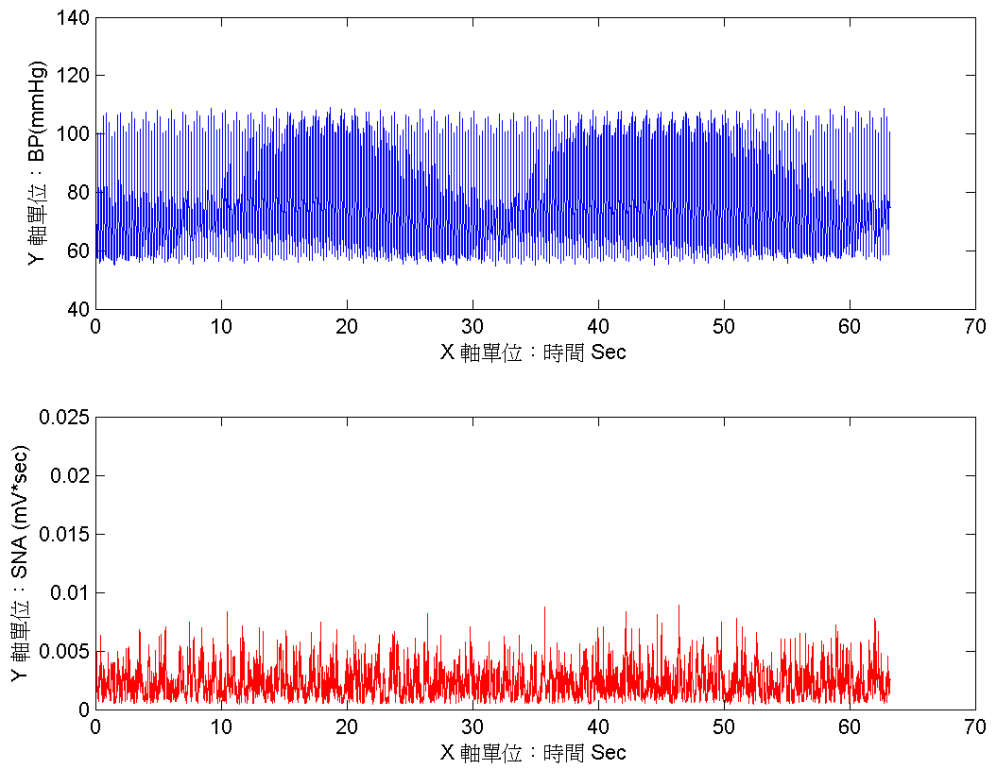


圖 1: BP、SNA 未受刺激狀態下之生物原始訊號圖形 (總時間長度為 63.312 秒，取樣頻率 128 Hz)

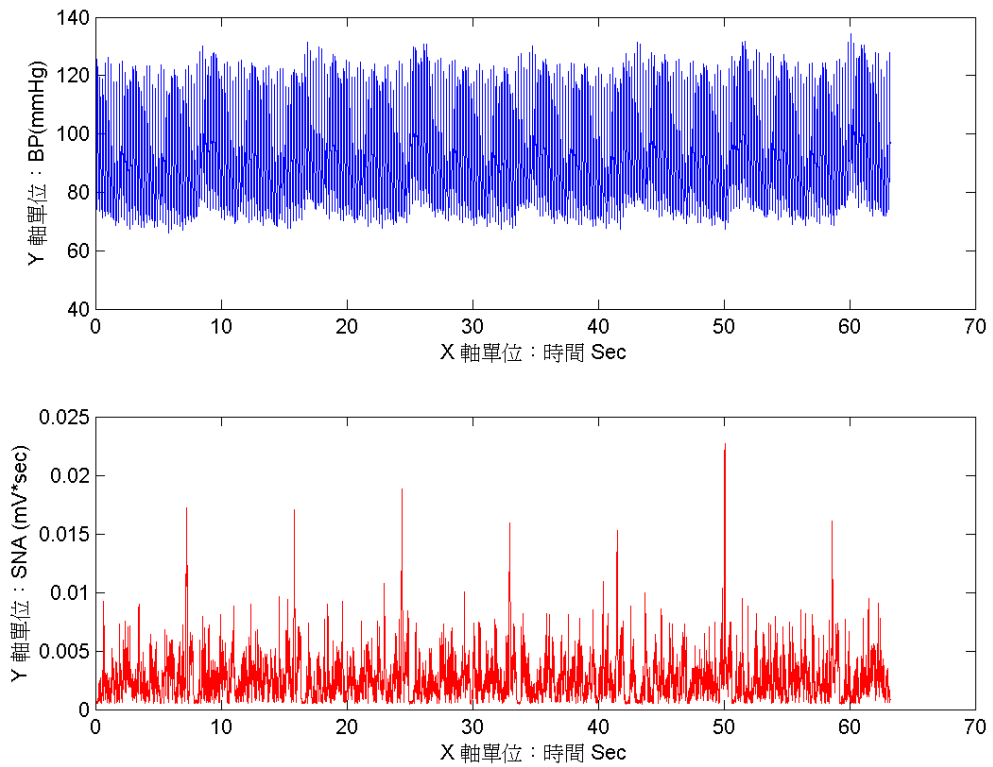


圖 2: BP、SNA 受刺激狀態下之生物原始訊號圖形 (總時間長度為 63.312 秒，取樣頻率 128 Hz)

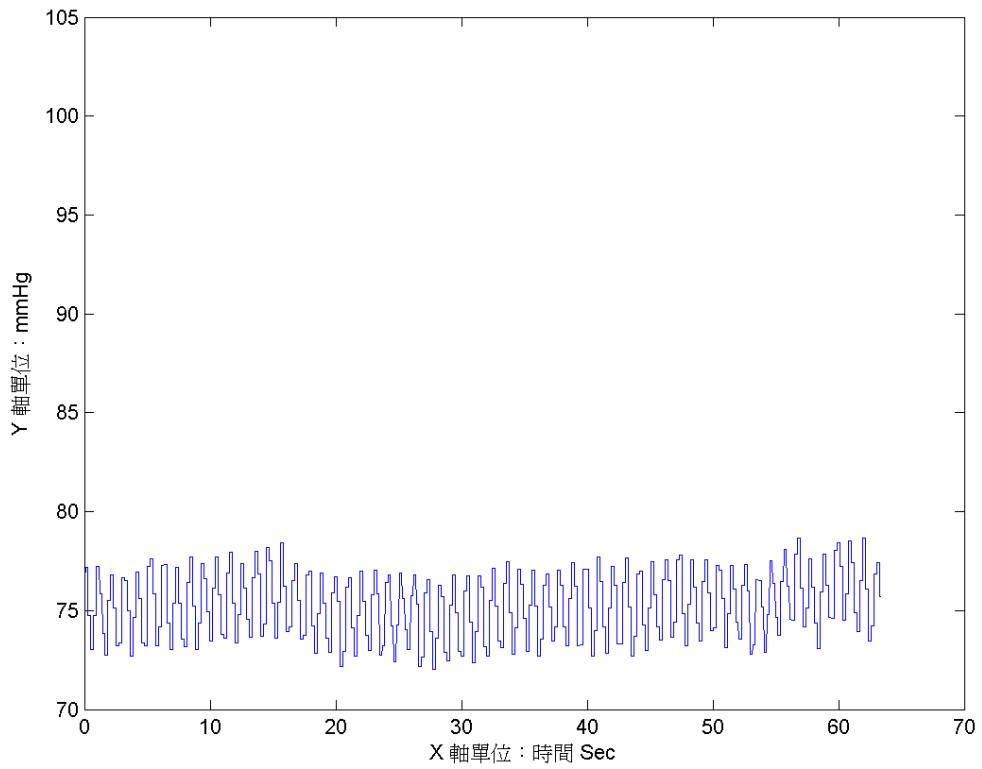


圖 3: 未受刺激狀態下的 BP 能量圖

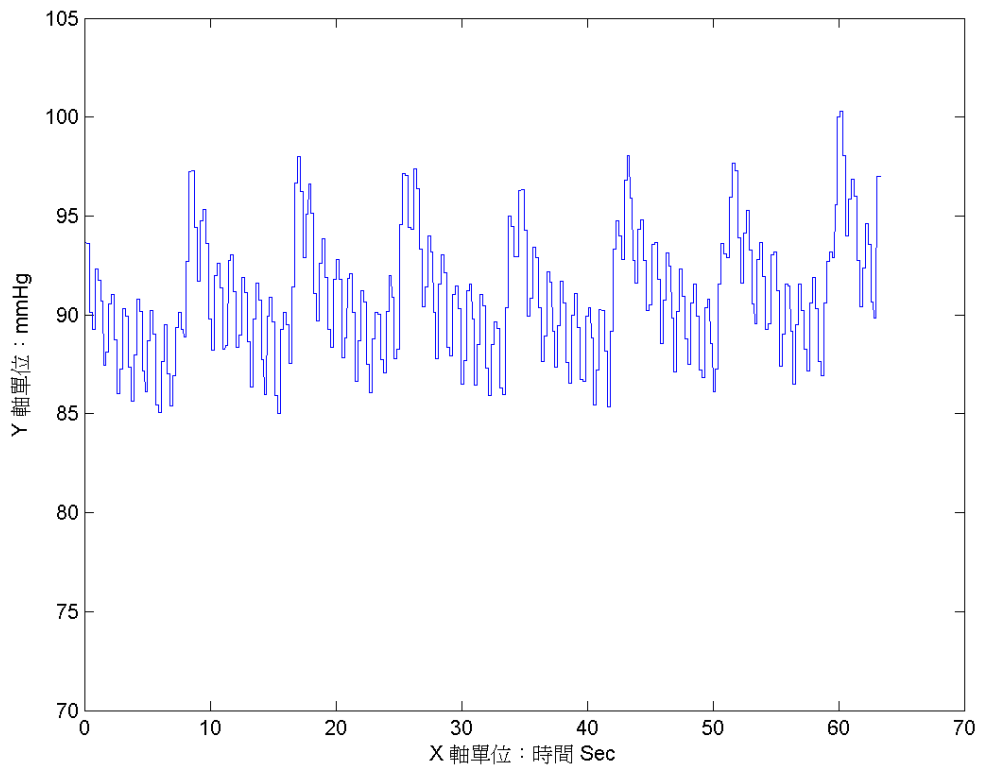


圖 4: 受刺激狀態下的 BP 能量圖

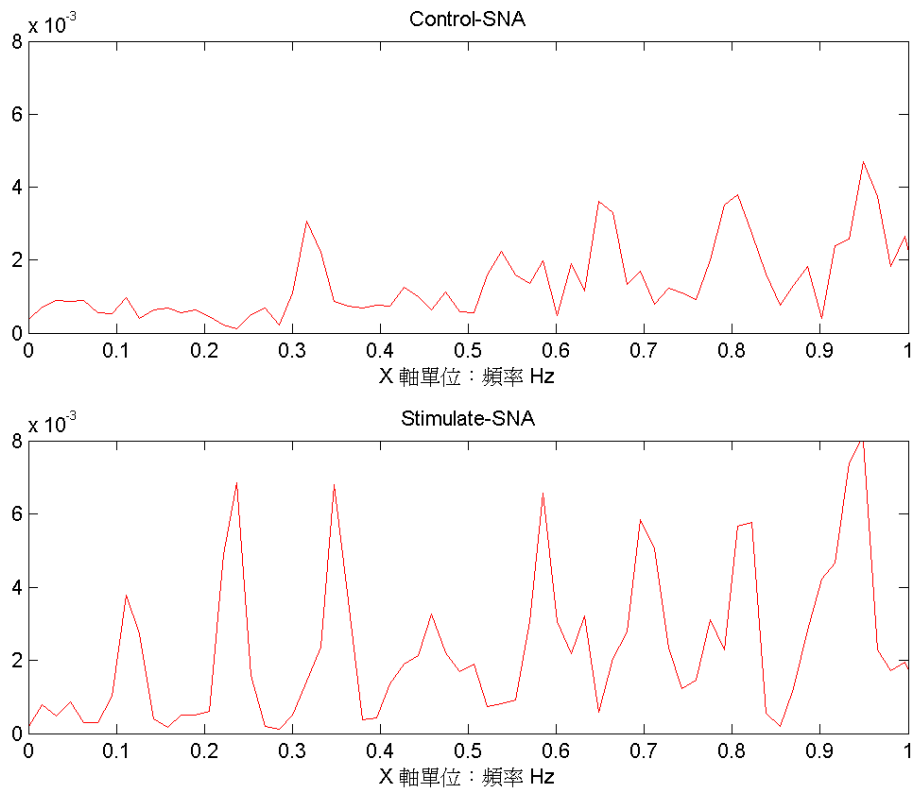


圖 5: 未濾波前頻率 0 到 1 的未受刺激 SNA 和受刺激 SNA 頻譜圖

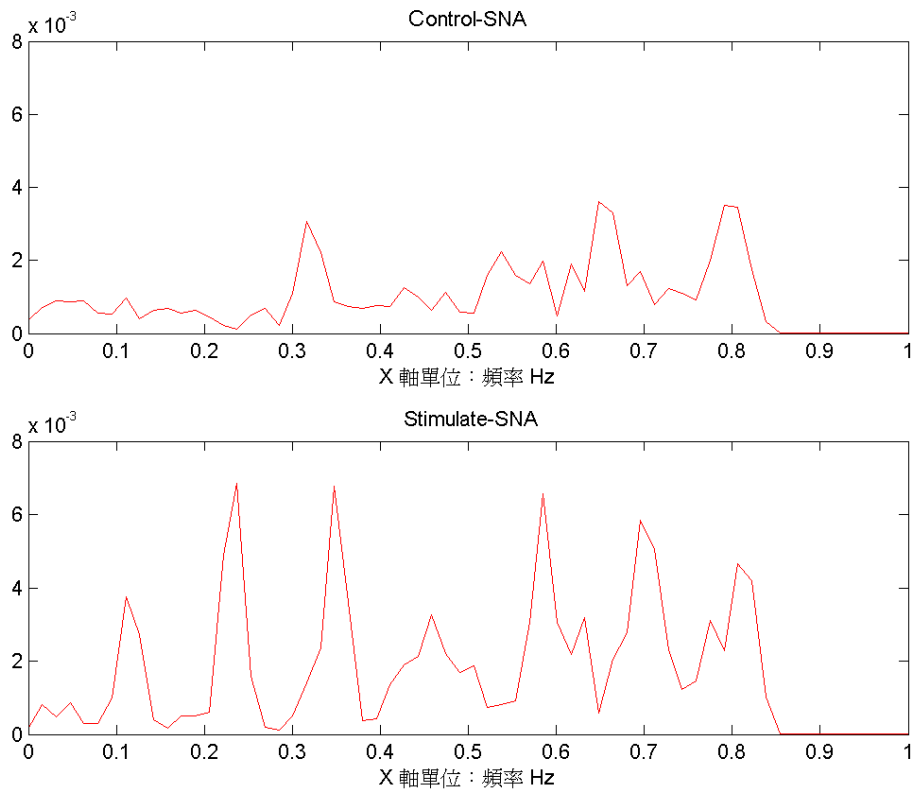


圖 6: 濾波後頻率 0 到 1 的未受刺激 SNA 和受刺激 SNA 頻譜圖

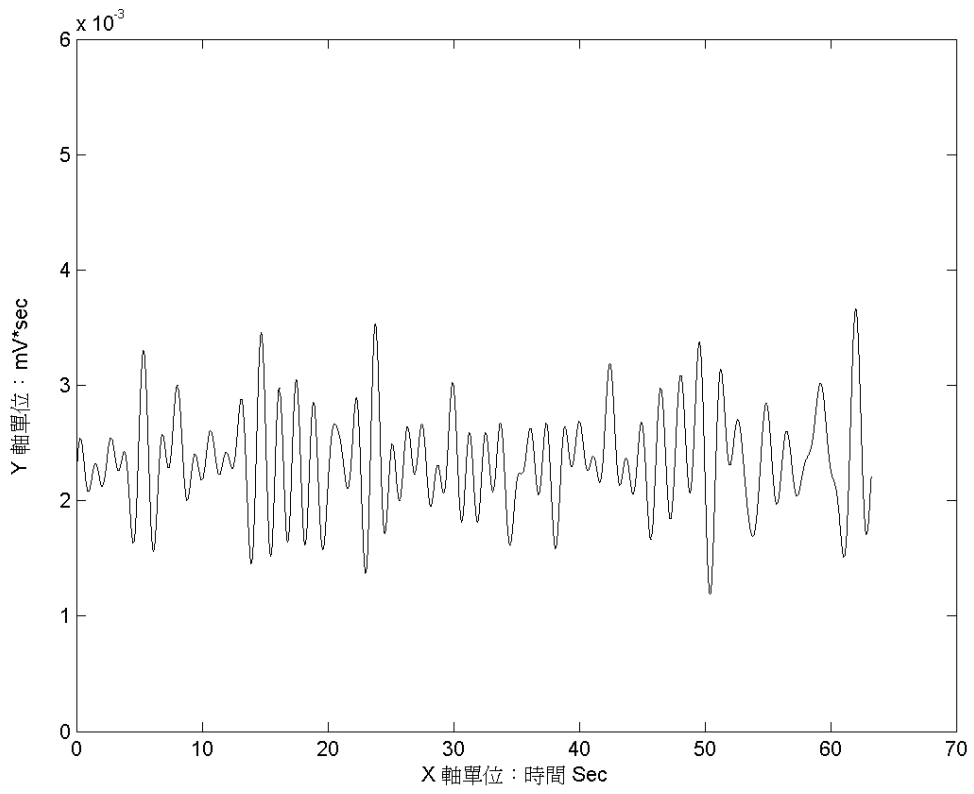


圖 7: 未受刺激 SNA 濾波圖

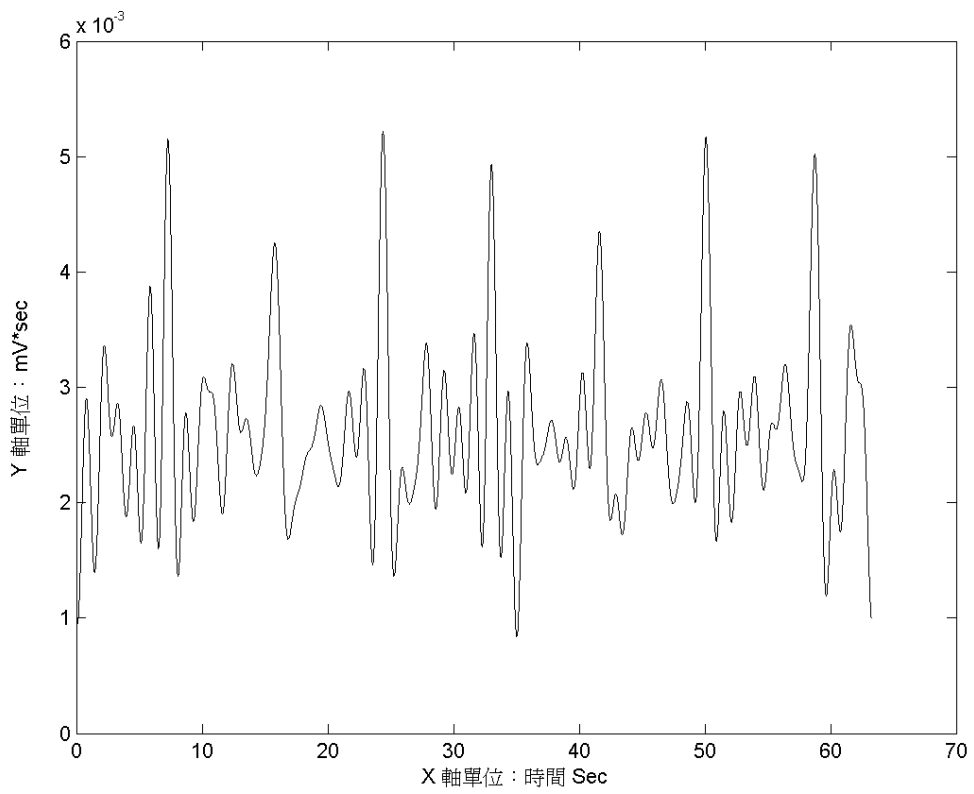


圖 8: 受刺激 SNA 濾波圖

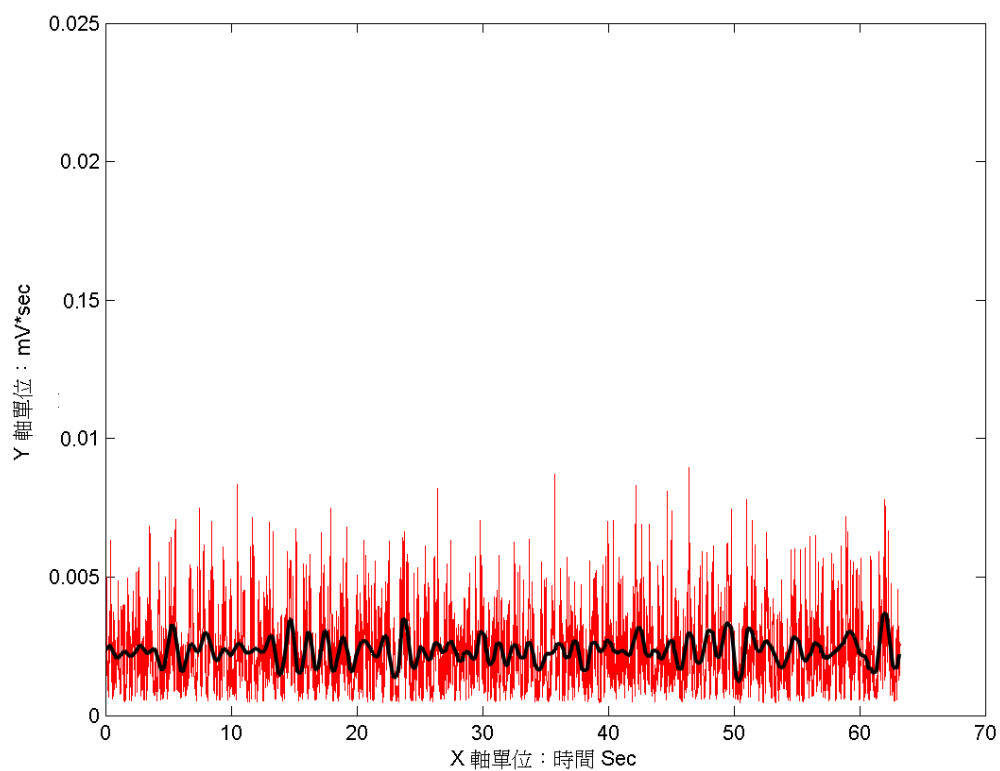


圖 9: 未受刺激 SNA 原始訊號與濾波後結果對照

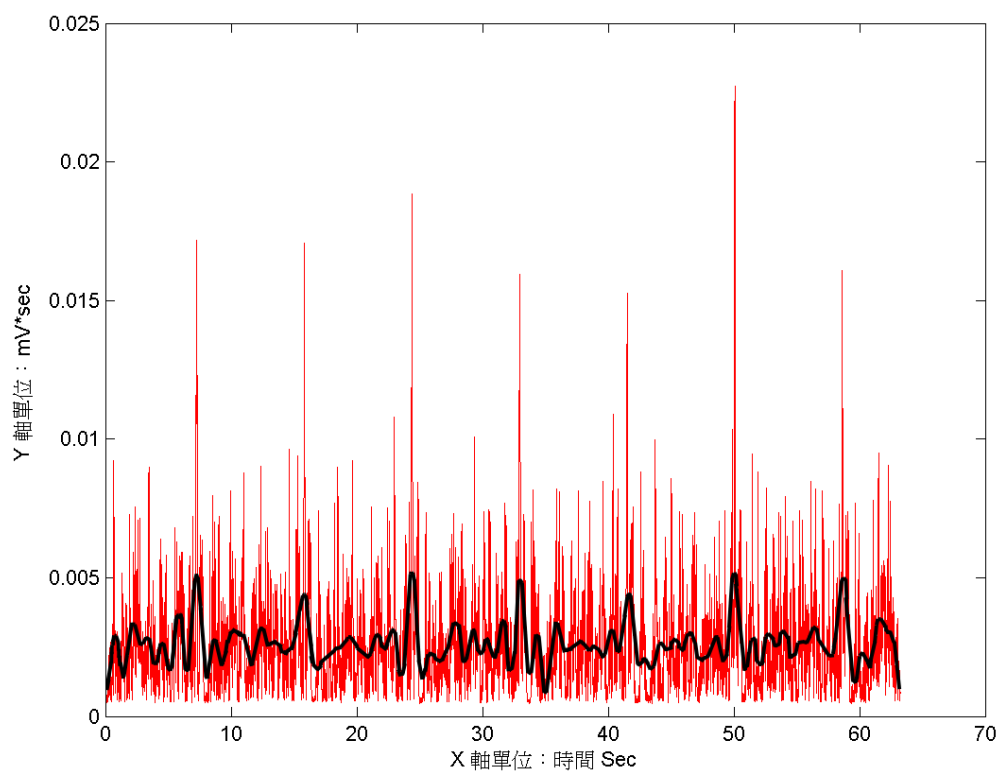


圖 10: 受刺激 SNA 原始訊號與濾波後結果對照

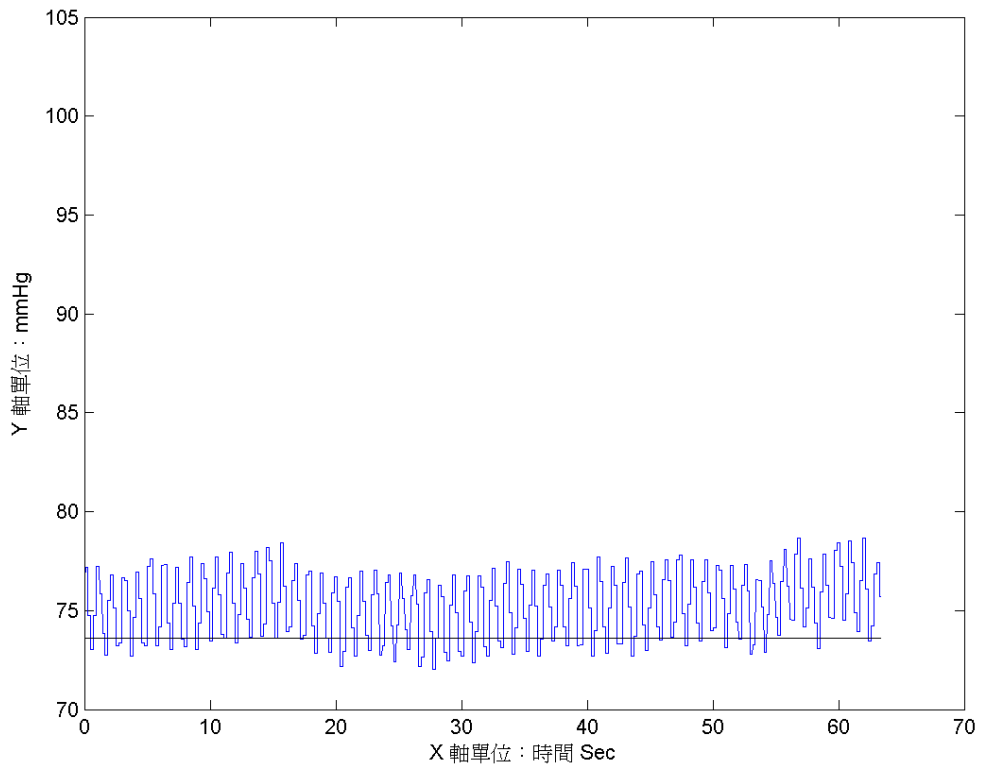


圖 11: 未受刺激狀態下的 BP 能量圖與基準線對照

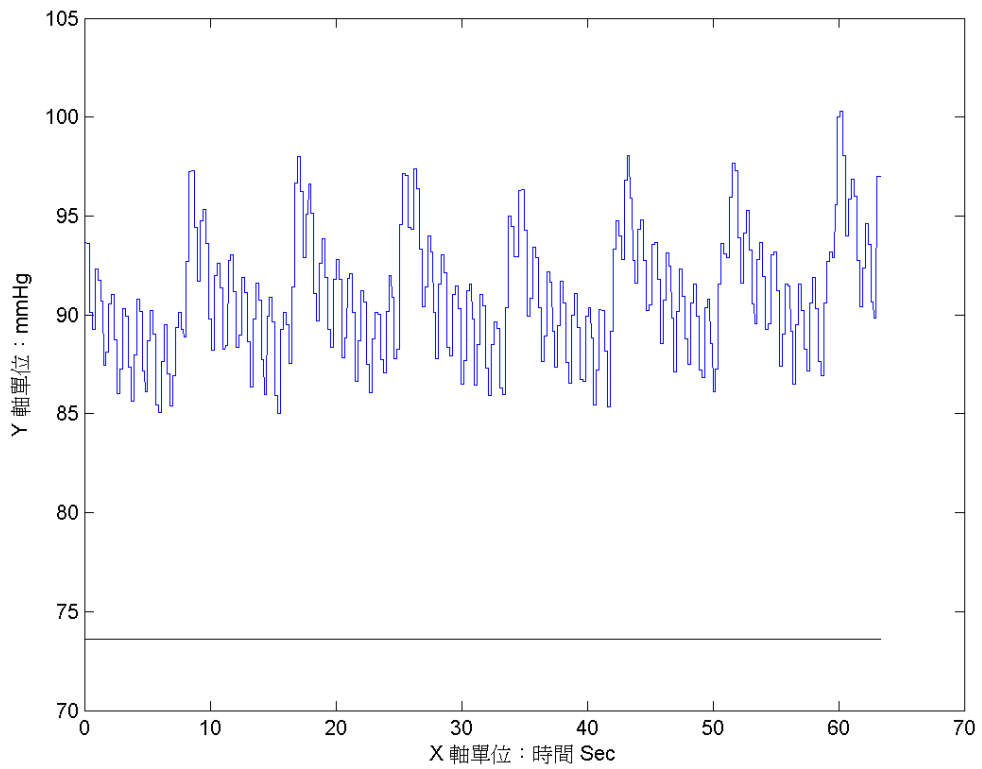


圖 12: 受刺激狀態下的 BP 能量圖與基準線對照



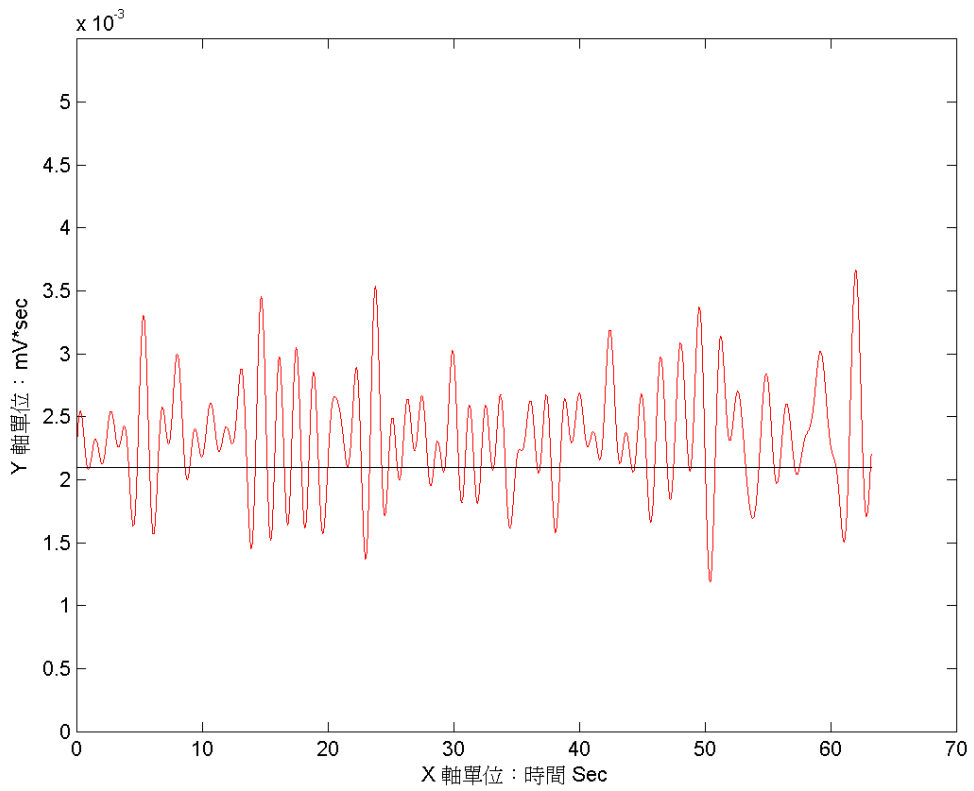


圖 13: 未受刺激狀態下的 SNA 濾波圖與基準線對照

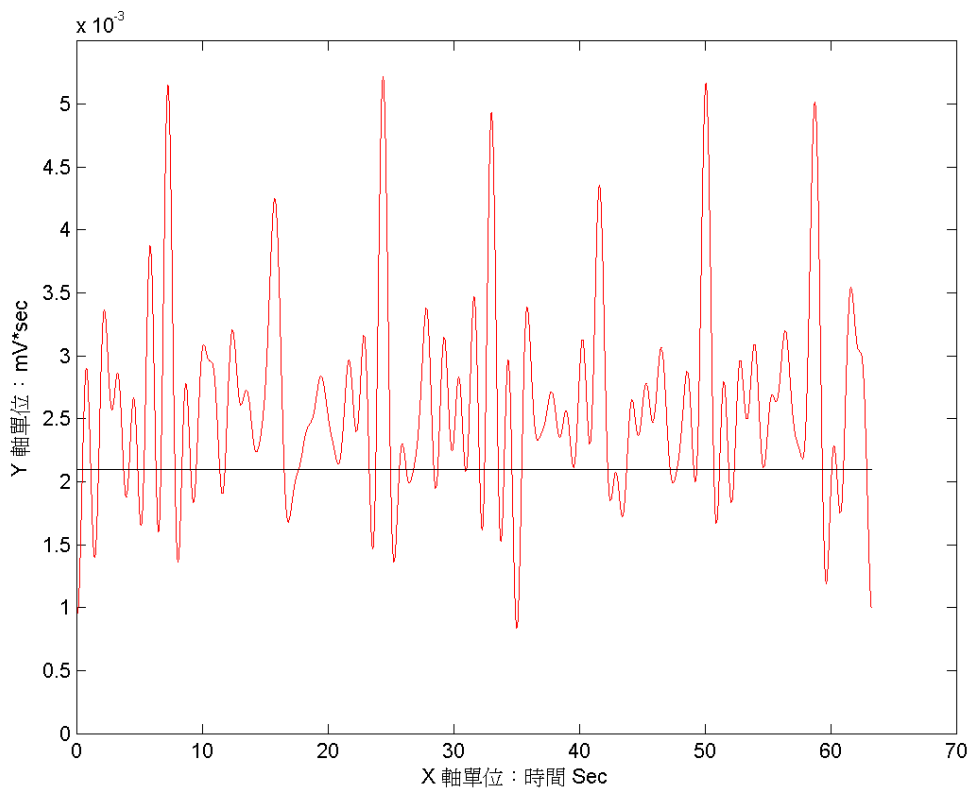


圖 14: 受刺激狀態下的 SNA 濾波圖與基準線對照

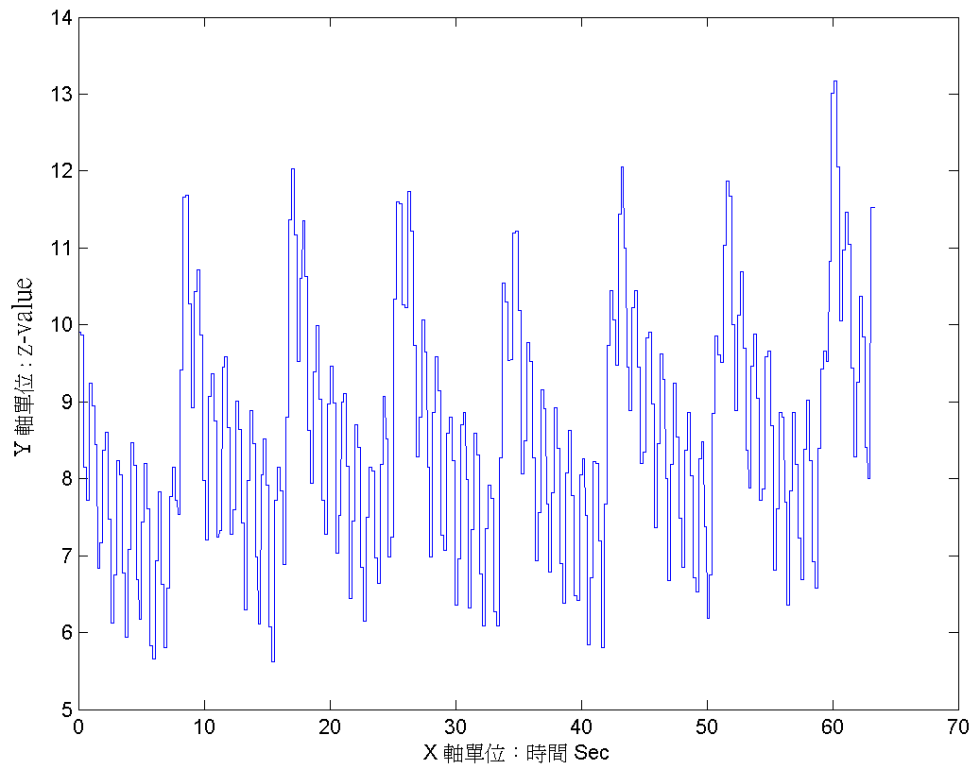


圖 15: 受刺激狀態下 BP 能量圖正規化結果

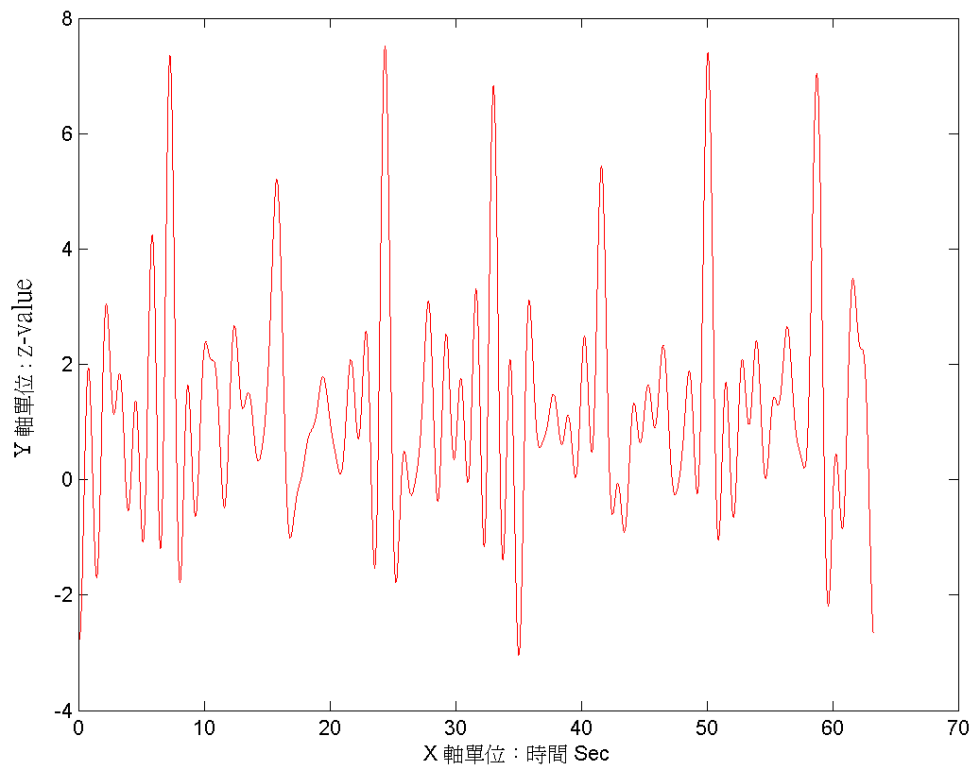


圖 16: 受刺激狀態下 SNA 濾波圖正規化結果

### 1.3 未刺激狀態下訊號之穩定性檢測

老鼠在施以藥物或手術，控制除 SNA 外其他會影響 BP 的因素下，未受刺激狀態之 BP 和 SNA 訊號是否會呈現如背景雜訊 (whitenoise) 般的穩定性 (stationary)？若檢測結果呈穩定性，則可推測 BP\* 和 SNA\* 之反應純為刺激所引起，若檢測結果不呈穩定性，則應在進一步探討 BP\* 和 SNA\* 關係前，排除會造成干擾之因素。

已知呼吸所造成之影響主要於頻率 1 Hz 處，依據 Nyquist 取樣定理的精神，於是取 2 秒為穩定性檢測間隔，並以其  $\frac{3}{4}$  長度作平移，即在訊號上每隔 1.5 秒，取出長度為 2 秒的訊號，也就是除最後一段之外，每段的選取均會和前一段有 0.5 秒的重疊，如此在 BP 和 SNA 上各可得 42 筆的資料。

BP 之穩定性檢測為：將 BP 的這 42 筆資料分別計算平均值和標準差 (圖 17、18)。經計算這些均值的均值為 75.205，標準差的均值為 14.27，而所有均值皆落於變異範圍  $\pm 1.35\%$  內，標準差則落於變異範圍  $\pm 1.73\%$  內。

SNA 之穩定性檢測為：將 SNA 的這 42 筆的資料分別計算平均值和標準差 (圖 19、20)。經計算這些均值的均值為 0.0023，標準差的均值為 0.0013，而所有均值皆落於變異範圍  $\pm 15.84\%$  內，標準差則落於變異範圍  $\pm 19.61\%$  內。

由以上檢測結果，BP 和 SNA 在未受刺激狀態，其任意段均值和標準差都會接近一個定值，因此可以將未受刺激狀態之 BP 和 SNA 視為穩定性訊號。

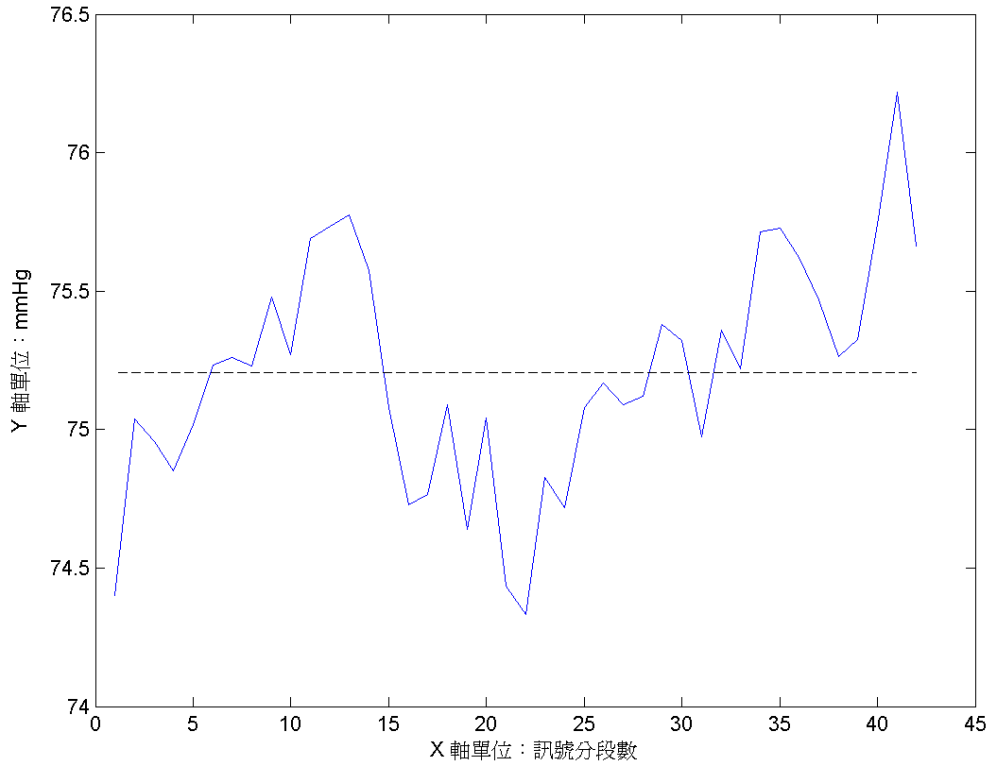


圖 17: 未受刺激狀態下 BP 每隔 1.5 秒，作長度 2 秒的選取，逐段作均值，繪圖的結果 (虛線為平均值)

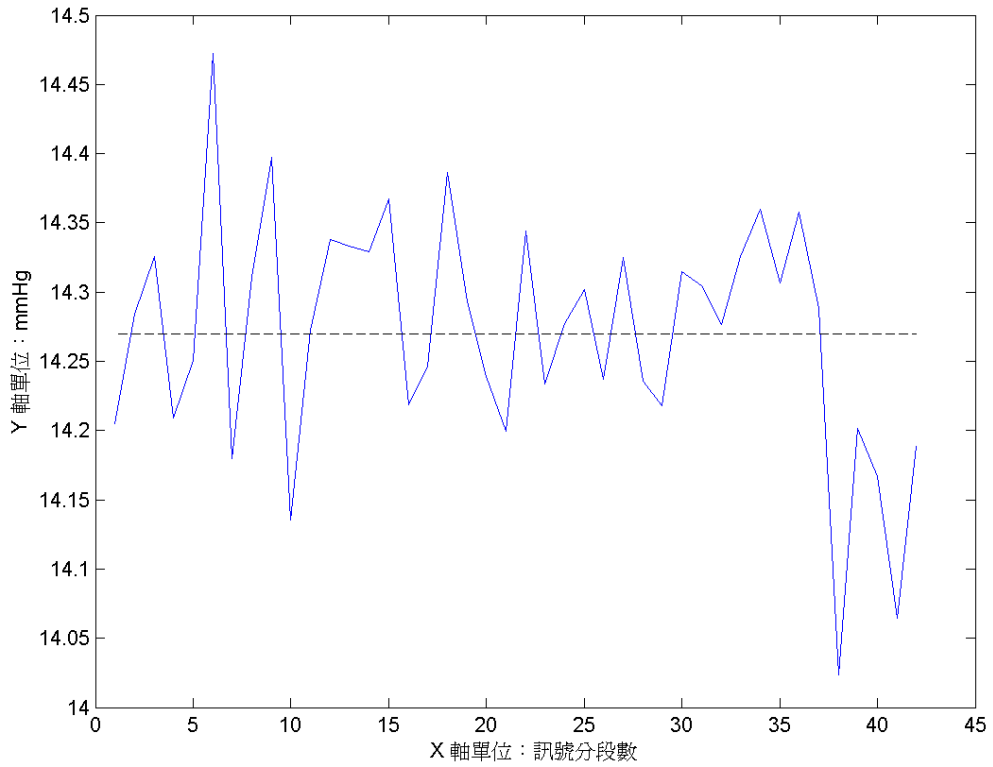


圖 18: 未受刺激狀態下 BP 每隔 1.5 秒，作長度 2 秒的選取，逐段作標準差，繪圖的結果 (虛線為平均值)

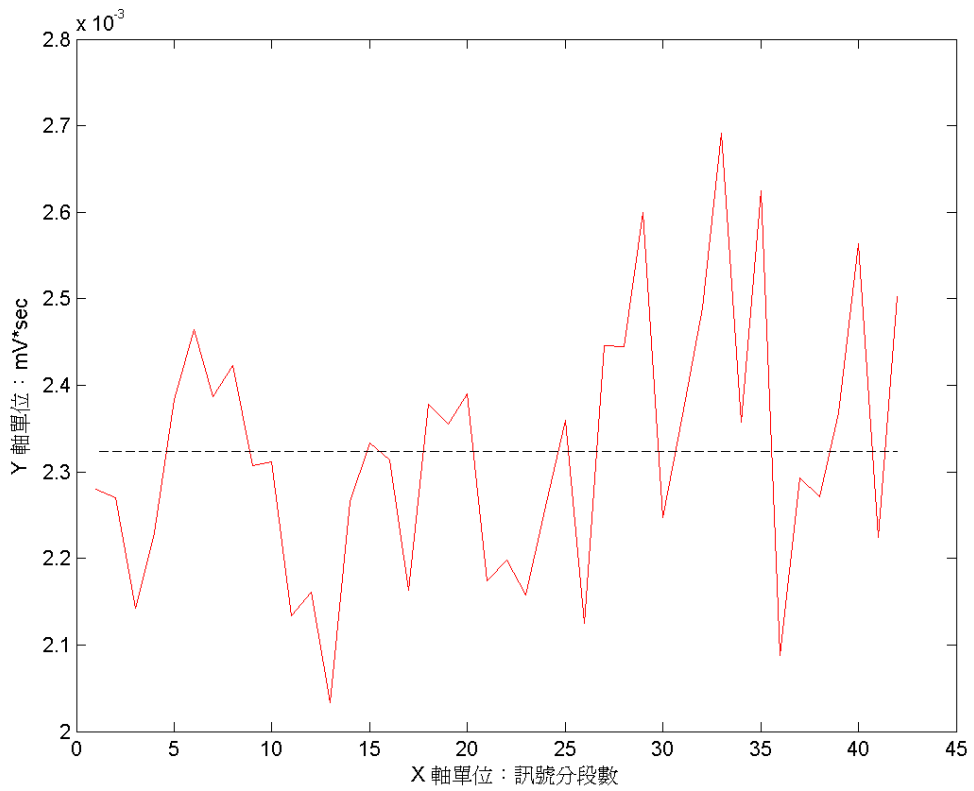


圖 19: 未受刺激狀態下 SNA 每隔 1.5 秒，作長度 2 秒的選取，逐段作均值，繪圖的結果 (虛線為平均值)

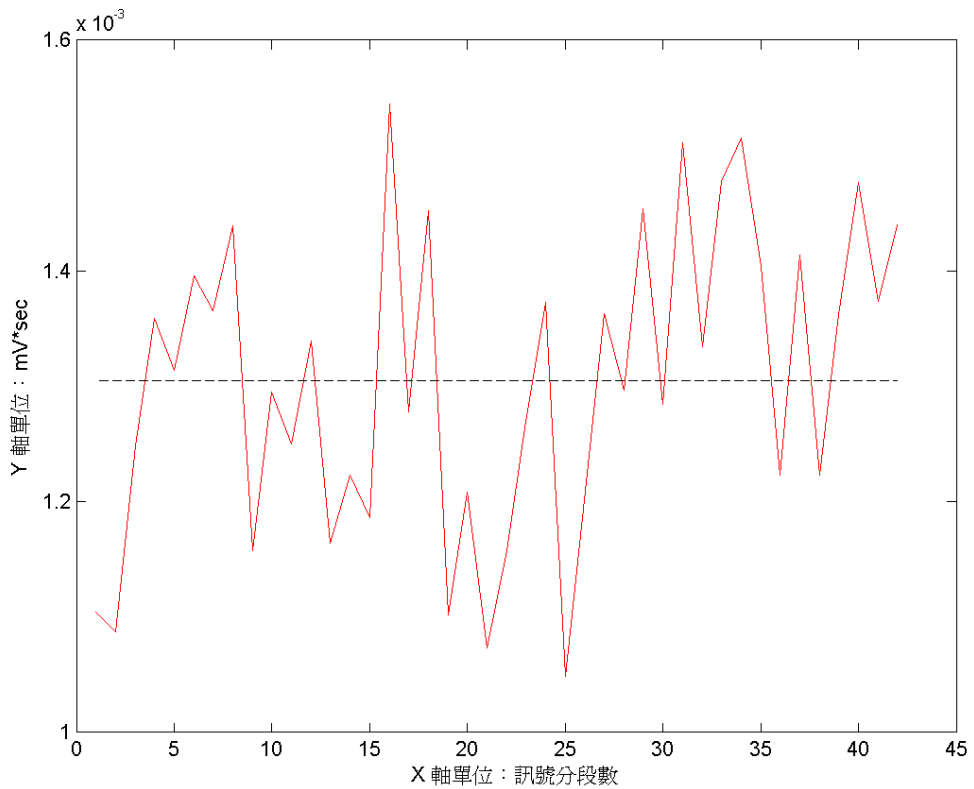


圖 20: 未受刺激狀態下 SNA 每隔 1.5 秒，作長度 2 秒的選取，逐段作標準差，繪圖的結果 (虛線為平均值)

## 第 2 章 $BP_{NP}^*$ 、 $SNA_{NF}^*$ 數學模型之建構

這一章的主題在建構適合的數學模型，來模擬生物的  $BP^*$  和  $SNA^*$  反應。我們依據觀察到的大致波形、振幅和持續時間等，尋找適合用來描述  $BP^*$  和  $SNA^*$  的數學模型，以進一步推論生物上  $BP^*$  和  $SNA^*$  兩者之間的關連性。

### 2.1 欲用來模擬之數學模型介紹

觀察  $BP_{NP}^*$  之單一完整起伏波形，具有快速升起緩緩降下的特性，而  $SNA^*$  的反應，則有發生快，消逝也快的特性。綜合以上  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  波形反應上的特性，將使用邏輯曲線 (logistic) 和阻尼函數 (damping) 來模擬  $BP_{NP}^*$  的波形反應，而使用阻尼函數和方盒函數 (box) 來模擬  $SNA_{NF}^*$  的波形反應。

邏輯曲線常用來模擬發生飽和現象之生物群體增長速度的模型。這裡將所要使用的邏輯曲線  $L(x)$  定義為：

$$L(x) = \begin{cases} \frac{ax}{1+be^{cx}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (a, b, c > 0),$$

其反曲點位置在

$$2e^{cx} + 2be^{2cx} - bcxe^{2cx} + xce^x = 0$$

的解；令  $\xi = \frac{W(\frac{1}{cb})+1}{c}$ ，這裡  $W(x)$  稱做 The Lambert W function，是以下方程式

$$y \times e^y = x \quad \forall x$$

的解，於是波形起伏高度為

$$\frac{a\xi}{1 + be^{c\xi}}$$

而波形起伏長度約為

$$\frac{\ln\left(\frac{2000a-1}{b}\right)}{c}$$

實際上邏輯曲線  $L(x)$  只會逼近 0 並不會等於 0，於是使用  $\frac{\ln\left(\frac{2000a-1}{b}\right)}{c}$  當作波形的起伏長度會有一些誤差，誤差上限為  $\frac{1}{2} \times 10^{-3} \times$  (波形的起伏長度)，由於波形的起伏長度是用來模擬生物受刺激後之反應持續時間，而由實際生物的 BP\* 反應作觀察，反應持續時間  $\leq 20$ ，所以誤差約  $10^{-2}$ ，為一小到可以忽略的值 (圖 21)。

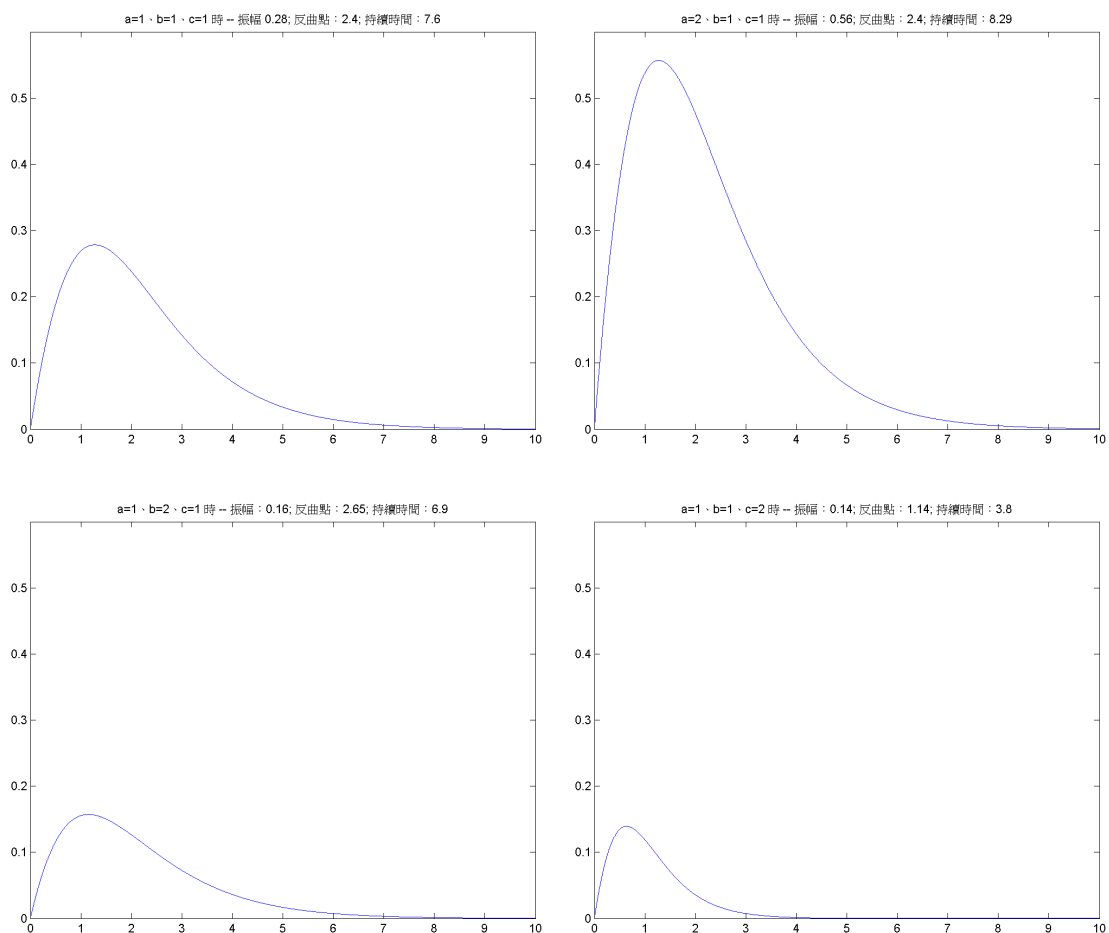


圖 21: 邏輯曲線  $L(x)$  在不同參數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  下之變化情形

阻尼函數常被應用於物理或工程上模擬物體遇阻力而運動減緩的過程，這裡將阻尼函數  $M(x)$  定義為：

$$M(x) = \begin{cases} axe^{-bx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (a, b > 0),$$

其波形起伏高度為  $\frac{a}{be}$ ，波形起伏長度則約為

$$\frac{4 \ln(2) + 3 \ln(5) + \ln(a)}{b}$$

由反應持續時間  $\leq 20$ ，可得在模擬生物反應時，上式中的  $a$  值至少會大於 1.04，於是  $\ln(a) > 0$ 。實際上阻尼函數  $M(x)$  只會逼近 0 並不會等於 0，於是使用  $\frac{4 \ln(2) + 3 \ln(5) + \ln(a)}{b}$  當作波形的起伏長度會有一些誤差，而誤差上限為  $\frac{1}{2} \times 10^{-3} \times$  (波形的起伏長度)，同樣地，已知反應持續時間  $\leq 20$ ，所以誤差約  $10^{-2}$ ，為一小到可以忽略的值 (圖 22)。

所謂方盒函數就是在特定區段上有一固定值，而其他區段上的值皆為 0。這裡將所要使用的方盒函數  $B(x)$  定義為：

$$B(x) = \begin{cases} a, & \text{if } x \in [0, b] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (a, b > 0),$$

其波形起伏高度為  $a$ ，波形的起伏長度為  $b$  (圖 23)。



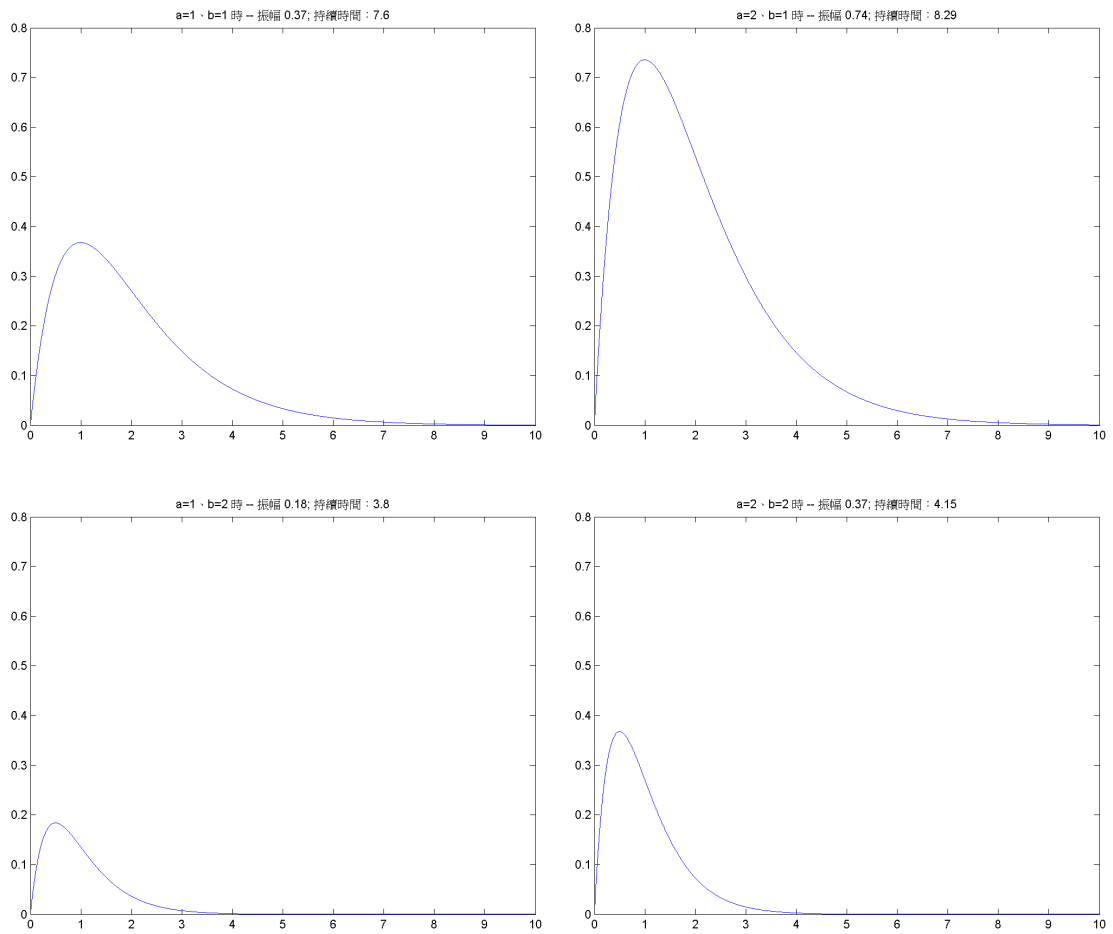


圖 22: 阻尼函數  $M(x)$  在不同參數  $a, b$  下之參考圖形

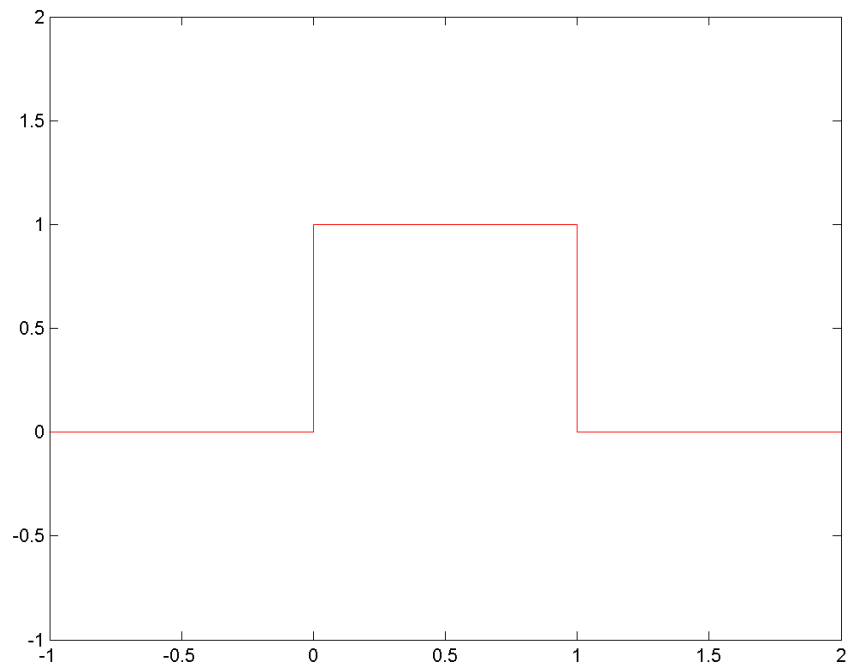


圖 23: 方盒函數  $B(x)$   $a=1, b=1$  時之基本模型

## 2.2 $BP_{NP}^*$ 數學模型之建構

在建構  $BP_{NP}^*$  數學模型前，為了有與  $BP_{NP}^*$  模型比對和驗證的依據，需要原始  $BP_{NP}^*$  上之單一刺激所造成之完整起伏波形和一小段包含數個刺激後之完整起伏波形。在原始  $BP_{NP}^*$  上截取之單一完整起伏波形如圖 24，一小段包含 6 個完整起伏的波形如圖 25。

在建構  $BP_{NP}^*$  的數學模型時，最初的想法是以邏輯曲線 (logistic) 作為  $BP_{NP}^*$  的數學模型。使用邏輯曲線  $L(x)$  來模擬  $BP_{NP}^*$  的好處，除函數本身圖形與實際生物反應類似外，經由適當的調整  $a$ 、 $b$ 、 $c$  這三個參數，可隨操作者任意改變函數圖形的起伏長度 (模擬生物在受刺激狀態下波動的反應持續時間，以下直接稱作持續時間)、起伏高度 (模擬生物在受刺激狀態下波動的振幅高度，以下直接稱作振幅) 和反曲點位置 (模擬生物在受刺激狀態下波動的波形；舉例而言當反曲點愈接近波峰時，下降趨勢會愈急速，而當反曲點愈接近波谷時，下降速度則愈平緩)。以此模型所繪之模型與真實生物反應相較，當  $a = 12$ 、 $b = 1$  和  $c = 1$  時，所繪出的數學模型 (圖 26) 再向上平移  $h \approx 7.6$ 。 $h$  是原始  $BP_{NP}^*$  上各最低點附近 (大約最低點向上  $\frac{2}{3}$  振幅) 的平均值，如圖 27。平移後的結果 (圖 28) 與圖 24 的原始  $BP_{NP}^*$  單一完整波形相似，兩者的相關係數<sup>1</sup>達 0.7，相對誤差<sup>2</sup>則為 11.2%。

雖然上述的結果和真實生物反應類似，但此模型所使用的邏輯曲線  $L(x)$  在控制圖形的振幅和持續時間上需要相當多手續，而且它的傅立葉轉換相當複雜，在往後與  $SNA_{NF}^*$  模型作比較時，更需要花費額外的時間和技巧才能作處理。因此我們希望能在邏輯曲線  $L(x)$  外，找到另一較簡單，同時又與生物  $BP_{NP}^*$  訊號類似的其他數學模型作替代。

<sup>1</sup>此處相關係數之算法為：

$|(\text{生物訊號} - \text{生物訊號均值}) \cdot (\text{數學模型} - \text{模型均值})| / (|(\text{生物訊號} - \text{生物訊號均值})| \cdot |(\text{數學模型} - \text{模型均值})|)$

<sup>2</sup>此處相對誤差之算法為： $| \text{生物訊號} - \text{模擬生物訊號之數學模型} | / | \text{生物訊號} |$ 。

若將模擬  $BP_{NP}^*$  的數學函數改為較簡單的阻尼函數  $M(x)$ ，相較於邏輯曲線  $L(x)$  雖少了控制反曲點的機制。但在與真實生物反應相較後，發現使用阻尼函數  $M(x)$ ，在  $a = 9.55$ 、 $b = 0.99$  時，向上平移  $h \approx 7.6$  後 (圖 29)，與圖 24 的原始  $BP_{NP}^*$  單一完整波形相較，兩者之相關係數為 0.64，相對誤差為 12.4%。明顯可由相關係數值上看出，兩者的模擬效果差不多，顯示實用上可以不需控制反曲點，於是此後將以阻尼函數  $M(x)$  作為模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型。

在有了  $BP_{NP}^*$  單一刺激下完整波形的數學模型後，便可進一步推出模擬在一段時間內數個刺激下之  $BP_{NP}^*$  數學模型及其一般式。

以原始  $BP_{NP}^*$  (圖 25) 上一段時間內數個刺激下的訊號為例，時間長度為 52.475 秒。令  $S_{BP}$  為 52.475 秒內數個刺激下，模擬  $BP_{NP}^*$  波形的數學模型，在原始  $BP_{NP}^*$  上可看出有 6 個明顯的受刺激突起，於是  $S_{BP}$  即為 6 個單一刺激完整波形的平移疊加。令  $t_i$  為各次刺激在整段時間內的發生點，則  $S_{BP}$  可表示為

$$S_{BP} = \sum_{i=1}^6 M(x - t_i) + h$$

根據實驗數據，我們令  $t_1 = 1.0392$  秒， $t_2 = 9.423$  秒， $t_3 = 18.026$  秒， $t_4 = 26.402$  秒， $t_5 = 34.989$  秒和  $t_6 = 43.365$  秒。 $S_{BP}$  (圖 30 中之粗線) 與原始  $BP_{NP}^*$  (圖 30 中之細線) 相較，兩者之相關係數為 0.71，相對誤差為 12%。

考慮上述的結果是以固定的刺激頻率所作的實驗，則  $t_i$  間的差距便應該會是個定值，各  $t_i$  間差距如表 1

$t_i$ 差	$t_2 - t_1$	$t_3 - t_2$	$t_4 - t_3$	$t_5 - t_4$	$t_6 - t_5$
時間差 (秒)	8.3838	8.603	8.378	8.587	8.376

表 1: 各  $t_i$  間的時間差

表 1 中的均值為 8.47，而所有時間差都落於變異範圍  $\pm 1.6\%$  內，顯示刺激出現之週期約為 8.47 秒，即刺激頻率約為 0.12 Hz。若將  $S_{BP}$  改寫為

$$S_{BP} = \sum_{i=0}^5 M(x - 8.47i - t_1) + h$$

此時， $S_{BP}$  (圖 31 中之粗線) 與原始  $BP_{NP}^*$  (圖 31 中之細線) 相較，兩者之相關係數還是 0.71，相對誤差也仍為 12%。

因此當以固定頻率  $\omega_0$  刺激老鼠，而總時間長度為  $T$  時，則  $BP_{NP}^*$  單一刺激完整波形的出現週期便為  $\frac{1}{\omega_0}$  (模擬受刺激狀態的數學模型每隔  $\frac{1}{\omega_0}$  秒出現一次)。於是  $S_{BP}$  應該可以寫成

$$S_{BP} = \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} M(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{BP}) + h$$

( $t_{BP}$  為  $BP^*$  第一個刺激反應出現的時間點)，上述即為以特定刺激頻率  $\omega_0$  刺激 BP 的數學模型推導。 $S_{BP}$  即為往後推演  $BP_{NP}^*$  與  $SNA_{NF}^*$  間關係時，用來模擬特定刺激頻率下  $BP_{NP}^*$  的數學模型。

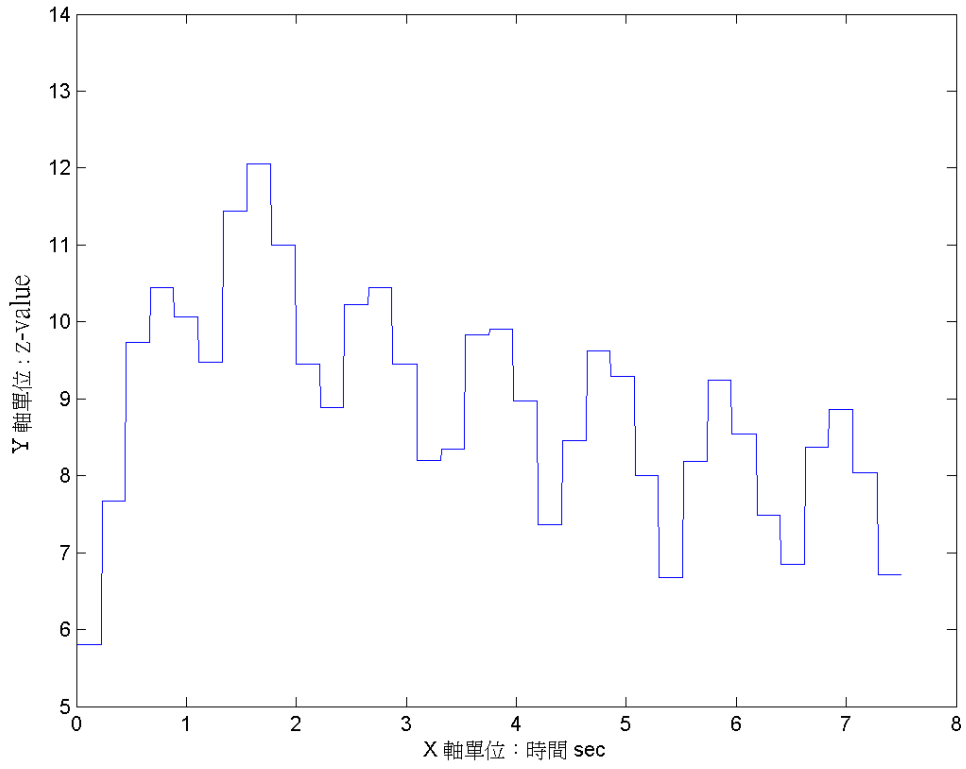


圖 24: 原始  $BP_{NP}^*$  上單一刺激下完整波形訊號

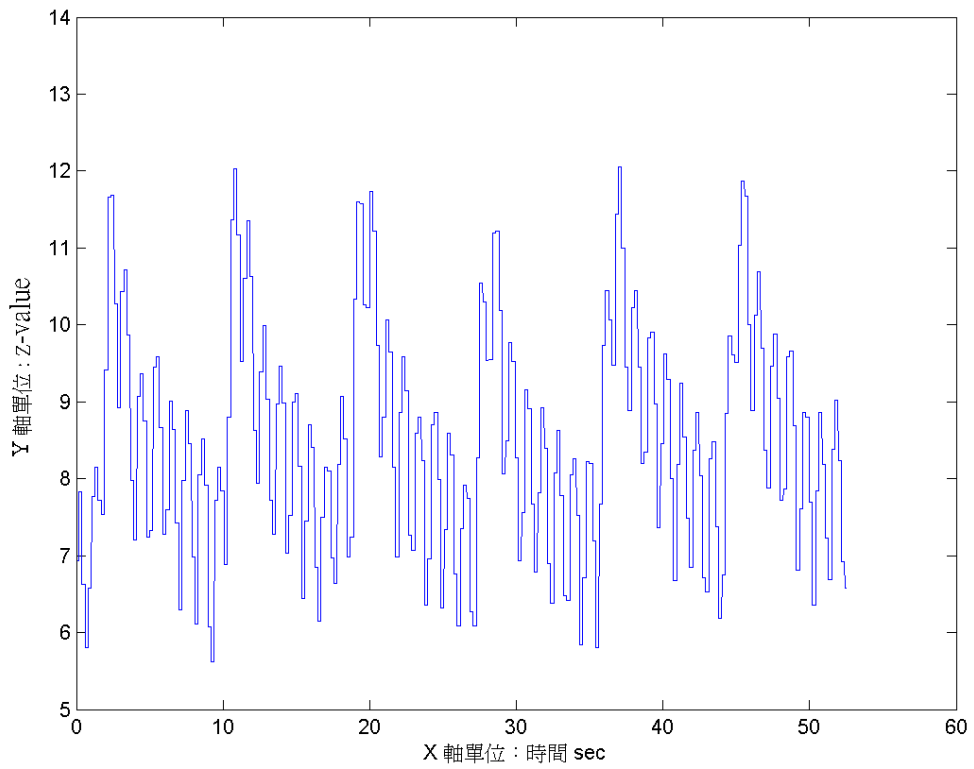


圖 25: 原始  $BP_{NP}^*$  上一段時間內數個刺激下之訊號

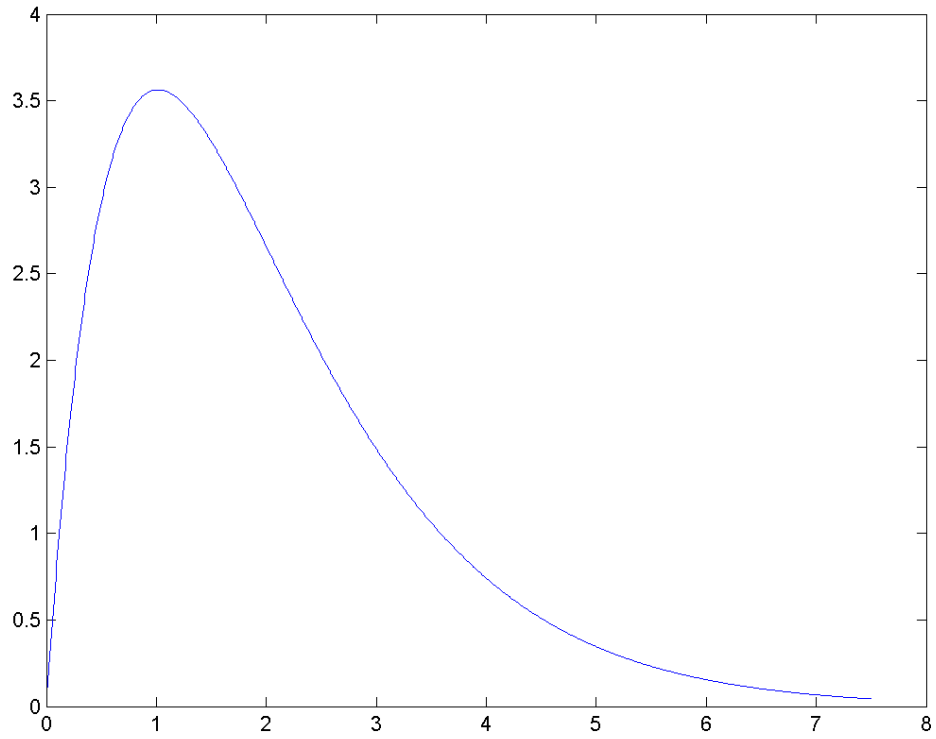


圖 26: 邏輯曲線  $L(x)$   $a = 12$ 、 $b = 1$  和  $c = 1$  時之基本模型

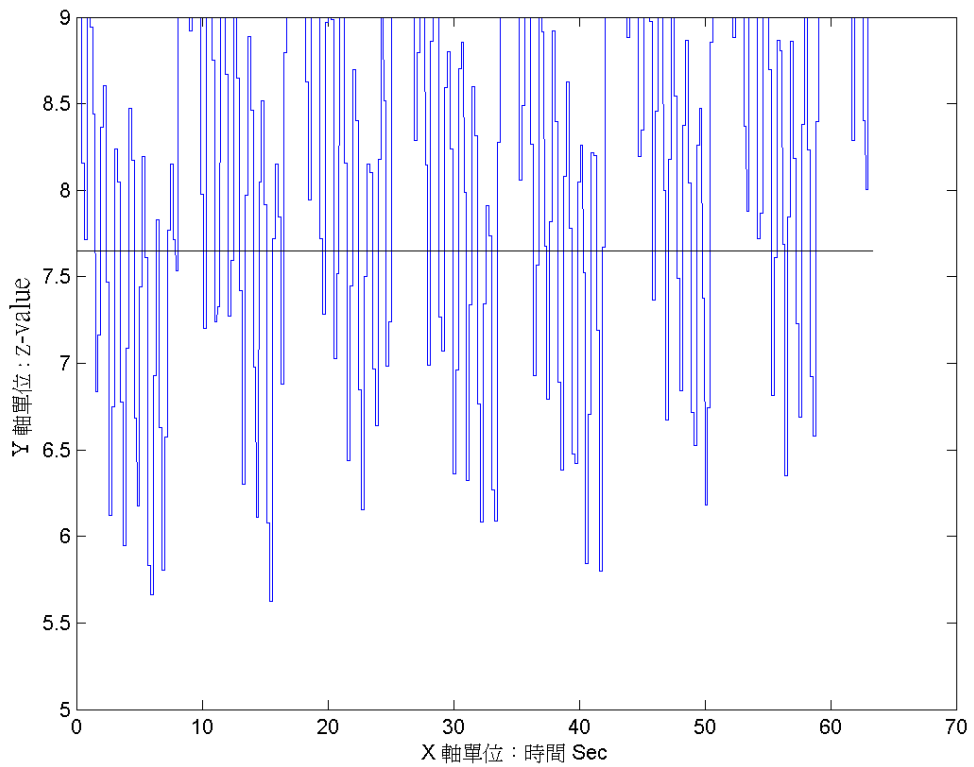


圖 27: 原始  $BP_{NP}^*$  上最低點附近振盪情形及其均值

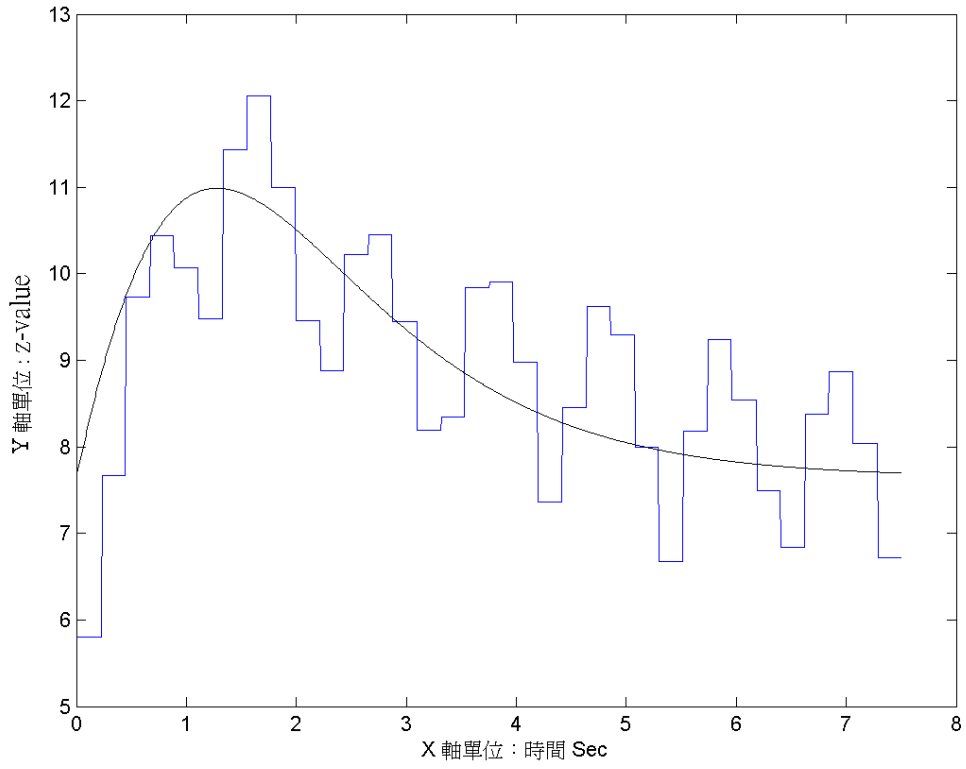


圖 28: 邏輯曲線  $L(x)$  模型與圖 24 相較圖

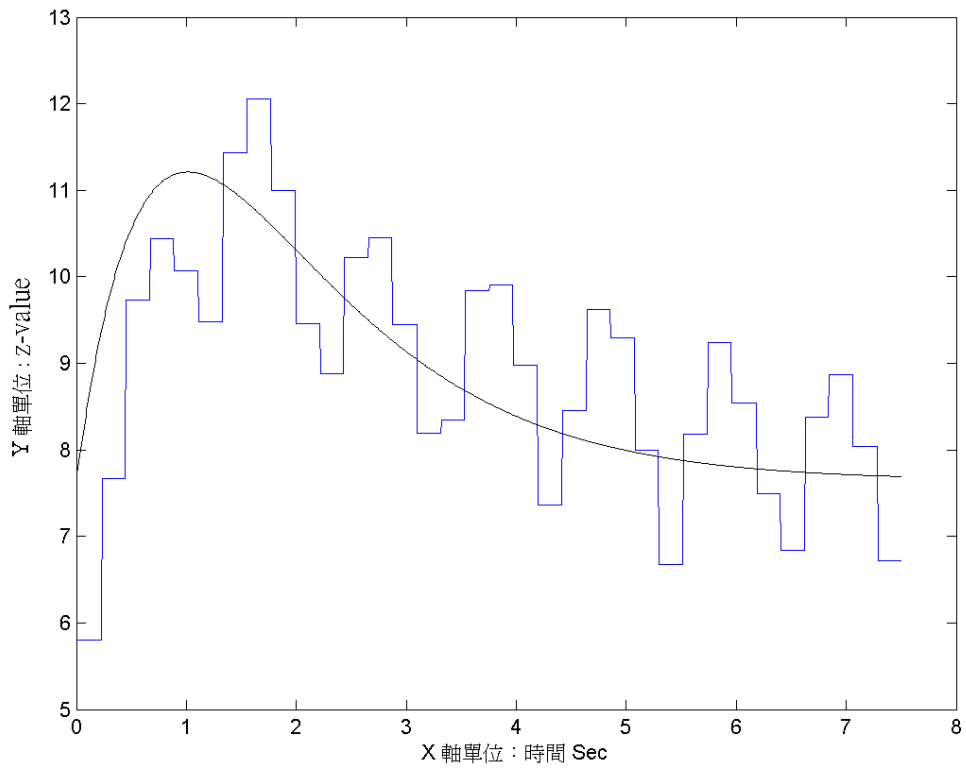


圖 29: 阻尼函數  $M(x)$  模型與圖 24 相較圖

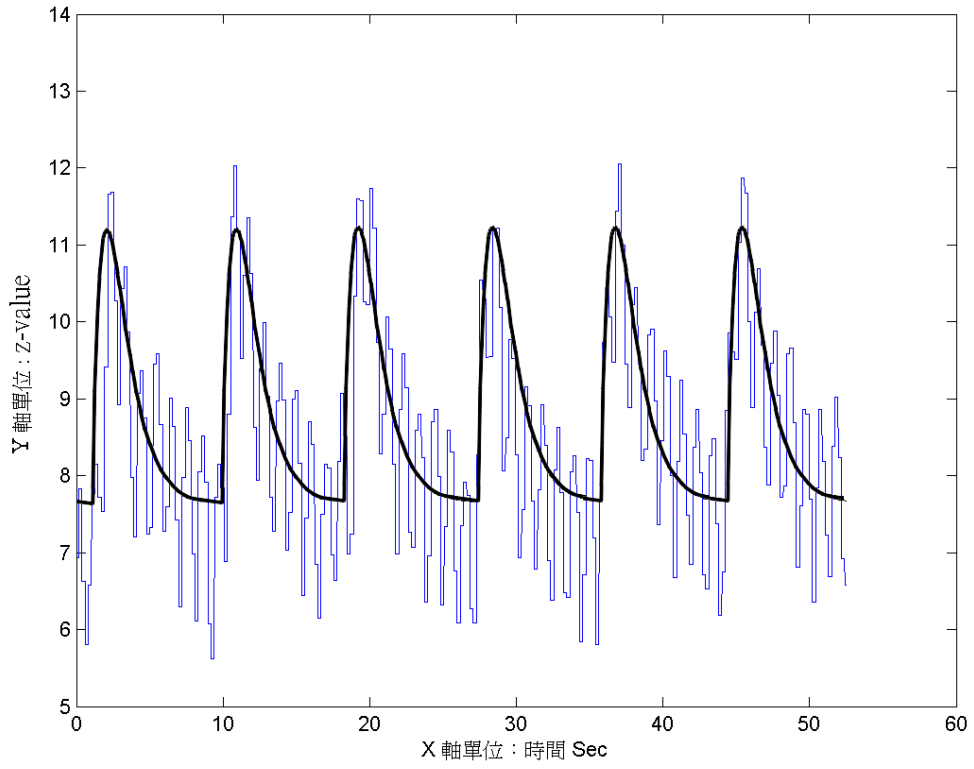


圖 30: 此時之  $S_{BP}$  模型與圖 25 相較圖

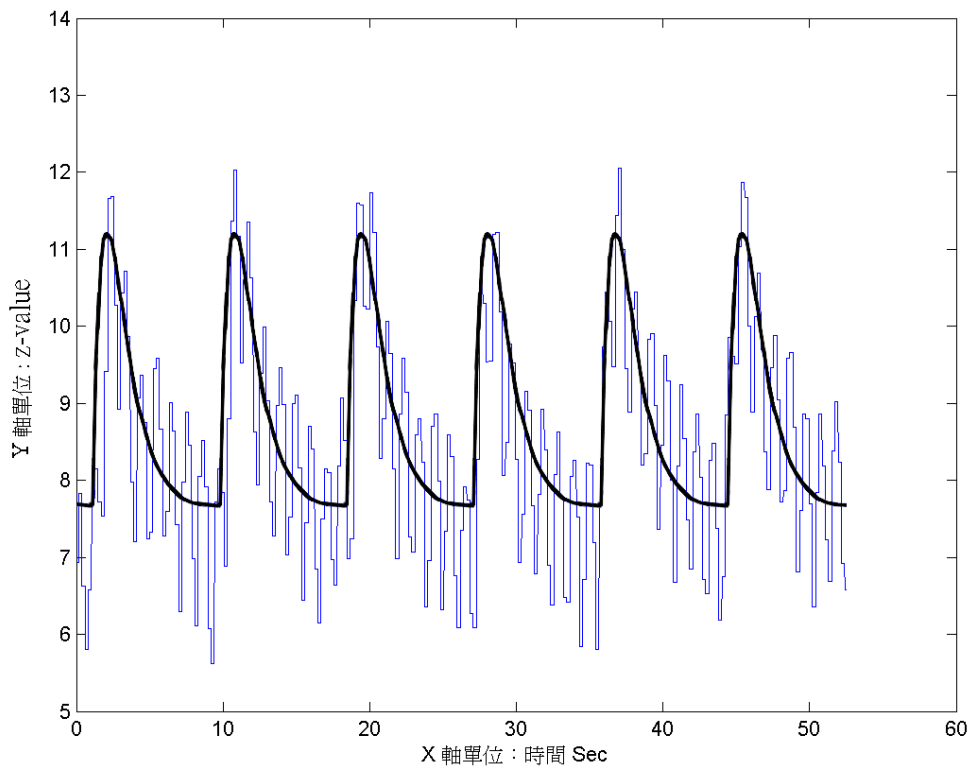


圖 31: 刺激頻率 0.12 Hz 之  $S_{BP}$  模型與圖 25 相較圖



### 2.3 $SNA_{NF}^*$ 數學模型之建構

SNA 和 BP 相較，BP 具有波形上較規則和受刺激狀態下有明顯反應等特性，而 SNA 波形則振盪較快且波形較不規則，於是區別受刺激 SNA 的反應開始時間、持續時間長短和反應量大小，就是建構  $SNA_{NF}^*$  數學模型的關鍵。因此建構  $SNA_{NF}^*$  的數學模型時，必須給它較大的彈性，而不能像處理  $BP_{NP}^*$  那樣地嚴格。在此考慮以方盒函數  $B(x)$  和阻尼函數  $M(x)$  來模擬實際生物的  $SNA_{NF}^*$  反應情形。

由於  $SNA_{NF}^*$  在各次刺激所造成之振幅和反應持續時間差異甚大，不似  $BP_{NP}^*$  規律，所以無法像  $BP_{NP}^*$  般可以取單一完整波形做為數學模型的參考。因此  $SNA_{NF}^*$  的數學模型，是將各次刺激所造成之異常突起收集起來後，取其各方面之平均值，作為  $SNA_{NF}^*$  數學模型之依據。

由於生物本身  $SNA_{NF}^*$  就較不規則，考慮  $BP_{NP}^*$  (圖 15) 上有 7 個受刺激的突起，已知  $BP^*$  的變化主要是受  $SNA^*$  的影響，所以在  $SNA_{NF}^*$  上，應該也會有 7 個突起。觀察  $SNA_{NF}^*$  (圖 16)，將  $SNA_{NF}^*$  上包夾突起處所在的兩個低點作記錄，保留兩低點所包夾的時間段，把其他段歸零，如此可取出 7 個突起處，稱這種於濾波圖上再取出之波形圖為縮減圖 (shrink)(圖 32)。

欲將  $SNA_{NF}^*$  以方盒函數  $B(x)$  模擬時，可進一步將上述 7 段突起作平均，則它們的平均振幅約為 5.89，平均持續時間則約為 0.53 秒。取方盒函數  $B(x)$  之振幅為 5.89，持續時間為 0.53 秒 (即  $a = 5.89$ 、 $b = 0.53$ )。已知整個實驗的時間長度為 63.312 秒，令  $S_{SNA}$  為 62.234 秒內數個刺激下，模擬受刺激 SNA 波形的數學模型。於是  $S_{SNA}$  即為 7 個方盒函數  $B(x)$  的平移疊加。令  $t_i$  為各次刺激在整段

時間內的發生點，則  $B(x)$  可表示為

$$B(x) = \begin{cases} 5.89, & \text{if } 0 \leq x \leq 0.53, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

於是  $S_{SNA}$  可表示為

$$S_{SNA} = \sum_{i=1}^7 B(x - t_i)$$

根據實驗數據，我們令  $t_1 = 7.0009$  秒， $t_2 = 15.564$  秒， $t_3 = 24.097$  秒， $t_4 = 32.77$  秒， $t_5 = 41.419$  秒， $t_6 = 49.764$  秒和  $t_7 = 58.421$  秒。由於此時所造出來的模型為參考  $SNA_{NF}^*$  的結果，而  $SNA_{NF}^*$  本身已和原始  $SNA^*$  有些差距，所以新造一組  $SNA_N^*$  來驗證  $S_{SNA}$  和  $SNA^*$  的相似程度。 $SNA_N^*$  作法是將  $SNA^*$  減去  $SNA$  基準線值 (0.002) 後，除以未受刺激狀態下的  $SNA_F$  標準差 (0.0004) (圖 33)。

正規化後之  $SNA_N^*$  (圖 34 中之細線) 與推論出之  $S_{SNA}$  (圖 34 中之粗線) 相較，兩者之相關係數為 0.23。

同樣的，若上述的結果是以固定的刺激頻率所作的實驗，則  $t_i$  間的差距便應該會是個定值，各  $t_i$  間差距如表 2

$t_i$ 差	$t_2 - t_1$	$t_3 - t_2$	$t_4 - t_3$	$t_5 - t_4$	$t_6 - t_5$	$t_7 - t_6$
時間差 (秒)	8.5631	8.533	8.673	8.649	8.345	8.657

表 2: 各  $t_i$  間的時間差

表 2 中的均值為 8.57，而所有時間差都落於變異範圍  $\pm 2.62\%$  內，顯示刺激出現之週期約為 8.57 秒，即刺激頻率也約為<sup>3</sup> 0.12 Hz。

若將  $S_{SNA}$  改寫為

$$S_{SNA} = \sum_{i=0}^6 B(x - 8.57i - t_1)$$

<sup>3</sup>BP\* 的受刺激反應是由  $SNA^*$  所引起的，所以兩者顯示出來的受刺激頻率，理論上本來就該會是一樣的。

此時， $S_{SNA}$  (圖 35 中之粗線) 與  $SNA_N^*$  (圖 35 中之細線) 相較，兩者之相關係數 0.26。理論模型跟之前以 7 個觀測開始時間所造的模型相比，其與實際訊號的相關係數竟然提高了大約 13 %。

所以當模擬  $SNA_{NF}^*$  反應的數學模型為方盒函數  $B(x)$ ，刺激的頻率為  $\omega_0$ ，總時間長度為  $T$  時，模擬  $SNA_{NF}^*$  之方盒函數  $B(x)$  出現週期便為  $\frac{1}{\omega_0}$ 。於是  $S_{SNA}$  應該可以寫成

$$S_{SNA} = \sum_{n=0}^{[T\omega_0]} B(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{SNA})$$

( $t_{SNA}$  為  $SNA^*$  第一個刺激反應出現的時間點)。

當  $SNA_{NF}^*$  以阻尼函數  $M(x)$  來表示時，參考模型為方盒函數  $B(x)$  的作法，取阻尼函數  $M(x)$  之振幅為 5.89，持續時間為 1.5 (即  $a = 133.36$ 、 $b = 8.33$ )。同  $SNA^*$  以方盒函數  $B(x)$  表示時之推論過程，則  $S_{SNA}$  為 7 個阻尼函數  $M(x)$  的平移疊加。令  $t_i$  為各次刺激在整段時間內的發生點，則  $S_{SNA}$  可表示為

$$S_{SNA} = \sum_{i=1}^7 M(x - t_i)$$

由於同為模擬  $SNA^*$  的受刺激反應，所以這裡的  $t_i$  和使用方盒函數  $B(x)$  表示時相同。 $S_{SNA}$  (圖 36 中之粗線) 與  $SNA_N^*$  (圖 36 中之細線) 相較，兩者之相關係數為 0.29。

同樣地，若上述的結果是以固定的刺激頻率所作的實驗，則刺激頻率會與使用方盒函數  $B(x)$  時相同，若將此時之  $S_{SNA}$  改寫為

$$S_{SNA} = \sum_{i=0}^6 M(x - 8.57i - t_1)$$

此時， $S_{SNA}$  (圖 37 中之粗線) 與  $SNA_N^*$  (圖 37 中之細線) 相較，兩者之相關係數是 0.3。同樣也較上述的模型稍微提高了一些。

所以當模擬  $SNA_{NF}^*$  反應的數學模型為阻尼函數  $M(x)$ ，刺激的頻率為  $\omega_0$ ，總時間長度為  $T$  時，模擬  $SNA_{NF}^*$  之阻尼函數  $M(x)$  出現週期便為  $\frac{1}{\omega_0}$ 。於是  $S_{SNA}$  也應該可以寫成

$$S_{SNA} = \sum_{n=0}^{[T\omega_0]} M\left(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{SNA}\right)$$

( $t_{SNA}$  為  $SNA^*$  第一個刺激反應出現的時間點)。

上述即為以特定刺激頻率  $\omega_0$  刺激  $SNA$  的兩個  $SNA_{NF}^*$  數學模型推導。

使用方盒函數  $B(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  的好處，在於可以模擬整個受刺激  $SNA$  反應的突起部份，較符合生物學者的經驗，並且在往後推演  $BP_{NP}^*$  與  $SNA_{NF}^*$  之關係時，於多數情況下可以得到很好的效果。而使用阻尼函數  $M(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  的好處，在於使用了與  $BP_{NP}^*$  相同的模型，只是參數略有不同，滿足數學上的一致性，並且有時候它比用方盒函數  $B(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  有較高的相似程度。而在往後推演  $BP_{NP}^*$  與  $SNA_{NF}^*$  關係時，可達到與使用方盒函數  $B(x)$  模擬  $SNA^*$  差不多的效果，參閱 §3.4 與 §4.2  $BP^*$  與  $SNA^*$  振幅與持續時間關係之推論。因此接下來的實驗和推論，都將這二種模型並陳介紹給讀者。

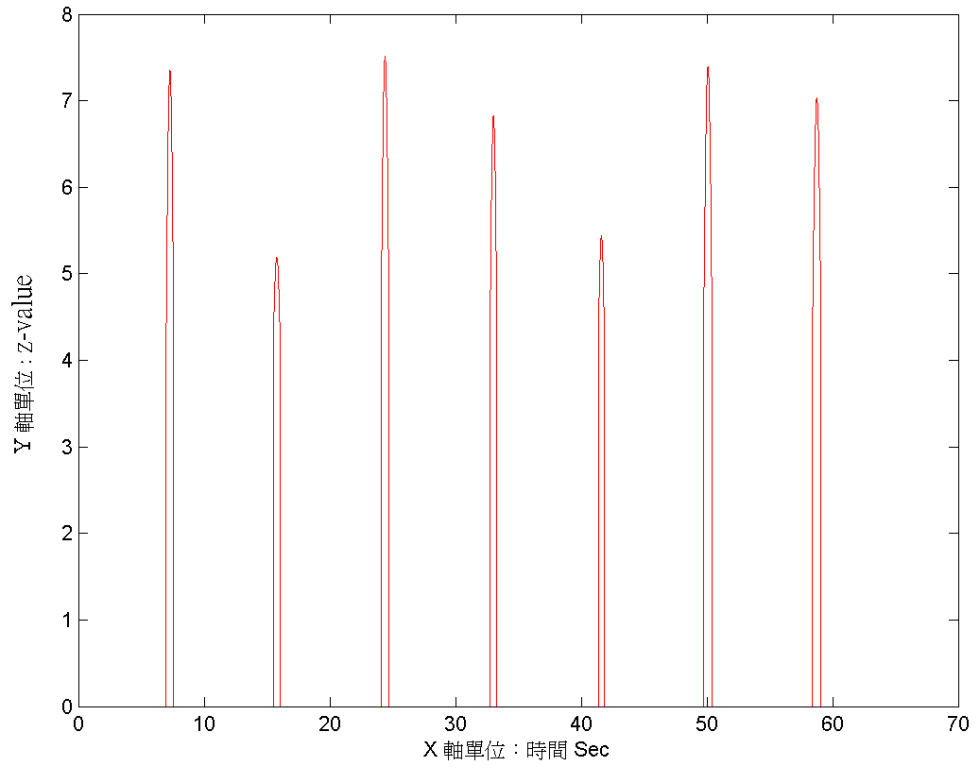


圖 32: 根據 (圖 16) 取出之縮減圖

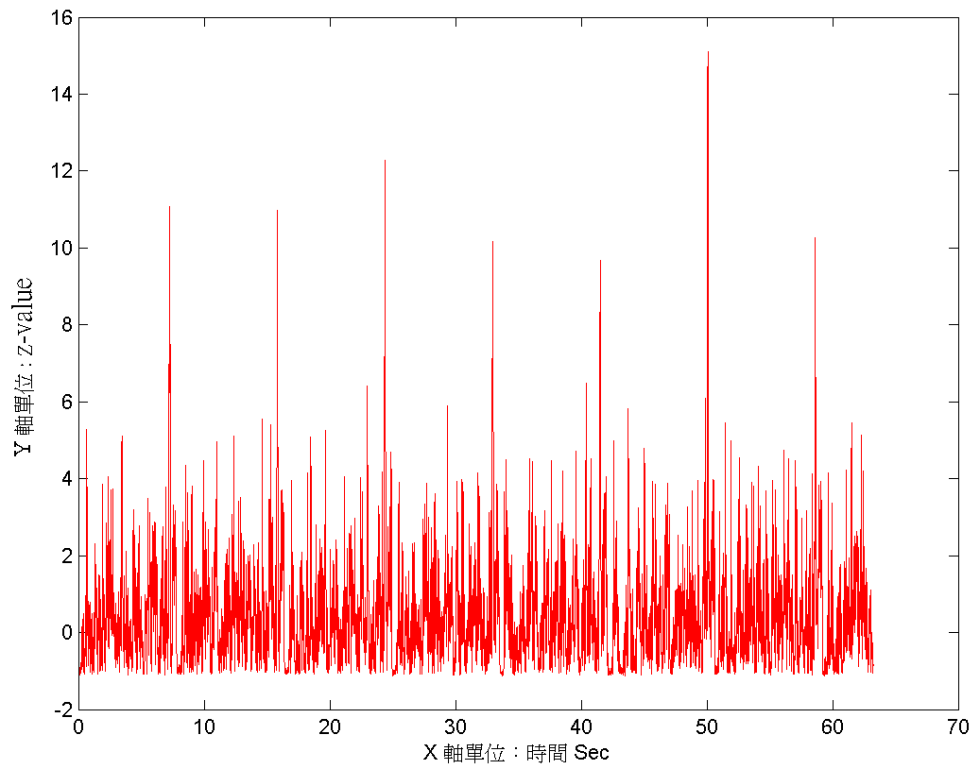


圖 33:  $SNA_N^*$  圖形

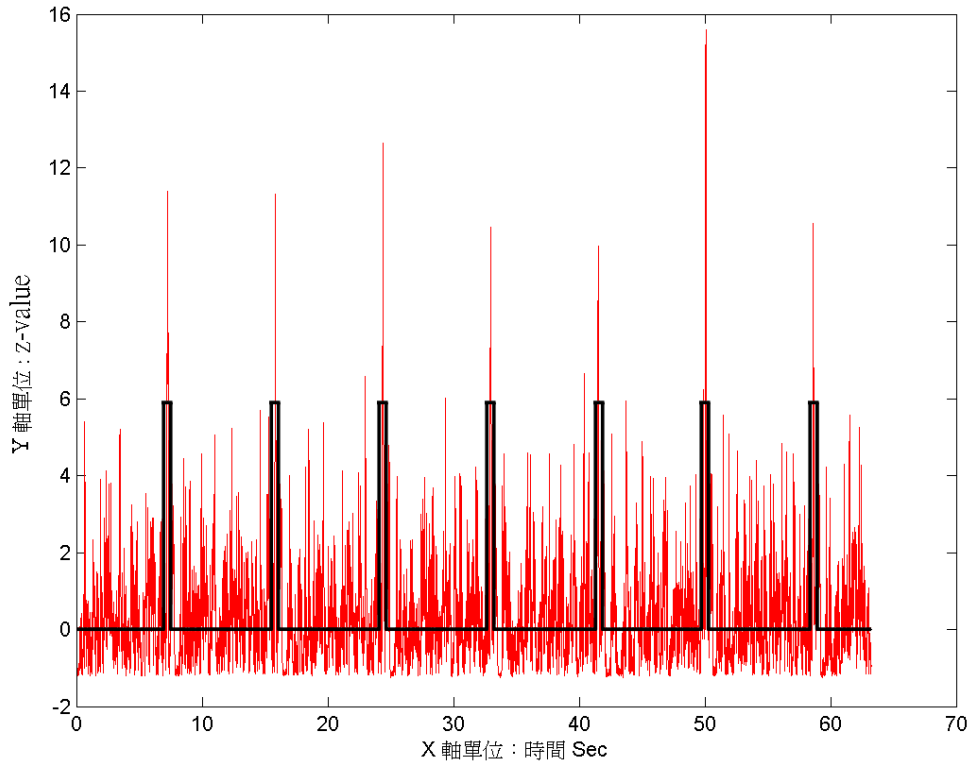


圖 34: 方盒函數  $B(x)$  (粗線) 與  $SNA_N^*$  (圖 33) (細線) 相較圖

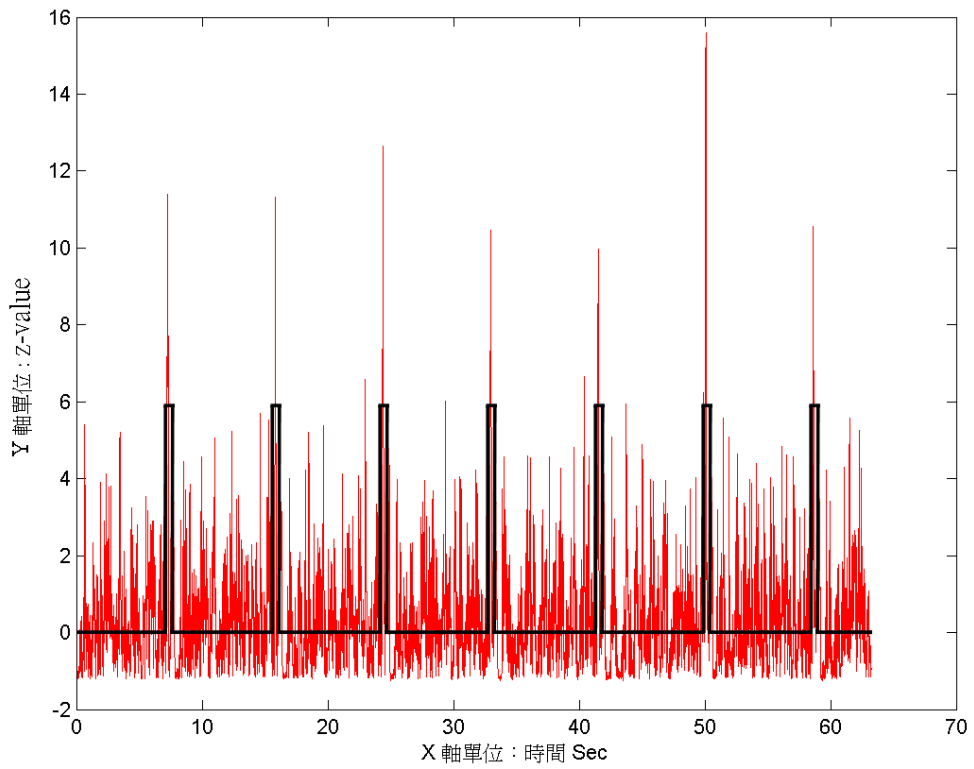


圖 35: 刺激頻率 0.12 Hz 之  $S_{SNA}$  模型與  $SNA_N^*$  (圖 33)(細線) 相較圖

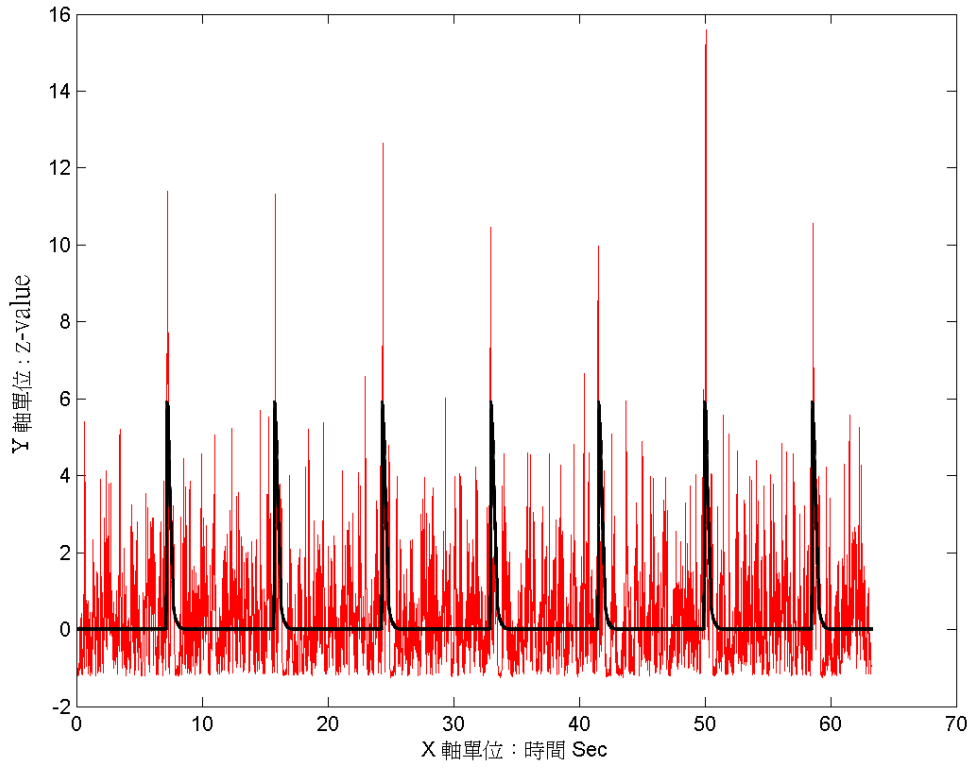


圖 36: 阻尼函數  $M(x)$  模型 (粗線) 與 (圖 33)  $SNA_N^*$  (細線) 相較圖

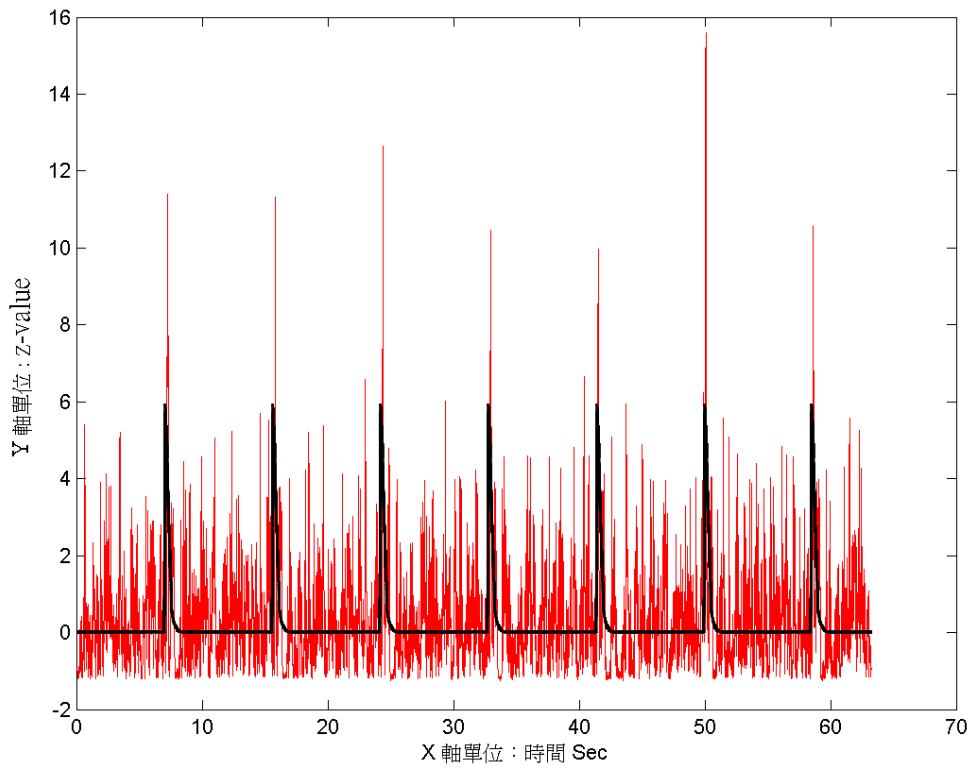


圖 37: 刺激頻率 0.12 Hz 之  $S_{SNA}$  模型與 (圖 33)  $SNA_N^*$  圖形 (細線) 相較圖

### 第 3 章 $BP_{NP}^*$ 、 $SNA_{NF}^*$ 間關係之推論

以數學模型模擬  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  的好處，在於可以藉由方程式的推演和參數的調整，比對生物受刺激後觀察到的現象，找到滿足生物  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  間的一些關係。例如  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  間的延遲時間、振幅間的倍數比或是持續時間的長度差等。在最終的應用上，期望可以從這些關係中，進而得知從  $BP_{NP}^*$  推論  $SNA_{NF}^*$ ，或者從  $SNA_{NF}^*$  推論出  $BP_{NP}^*$  的方法。

#### 3.1 $BP^*$ 、 $SNA^*$ 間可能的延遲時間

已知生物在受到刺激後，BP 能量訊號上的變化主要是受 SNA 的影響，因此在生物受刺激後，會有 BP 發生反應的時間較 SNA 發生反應的時間“延遲”的現象。而“延遲”了多少時間？就是這一小節所要探討的主題。

根據在受刺激後，當 BP 受 SNA 之影響漸弱時，其突起會逐漸不明顯，但在受到下一個受刺激的 SNA 影響時，會再度突起的想法，我們得到  $BP_{NP}^*$  基準線向上平移  $h$  後，各受刺激突起間之發生時間點可以視作  $BP^*$  的反應發生時間點 (圖 38)。於是將  $BP_{NP}^*$  基準線向上平移  $h$  後，各受刺激突起間之發生時間點收集起來，可得 7 個值。這 7 個起始點的對應時間列於表 3。

起始點	第 1 個	第 2 個	第 3 個	第 4 個	第 5 個	第 6 個	第 7 個
時間 (秒)	8.118	16.502	25.105	33.481	42.068	50.444	58.82

表 3:  $BP_P^*$  上各反應發生時間點一覽

接著，我們判斷  $SNA^*$  受刺激突起之發生時間點。 $SNA$  的受刺激反應，有發生得快消逝得也快的特性。觀察  $SNA_F^*$  (圖 8) 上包夾受



刺激突起的兩個低點，則這個兩個低點間的時間差便應為受刺激時之 SNA 反應區段。於是該反應區段的開始時間，便會是 SNA 受刺激時突起的發生時間點。將  $SNA_F^*$  的縮減圖 (圖 38) 起始點分別取出並記錄 (表 4)。

時間段 起始處	第 1 個	第 2 個	第 3 個	第 4 個	第 5 個	第 6 個	第 7 個
時間 (秒)	7.0009	15.564	24.097	32.77	41.419	49.764	58.421

表 4:  $SNA_F^*$  上各反應發生時間點一覽

在有了 BP 和 SNA 受刺激發生突起的開始時間參考點後，進一步便是比較這些參考點上時間的差異，由於受刺激後，BP 發生突起的開始時間會較 SNA 來的晚，所以分別記錄第一個 BP 突起開始時間減去第一個 SNA 突起開始時間、第二個 BP 突起開始時間減去第二個 SNA 突起開始時間、...、第七個 BP 突起開始時間減去第七個 SNA 突起開始時間 (表 5 列一)；第二個 BP 突起開始時間減去第一個 SNA 突起開始時間、第三個 BP 突起開始時間減去第二個 SNA 突起開始時間、...、第七個 BP 突起開始時間減去第六個 SNA 突起開始時間 (表 5 列二)；... 第七個 BP 突起開始時間減去第一個 SNA 突起開始時間 (表 5 列七)。

1.0626	0.95324	0.96887	0.64852	0.36723	0.65633	0.36723
9.4465	9.5559	9.3449	9.0167	8.962	9.0324	-
18.049	17.932	17.713	17.612	17.338	-	-
26.425	26.3	26.308	25.988	-	-	-
34.793	34.895	34.684	-	-	-	-
43.388	43.271	-	-	-	-	-
51.764	-	-	-	-	-	-

表 5: BP\* 與 SNA\* 各反應發生時間點相對應時間差 (單位：秒)

表 6 為表 5 各列的平均值，此即 BP\*、SNA\* 間受刺激後的可能延遲時間參考值。

列	1	2	3	4	5	6	7
平均值 (秒)	0.72	9.03	17.73	26.26	34.79	43.33	51.76
變異範圍	± 48 %	± 3.57 %	± 1.8 %	± 0.65 %	± 0.3 %	-	-

表 6: BP\*、SNA\* 間受刺激後的可能延遲時間參考值

根據生物上的觀察，可能的延遲時間應該介於 0.3 到 0.5 秒之間，上表中最接近這個值的為第一項之 0.72。其變異範圍稍大的可能原因，自表 5 第一列中可發現，由於每一項數值都相當小，所以變異範圍相對會顯得大了一些。而主要影響實際延遲時間和 0.72 之間差距的原因，在於“判定”與“檢測”各反應發生時間點沒有適當的依據，因此，如何“判定”與“檢測”各反應發生的時間點，便是縮短推測之延遲時間誤差的關鍵。然而在往後的推論中 (§3.3) 我們會發現，延遲時間並不影響我們推論  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  之間的關係，因此延遲時間的部份，在本論文中將沒有繼續深入的探討。

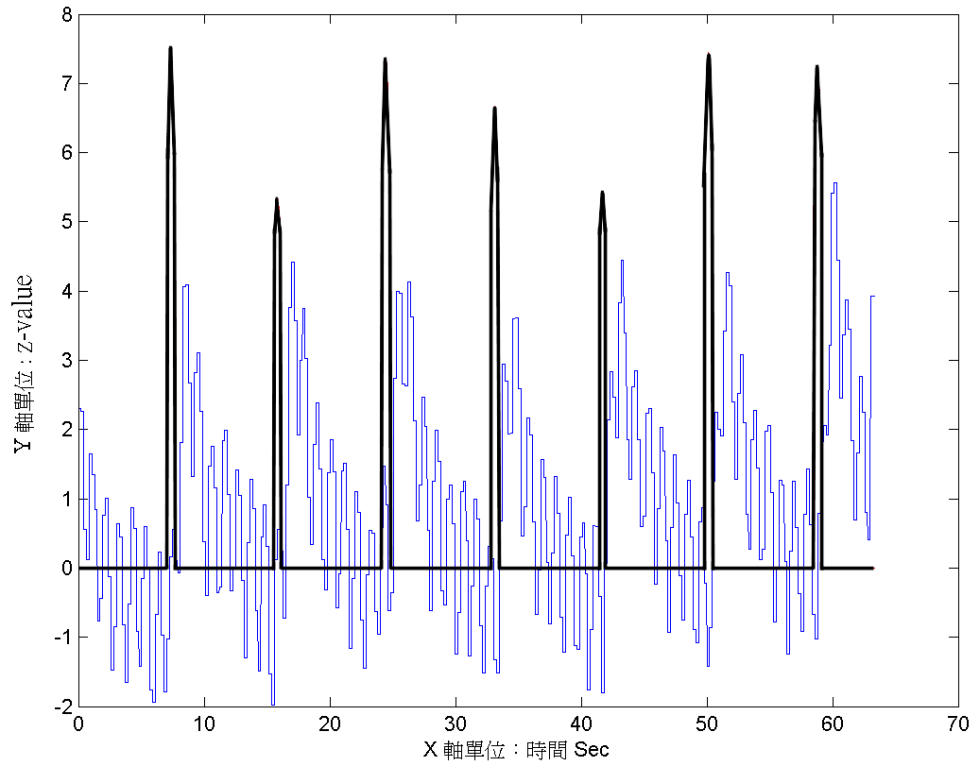


圖 38: 向上平移  $h$  的  $BP_{NP}^*$  (細線) 和  $SNA_N^*$  縮減圖 (粗線) 正規化後相對位置比較圖

**3.2**  $BP_{NP}^*$ 、 $SNA_{NF}^*$  於不同振幅、持續時間與延遲時間下之關係

在蔡孟利等人所著 “Frequency dependent sympathetic modulation of vasomotor tone in the anesthetized rat” [4] 中指出， $S_{BP}$  和  $S_{SNA}$  在不同刺激頻率下，於頻域  $\omega \in (0, 1]$  內取兩者比値之對數，會大致呈現一種線性關係 (圖 39)。這一節將使用所求得的  $BP^*$  和  $SNA^*$  數學模型，驗證上述線性關係。

操作的程序，是先固定  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  數學模型各自的反應持續時間、振幅大小和延遲時間，並逐次改變突起波形的出現頻率 (代表不同的刺激頻率)，接著取頻域上各不同刺激頻率所對應之頻域值。將得到的  $S_{BP}$  和  $S_{SNA}$  模擬波頻域值取比値之對數後，在頻域上畫出對應點。

第一種實驗是以阻尼函數  $M(x)$  來模擬  $BP_{NP}^*$ ，而以方盒函數  $B(x)$  來模擬  $SNA_{NF}^*$ ，根據第二章的模型，將  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  的反應持續時間分別訂為 4 秒和 0.5 秒， $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  的振幅都訂為 1.2，而  $BP_{NP}^*$  較  $SNA_{NF}^*$  反應延遲時間固定為 0.5 秒。令  $a$ 、 $b$  為模擬  $BP_{NP}^*$  之阻尼函數  $M(x)$  的參數， $c$ 、 $d$  為模擬  $SNA_{NF}^*$  之阻尼函數  $M(x)$  的參數，則  $a = 7.88$ 、 $b = 2.42$ 、 $c = 1.2$ 、 $d = 0.5$ 。總測試時間訂為 60 秒，取樣頻率 1000 Hz，刺激頻率  $\omega_0$  自 0.1 Hz 起，每次遞增 0.1 Hz 至 1.2 Hz。將  $S_{BP}$  和  $S_{SNA}$  對應  $\omega_0$  之頻域值相除，在頻域上畫出對應點，如圖 40 和圖 41。

第二種實驗是保持  $BP_{NP}^*$  的模型不變，但以阻尼函數  $M(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$ 。測試條件則和以方盒函數  $B(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  的測試條件完全相同，此時的各參數值為  $a = 7.88$ 、 $b = 2.42$ 、 $c = 78.01$ 、 $d = 23.92$ 。將  $S_{BP}$  和  $S_{SNA}$  對應  $\omega_0$  之頻域值相除，在頻域上畫出對應點，如圖 42 和圖 43。

觀察上述結果，正如 [4] 中所描述，於頻域 (0, 1] 內會大致呈現某一線性關係。而事實上，這是不是真為一條直線呢？又若為直線，在改變  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  的振幅、持續時間和延遲時間後，是否可以藉由所對應的模型參數而推算該直線的斜率呢？在下一節中，將把已求得的  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  數學模型，利用傅立葉轉換在數學上的推演，討論兩者比值的對數呈現什麼樣的情形。

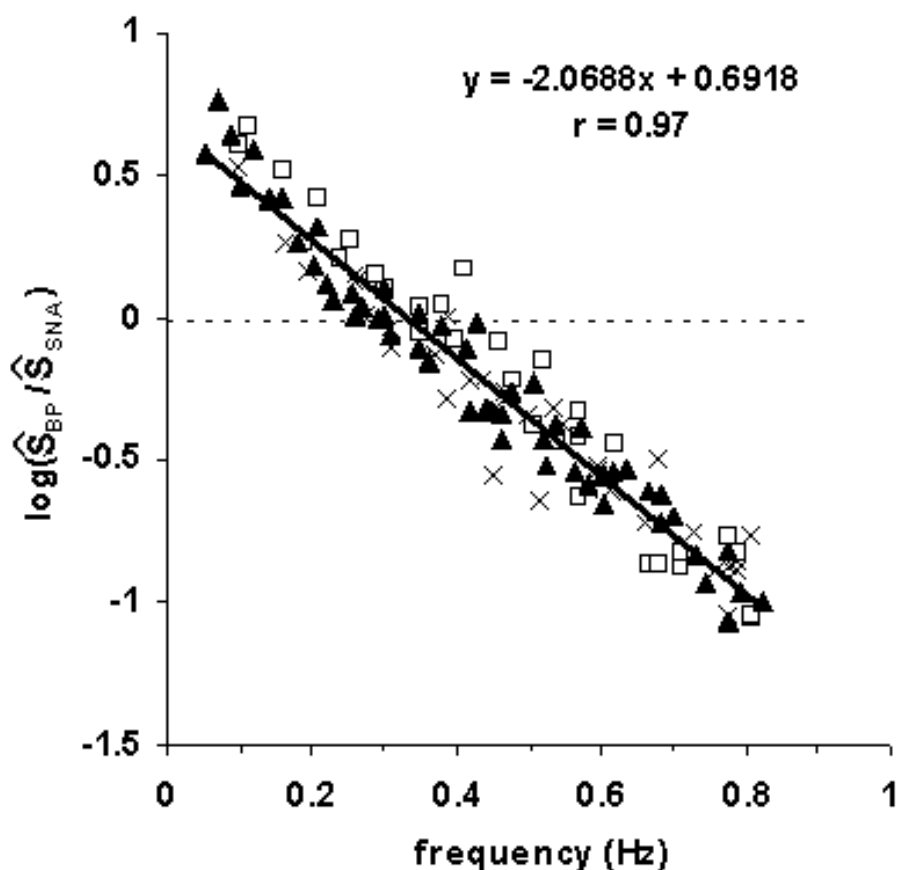


圖 39: 論文 [4] 中所觀察到的結果

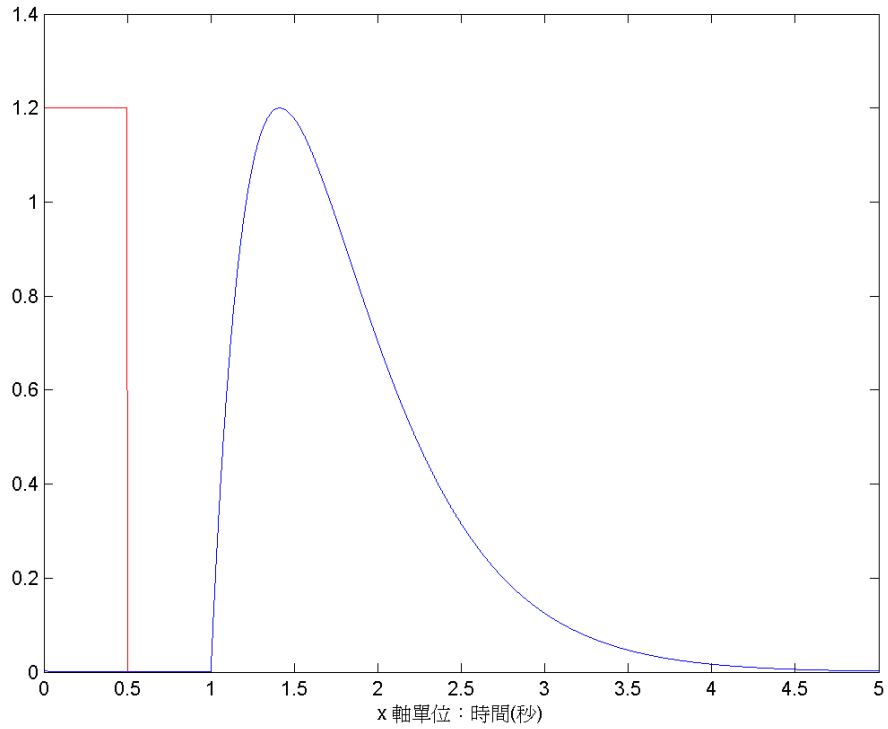


圖 40: BP\* 模型為阻尼函數  $M(x)$ 、SNA\* 模型為方盒函數  $B(x)$ ，總時間為 60 秒， $(a = 7.88、b = 2.42、c = 1.2、d = 0.5)$  時的基本模型示意圖

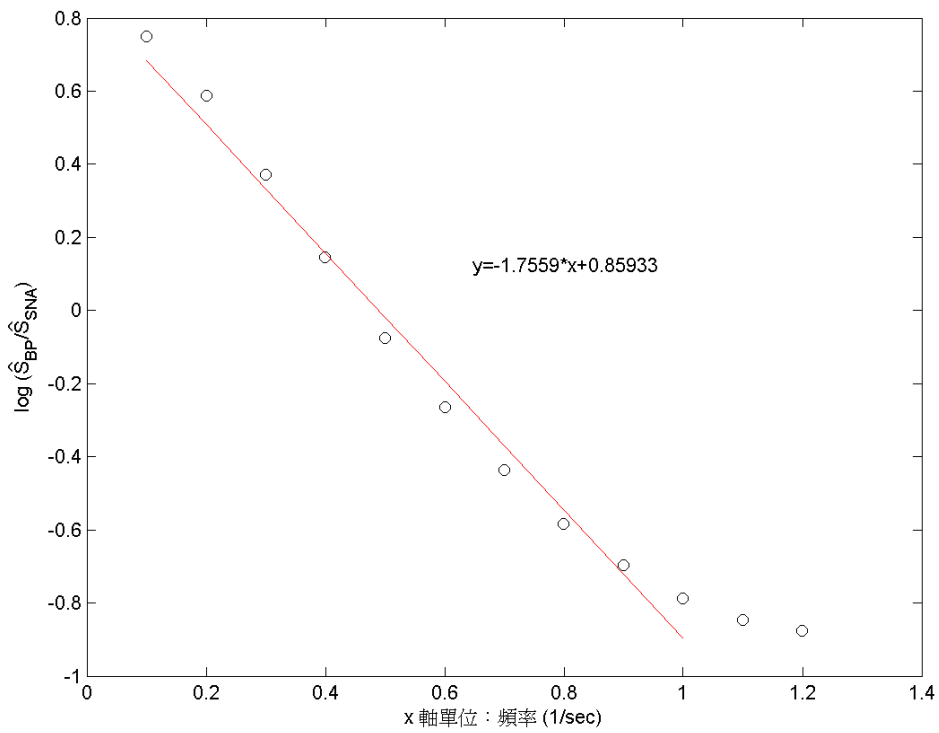


圖 41: BP\* 模型為阻尼函數  $M(x)$ 、SNA\* 模型為方盒函數  $B(x)$ ，總時間為 60 秒， $(a = 7.88、b = 2.42、c = 1.2、d = 0.5)$  時，分別取  $S_{BP}$  和  $S_{SNA}$  所對應之頻率值計算比值後，所繪的對數圖形

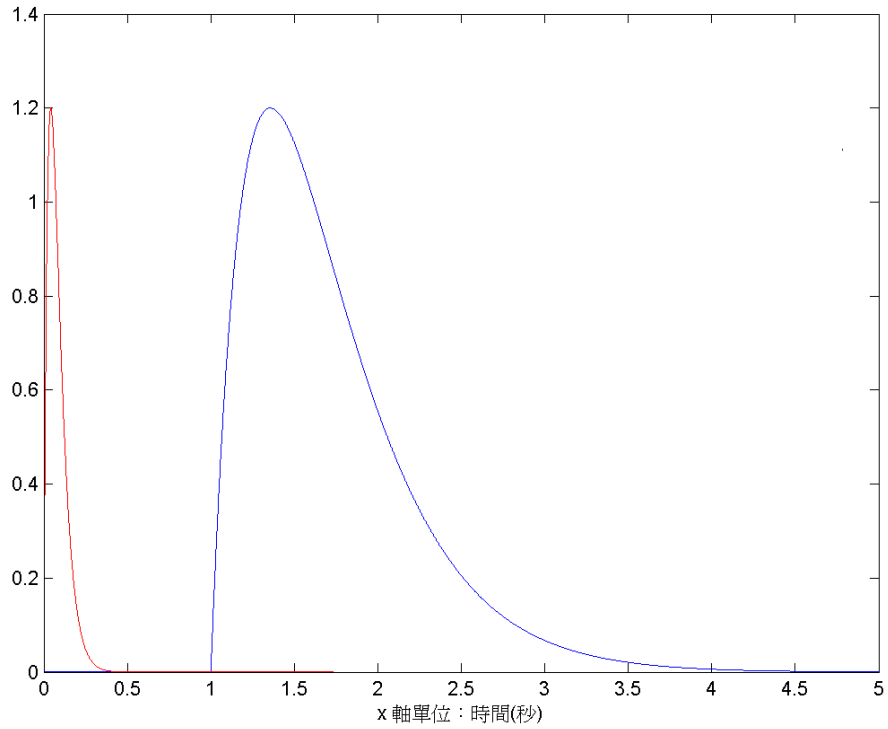


圖 42: BP\* 和 SNA\* 之模型都為阻尼函數  $M(x)$ ，總時間為 60 秒， $(a = 7.88、b = 2.42、c = 78.01、d = 23.92)$  時的基本模型示意圖

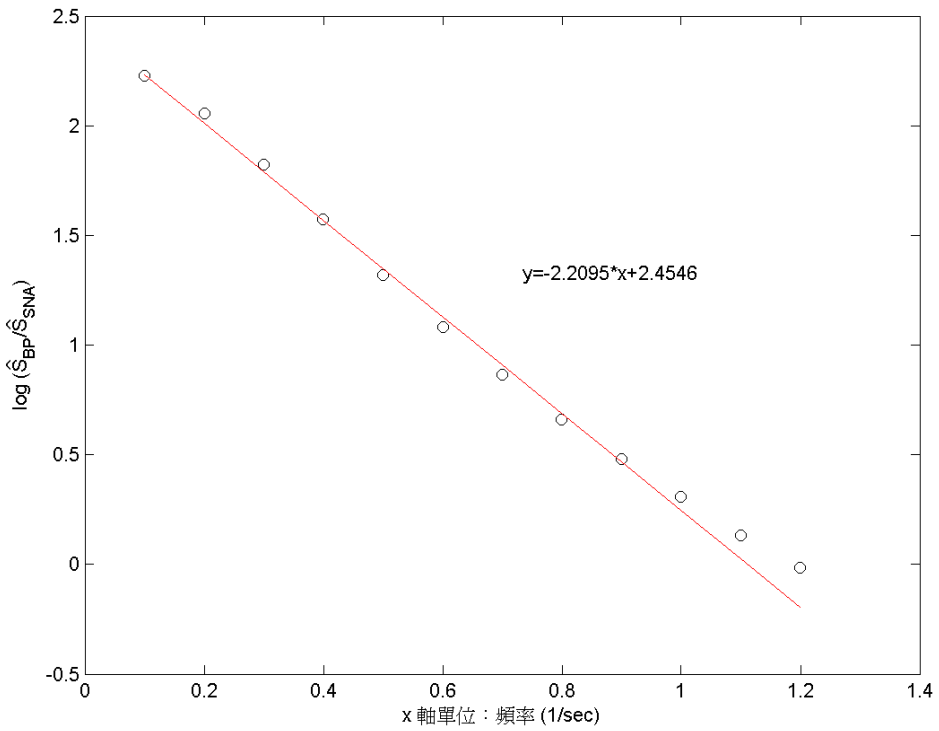


圖 43: BP\* 和 SNA\* 之模型都為阻尼函數  $M(x)$ ，總時間為 60 秒， $(a = 7.88、b = 2.42、c = 78.01、d = 23.92)$  時，分別取  $S_{BP}$  和  $S_{SNA}$  所對應之頻率值計算比值後，所繪的對數圖形

### 3.3 BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup>、SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 兩者間關係之數學推導

給定函數  $f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  則其傅立葉轉換定義成

$$\mathcal{F}[f(x)](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\omega x} dx$$

其中  $\hat{f}(\omega)$  是  $f(x)$  在頻率  $\omega \in \mathbb{R}$  處的頻域值。而此處我們關心的範圍是  $\omega \in (0, 1]$ 。

有傅立葉轉換的公式後，便可進一步推導在特定刺激頻率下，模擬 BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 的數學模型  $S_{BP}$  和模擬 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 的數學模型  $S_{SNA}$  的傅立葉轉換函數，也就是  $S_{BP}$  和  $S_{SNA}$  的頻域值。

當刺激的頻率為  $\omega_0$ ，總時間長度為  $T$  時，已知  $S_{BP}$  可寫成

$$\sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} M\left(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{BP}\right) + h$$

而對於任意  $f(x - a)$ ，經變數變換，再作傅立葉轉換  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ，可得：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x - a)](\omega) &= \int f(x - a)e^{-i2\pi\omega x} dx \\ &= \int f(x)e^{-i2\pi\omega(x+a)} dx \\ &= e^{-i2\pi\omega a} \int f(x)e^{-i2\pi\omega x} dx \\ &= e^{-i2\pi\omega a} \hat{f}(\omega) \end{aligned}$$

令  $\hat{S}_{BP}$  和  $\hat{S}_{SNA}$  分別為  $S_{BP}$  和  $S_{SNA}$  經過傅立葉運算後的結果。則推導出來的  $\hat{S}_{BP}$  如下所述：



$$\begin{aligned}
\hat{S}_{BP}(\omega) &= \mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} M\left(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{BP}\right) + h\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} \mathcal{F}\left(M\left(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{BP}\right) + \mathcal{F}(h)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} e^{-i2\pi\omega\left(\frac{n}{\omega_0} + t_{BP}\right)} \hat{M}(\omega) + \mathcal{F}(h)
\end{aligned}$$

因為  $h$  在  $[0, T]$  內是常數，其頻域值只在  $\omega = 0$  處有值，我們不討論  $\omega = 0$  之頻域值，故將它略去不計。所以

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{BP}(\omega) &= \hat{M}(\omega) \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} e^{-i2\pi\omega\left(\frac{n}{\omega_0} + t_{BP}\right)} \\
&= e^{-i2\pi\omega t_{BP}} \frac{1 - e^{-i2\pi\omega \frac{\lfloor T\omega_0 \rfloor + 1}{\omega_0}}}{1 - e^{-i\omega 2\pi \frac{1}{\omega_0}}} \hat{M}(\omega) \\
&:= e^{-i2\pi\omega t_{BP}} \frac{1 - e^{-i2\pi\omega \frac{\lfloor T\omega_0 \rfloor + 1}{\omega_0}}}{1 - e^{-i\omega 2\pi \frac{1}{\omega_0}}} \hat{M}_{BP}(\omega) \quad (2)
\end{aligned}$$

上述即為以特定刺激頻率  $\omega_0$  刺激下  $S_{BP}$  的傅立葉轉換推導。接下來看  $SNA_{NF}^*$ 。

當模擬  $SNA_{NF}^*$  反應的數學模型為阻尼函數  $M(x)$ ，刺激的頻率為  $\omega_0$ ，總時間長度為  $T$  時，已知這時的  $S_{SNA}$  可寫成

$$\sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} M\left(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{SNA}\right)$$

由於  $SNA^*$  反應會較  $BP^*$  反應提早  $\tau$  時間發生 ( $\tau \geq 0$ )，所以要將已得的  $S_{SNA}$  改寫為

$$S_{SNA} = \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} M\left(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{SNA} + \tau\right)$$

這裡  $\tau$  為  $BP^*$  和  $SNA^*$  的模擬波間距 (模擬  $BP^*$  較  $SNA^*$  受刺激突起波形的延遲時間)，由於  $\tau$  和  $t_{SNA}$  都為已知的定值，因此可令

$\kappa = t_{SNA} - \tau$ ，則

$$S_{SNA}(\omega) = \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} M(x - \frac{n}{\omega_0} - \kappa)$$

而  $S_{SNA}$  的傅立葉轉換如下：

$$\begin{aligned} \hat{S}_{SNA}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^k M(x - \frac{n}{\omega_0} - \kappa) e^{-i2\pi\omega x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} \int_0^T M(x - (\frac{n}{\omega_0} + \kappa)) e^{-i2\pi\omega x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} e^{-i2\pi\omega(\frac{n}{\omega_0} + \kappa)} \hat{M}(w) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} e^{-i2\pi\omega(\frac{n}{\omega_0} + \kappa)} &= e^{-i2\pi\omega\kappa} \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} e^{-i2\pi\omega\frac{n}{\omega_0}} \\ &= e^{-i2\pi\omega\kappa} \frac{1 - e^{-i2\pi\omega\frac{\lfloor T\omega_0 \rfloor + 1}{\omega_0}}}{1 - e^{-i\omega 2\pi\frac{1}{\omega_0}}} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \hat{S}_{SNA}(\omega) &= \hat{M}(w) \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} e^{-i2\pi\omega(\frac{n}{\omega_0} + \kappa)} \\ &= e^{-i2\pi\omega\kappa} \frac{1 - e^{-i2\pi\omega\frac{\lfloor T\omega_0 \rfloor + 1}{\omega_0}}}{1 - e^{-i\omega 2\pi\frac{1}{\omega_0}}} \hat{M}(w) \\ &:= e^{-i2\pi\omega\kappa} \frac{1 - e^{-i2\pi\omega\frac{\lfloor T\omega_0 \rfloor + 1}{\omega_0}}}{1 - e^{-i\omega 2\pi\frac{1}{\omega_0}}} \hat{M}_{SNA}(w) \end{aligned} \quad (3)$$

性質 3.1 當總時間長度為  $T$ ，以特定刺激頻率  $\omega_0$  刺激生物， $BP_{NP}^*$  的數學模型為阻尼函數  $M(x)$ ，而  $SNA_{NF}^*$  的數學模型也為阻尼函數  $M(x)$  時，我們可以得到  $\hat{S}_{BP}$  和  $\hat{S}_{SNA}$  比值的絕對值為

$$\left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right| = \frac{a(d^2 + 4\pi^2\omega_0^2)}{c(b^2 + 4\pi^2\omega_0^2)}$$

並且在頻域  $(0, 1]$  間， $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  可視為一條直線。

證明：依據上述 (2)、(3) 結果，則

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega)}{\hat{S}_{SNA}(\omega)} \right| \\
&= \left| \frac{e^{-i2\pi\omega t_{BP}} \frac{1-e^{-i2\pi\omega \frac{\lfloor T\omega_0 \rfloor + 1}{\omega_0}}}{1-e^{-i\omega 2\pi \frac{1}{\omega_0}}} \hat{M}_{BP}(\omega)}{e^{-i2\pi\omega \kappa} \frac{1-e^{-i2\pi\omega \frac{\lfloor T\omega_0 \rfloor + 1}{\omega_0}}}{1-e^{-i\omega 2\pi \frac{1}{\omega_0}}} \hat{M}_{SNA}(\omega)} \right| \\
&= \left| \frac{e^{-i2\pi\omega t_{BP}} \hat{M}_{BP}(\omega)}{e^{-i2\pi\omega \kappa} \hat{M}_{SNA}(\omega)} \right| \\
&= \left| \frac{\hat{M}_{BP}(\omega)}{\hat{M}_{SNA}(\omega)} \right| \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{\int_0^T a x e^{-bx} e^{-i2\pi\omega x} dx}{\int_0^T c x e^{-dx} e^{-i2\pi\omega x} dx} \right| \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{a(e^{-(b+i2\pi\omega)T} T b + e^{-(b+i2\pi\omega)T} T i 2\pi\omega + e^{-(b+i2\pi\omega)T} - 1)}{c(e^{-(d+i2\pi\omega)T} T b + e^{-(d+i2\pi\omega)T} T i 2\pi\omega + e^{-(d+i2\pi\omega)T} - 1)} \right| \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{(b+i2\pi\omega)^2}{(d+i2\pi\omega)^2} \right| \\
&= \left| \frac{a(d+i2\pi\omega)^2}{c(b+i2\pi\omega)^2} \right| \\
&= \frac{|a||d+i2\pi\omega|^2}{|c||b+i2\pi\omega|^2} \quad (a > 0, c > 0) \\
&= \frac{a(d^2 + 4\pi^2\omega^2)}{c(b^2 + 4\pi^2\omega^2)}
\end{aligned}$$

代入  $\omega = \omega_0$ ，於是可得

$$\left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right| = \frac{a(d^2 + 4\pi^2\omega_0^2)}{c(b^2 + 4\pi^2\omega_0^2)} \quad (4)$$

而由圖 39 上的直線方程式，可算出在 0.33 附近會有  $\hat{S}_{BP}(0.33) \approx \hat{S}_{SNA}(0.33)$  的情形。將 (4) 式取對數後，在 0.33 處作泰勒展開，並以第二章模擬  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  的阻尼函數  $M(x)$  參數值

$a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  代入，可得

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega)}{\hat{S}_{SNA}(\omega)} \right| \\ \approx -0.00046 - 4.58 * (\omega - 0.33) \end{aligned}$$

而誤差上限則約為 2.32。

於是性質 3.1 即為以特定刺激頻率  $\omega_0$  刺激下，使用阻尼函數  $M(x)$  模擬  $BP_{NP}^*$  及  $SNA_{NF}^*$  的推論結果。

以圖 43 為例，將其參數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$ ，代入 (4) 式，驗證 (4) 式所算出來的結果如圖 44，可見兩者在  $\omega \in (0, 1]$  時，大致上是相當吻合的。

當模擬  $SNA_{NF}^*$  反應的數學模型為方盒函數  $B(x)$ ，刺激的頻率為  $\omega_0$ ，總時間長度為  $T$  時，則模擬  $SNA_{NF}^*$  之方盒函數  $B(x)$  出現週期便為  $\frac{1}{\omega_0}$ 。已知這時的  $S_{SNA}$  可寫成

$$S_{SNA} = \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} B\left(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{SNA}\right)$$

而  $SNA^*$  反應同樣會較  $BP^*$  受刺激反應提早  $\tau$  時間發生，所以同樣可將  $S_{SNA}$  改寫為

$$\sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} B\left(x - \frac{n}{\omega_0} - \kappa\right)$$

則  $S_{SNA}$  經傅立葉轉換後如下：

$$\hat{S}_{SNA}(\omega) = \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} e^{-i2\pi\omega\left(\frac{n}{\omega_0} + \kappa\right)} \hat{B}(w) \quad (5)$$

性質 3.2 當總時間長度為  $T$ ，以特定刺激頻率  $\omega_0$  刺激生物， $BP_{NP}^*$  的數學模型為阻尼函數  $M(x)$ ，而  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為方盒函數  $B(x)$  時，我們可以得到  $\hat{S}_{BP}$  和  $\hat{S}_{SNA}$  比值的絕對值為

$$\left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right| = \frac{a\pi\omega_0}{c(b^2 + 4\pi^2\omega_0^2) |\sin(\pi\omega_0 d)|}$$

並且在頻域  $(0, 1]$  間， $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  可視為一條直線。

證明：依據上述 (2)、(4) 結果，則

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega)}{\hat{S}_{SNA}(\omega)} \right| \\
 &= \left| \frac{\hat{M}(\omega)}{\hat{B}(\omega)} \right| \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{-a(e^{-(b+2i\pi\omega)T} T b + 2e^{-(b+2i\pi\omega)T} T i\omega\pi + e^{-(b+2i\pi\omega)T} - 1)}{(b + 2i\pi\omega)^2} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{c(e^{-2i\pi\omega d} - 1)}{i\pi\omega} \right| \\
 &= \left| \frac{a}{(b + 2i\pi\omega)^2} \right| \\
 & \quad \left| \frac{-c(e^{-2i\pi\omega d} - 1)}{2i\pi\omega} \right| \\
 &= \left| \frac{2ai\pi\omega}{-c(e^{-2i\pi\omega d} - 1)(b + 2i\pi\omega)^2} \right| \\
 &= \frac{|2ai\pi\omega|}{|c||e^{-2i\pi\omega d} - 1||b + 2i\pi\omega|^2}
 \end{aligned}$$

已知

$$|b + 2i\pi\omega|^2 = b^2 + 4\pi^2\omega^2$$

並且

$$\begin{aligned}
 |e^{-2i\pi\omega d} - 1| &= \left| \frac{e^{-i\pi\omega d} - e^{i\pi\omega d}}{e^{i\pi\omega d}} \right| \\
 &= 2|\sin(\pi\omega d)|
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega)}{\hat{S}_{SNA}(\omega)} \right| \\
 &= \frac{|2ai\pi\omega|}{2|c||\sin(\pi\omega d)|(b^2 + 4\pi^2\omega^2)} \quad (a, c, \omega > 0) \\
 &= \frac{a\pi\omega}{c(b^2 + 4\pi^2\omega^2)|\sin(\pi\omega d)|} \tag{6}
 \end{aligned}$$

同樣將 (6) 式取對數後，在 0.33 處作泰勒展開，並將第二章推測的阻尼函數  $M(x)$  及方盒函數  $B(x)$  參數值代入可得

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega)}{\hat{S}_{SNA}(\omega)} \right| \\ \approx -0.49 - 4.62 * (\omega - .33) \end{aligned}$$

誤差上限則約為 2.33。

將 (6) 式代入  $\omega = \omega_0$  時，即為性質 3.2 中，以特定刺激頻率  $\omega_0$  刺激下，使用阻尼函數  $M(x)$  模擬  $BP_{NP}^*$  及以方盒函數  $B(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  的推論結果。

以圖 41 為例，將其參數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$ ，代入 (6) 式，驗證 (6) 式所算出來的結果如圖 45，可見兩者在  $\omega \in (0, 1]$  時，大致上是相當穩合的。

由圖 46 在  $\omega \in (0, 5]$  時 (4) 式的情形和圖 47 在  $\omega \in (0, 5]$  時 (6) 式的情形，可發現  $\left| \frac{\hat{S}_{BP}}{\hat{S}_{SNA}} \right|$  在頻域上取對數後，其實不完全為一條直線。只是在頻域 0 到 1 之間，才對我們有意義，而這段頻域範圍中的曲線卻恰好有如一條直線。如有需要估計此直線方程式時，可利用最小平方直線公式，找出最接近的直線。令欲取直線的點集合依序為  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $\dots$ 、 $(x_n, y_n)$  這些點，假設最接近上述這些點的直線方程式為  $y = ax + b$ ，則採最小平方直線公式，可得

$$[ab]^T = (A^H A)^{-1} A^H y \text{。 這裡 } A \text{ 為 } \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \text{ 一個 } n \times 2 \text{ 矩陣， } y \text{ 為}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ 一個 } n \times 1 \text{ 矩陣。}$$

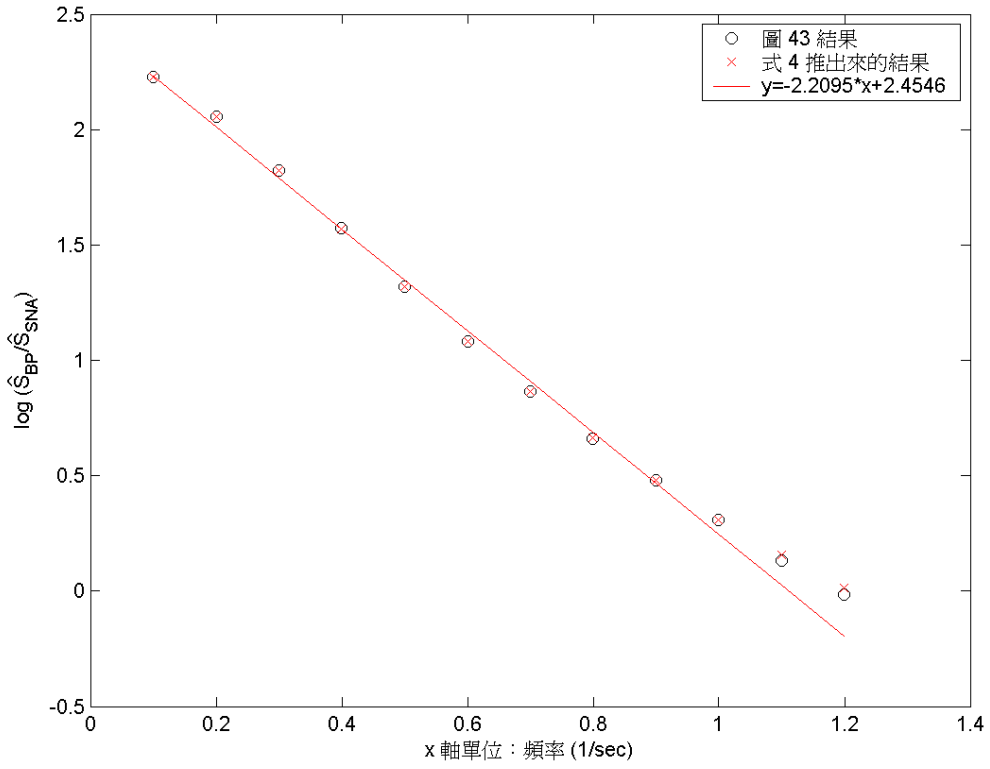


圖 44: 式 4 中  $a = 7.88$ 、 $b = 2.42$ 、 $c = 78.01$ 、 $d = 23.92$  總時間長度為 50 秒時，與圖 43 作比較

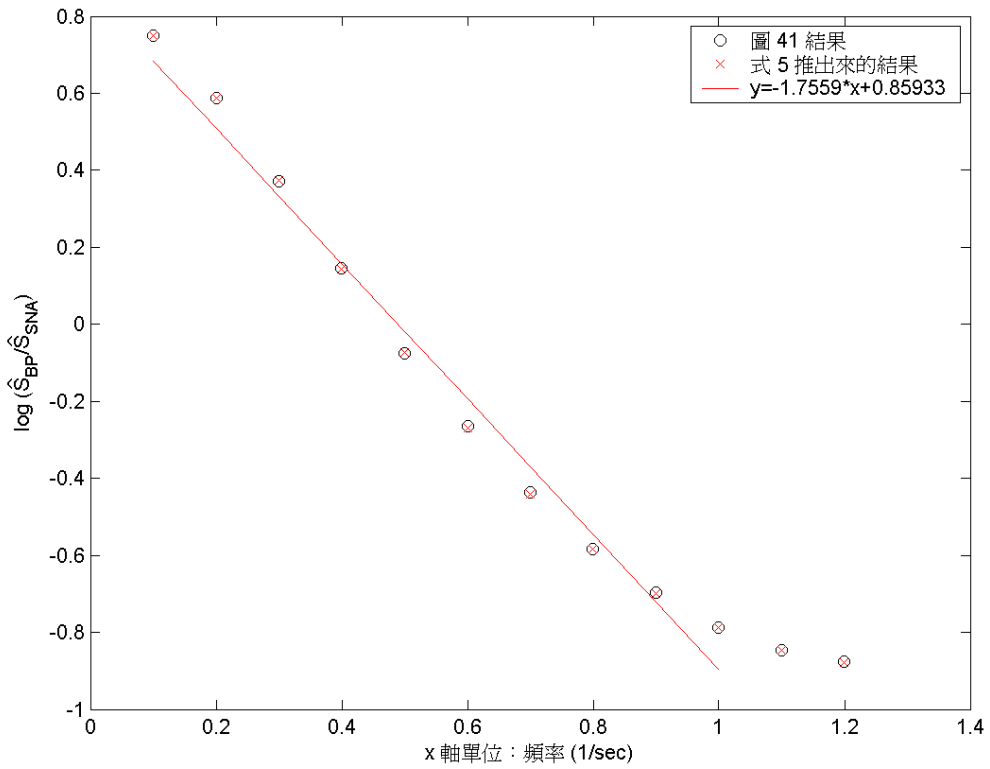


圖 45: 式 6 中  $a = 36.53$ 、 $b = 11.2$ 、 $c = 1$ 、 $d = 0.2$  總時間長度為 50 秒時，與圖 41 作比較

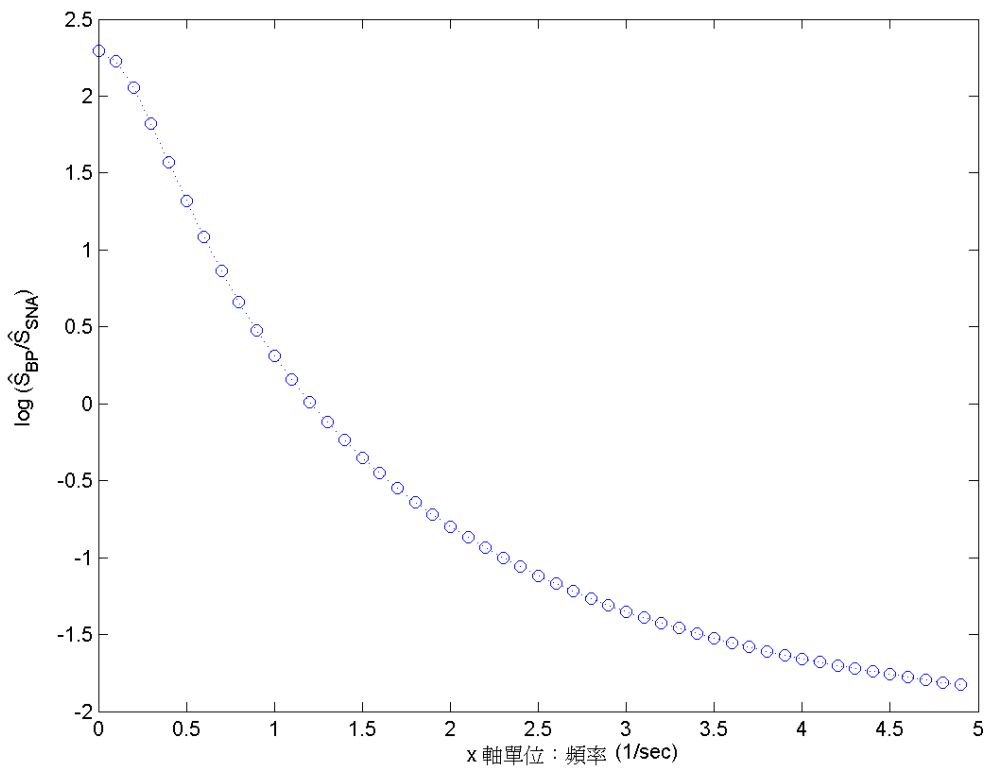
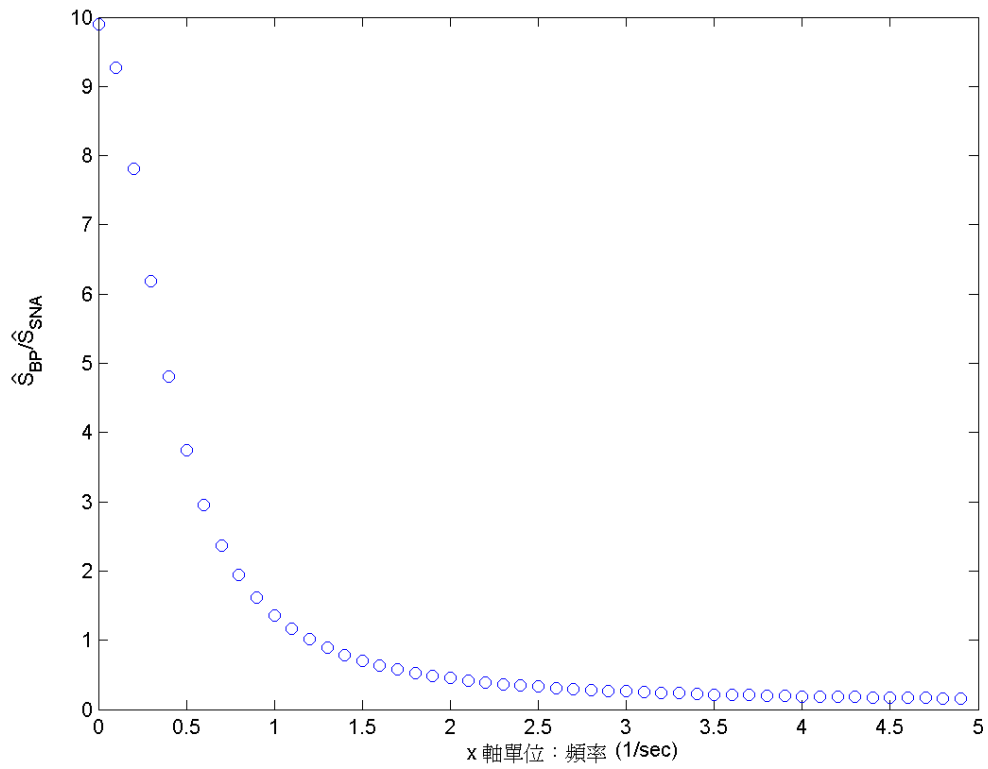


圖 46: 式 4 在頻率 0 到 5 間的分佈情形 (上圖) 和取對數後情形 (下圖)



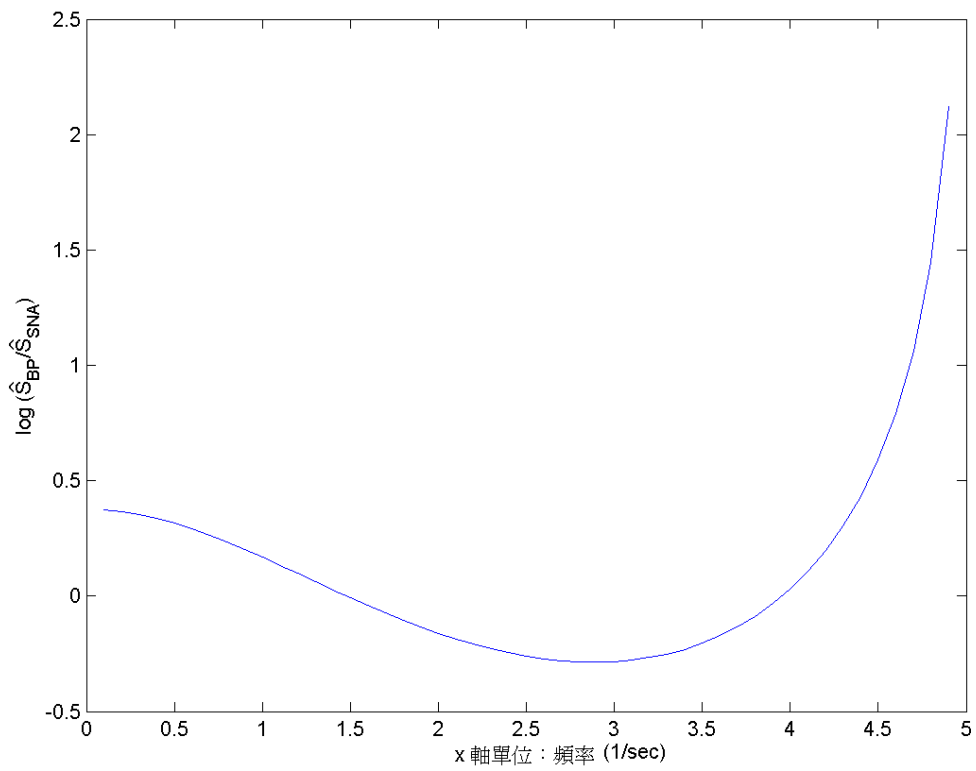
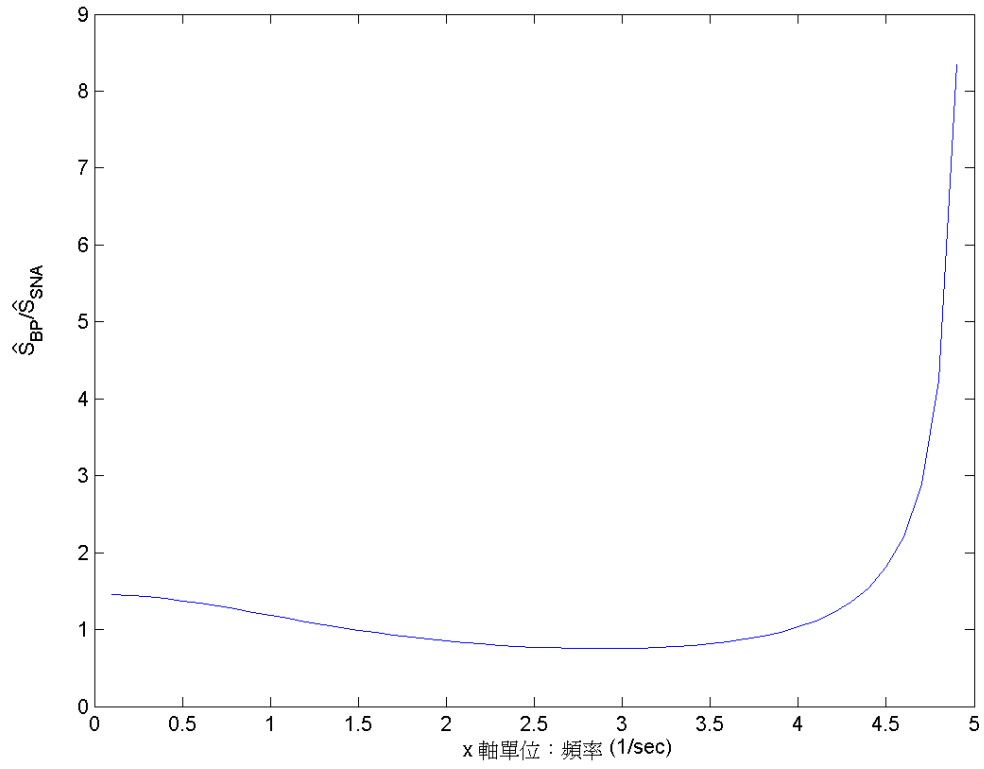


圖 47: 式 6 在頻率 0 到 5 間的分佈情形 (上圖) 和取對數後情形 (下圖)

### 3.4 $BP_{NP}^*$ 與 $SNA_{NF}^*$ 振幅與持續時間關係之推論

在推論  $BP_{NP}^*$  與  $SNA_{NF}^*$  間振幅與持續時間關係時，雖然就波形上看來  $BP_{NP}^*$  的受刺激突起較明顯，也較容易觀察，然而其受刺激後卻有很長一段時間的“餘波盪漾”，甚至會有互相重疊的情形，反而無法知道其確切的持續時間會有多長。因此本節將以第二章中所求得的  $SNA_{NF}^*$  振幅和持續時間值當作已知，考慮  $BP_{NP}^*$  的振幅為  $SNA_{NF}^*$  的  $\alpha$  倍，持續時間較  $SNA_{NF}^*$  多  $\beta$  秒，透過調整  $BP_{NP}^*$  的參數控制振幅和持續時間，使其滿足實際生物  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega)}{\hat{S}_{SNA}(\omega)} \right|$  在頻譜圖的情形，進而推出可能的  $\alpha$  值和  $\beta$  值。

當  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為阻尼函數  $M(x)$  時，以 1 章第 2 節的原始生物資訊作例子，考慮  $SNA_{NF}^*$  的振幅為 5.89，持續時間為 1.5 秒 ( $c = 133.36$ 、 $d = 8.33$ ，相關係數為 0.29)，因為  $BP_{NP}^*$ 、 $SNA_{NF}^*$  的振幅分別為  $\frac{a}{be}$  和  $\frac{c}{de}$ ，持續時間則為  $\frac{4\ln(2)+3\ln(5)+\ln(a)}{b}$  和  $\frac{4\ln(2)+3\ln(5)+\ln(c)}{d}$ ，於是可以得到下面這三個式子：

i.  $BP^*$  的振幅為  $SNA^*$  的  $\alpha$  倍，則有  $\frac{a}{be} = \alpha \frac{c}{de}$ 。

ii.  $BP^*$  的持續時間比  $SNA^*$  多  $\beta$  秒，則有

$$\frac{4\ln(2)+3\ln(5)+\ln(a)}{b} = \frac{4\ln(2)+3\ln(5)+\ln(c)}{d} + \beta。$$

iii.  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(0.33)}{\hat{S}_{SNA}(0.33)} \right| \approx 0$ 。

經由測試，當  $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 2.5$  (即  $BP_{NP}^*$  的振幅為  $SNA_{NF}^*$  的 0.5 倍，持續時間則較  $SNA_{NF}^*$  多 2.5 秒) 時 (圖 48、49)，與 [4] 的結果 (圖 39) 最接近，可得  $a = 21.34$ 、 $b = 2.67$ ，將此計算出之參數  $a$ 、 $b$  代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中，與原始  $BP_{NP}^*$  單一完整訊號相較，相關係數 0.59，相對誤差 16% (圖 50)；與原始  $BP_{NP}^*$  上一段時間之訊號相較，相關係數 0.55，相對誤差 15% (圖 51)。

$SNA_{NF}^*$  的數學模型為方盒函數  $B(x)$  型式時，同樣以第一章中

的原始生物資訊作例子，考慮  $SNA_{NF}^*$  的振幅為 5.89，持續時間為 0.53 秒 ( $c = 5.89$ 、 $d = 0.53$ ，相關係數為 0.23)，而原  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為阻尼函數  $M(x)$  型式時的三個式子，則改寫成以下型式：

i.  $BP_{NP}^*$  的振幅為  $SNA_{NF}^*$  的  $\alpha$  倍，則有  $\frac{a}{be} = \alpha c$ 。

ii.  $BP_{NP}^*$  的持續時間比  $SNA_{NF}^*$  多  $\beta$  秒，則有

$$\frac{4\ln(2)+3\ln(5)+\ln(a)}{b} = d + \beta。$$

iii.  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(0.33)}{\hat{S}_{SNA}(0.33)} \right| \approx 0$ 。

經由測試，當  $\alpha = 0.8$ 、 $\beta = 4$  (即  $BP_{NP}^*$  的振幅為  $SNA_{NF}^*$  振幅之 0.8 倍，而持續時間則較  $SNA_{NF}^*$  多 4 秒) 時 (圖 52、53)，與 [4] 的結果 (圖 39) 最接近，將計算出之參數  $a = 31.22$  和  $b = 2.44$  代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中，與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖單一完整訊號相較，相關係數 0.61，相對誤差 15% (圖 54)；與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖上一段時間之訊號相較，相關係數 0.59，相對誤差 15% (圖 55)。

這裡所推論出來的為  $BP_{NP}^*$  模型振幅、持續時間參考值，經與原始  $BP_{NP}^*$  比較，相關係數都有達 0.5 以上，所以可將上述的  $\alpha$  值和  $\beta$  值，視為從  $SNA_{NF}^*$  推論  $BP_{NP}^*$  或是從  $BP_{NP}^*$  推論  $SNA_{NF}^*$  的參考。

比較此時使用方盒函數  $B(x)$  和阻尼函數  $M(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  的效果，使用方盒函數推論出來的  $BP_{NP}^*$  模型經與  $BP_{NP}^*$  比較，相關係數較使用阻尼函數  $M(x)$  高。

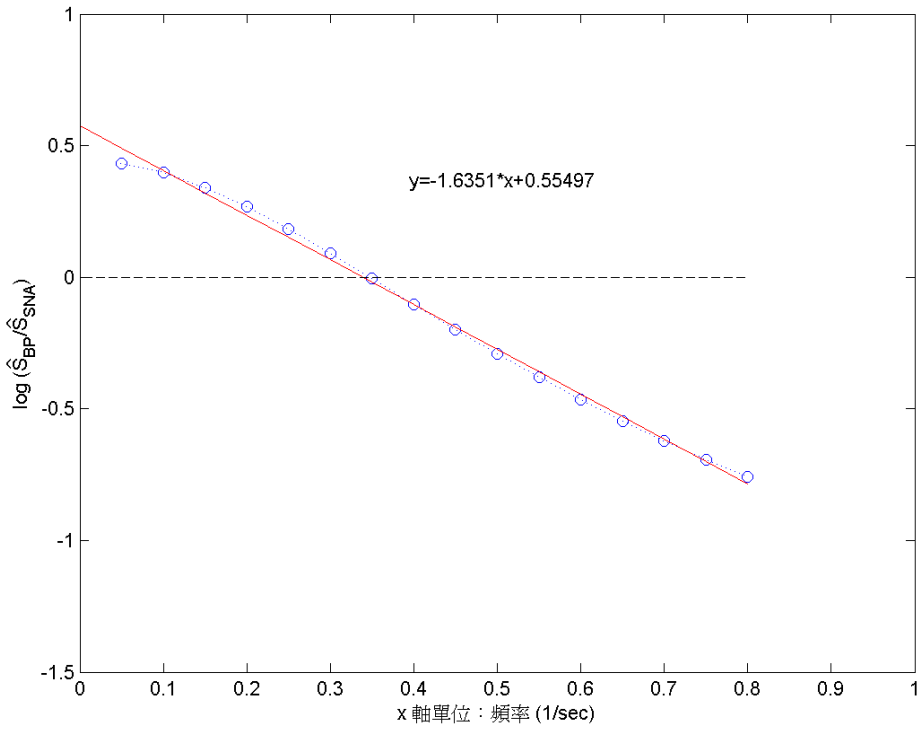


圖 48:  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為阻尼函數  $M(x)$ ,  $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 2.5$  時,  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  在頻率 0 到 1 Hz 間的情形

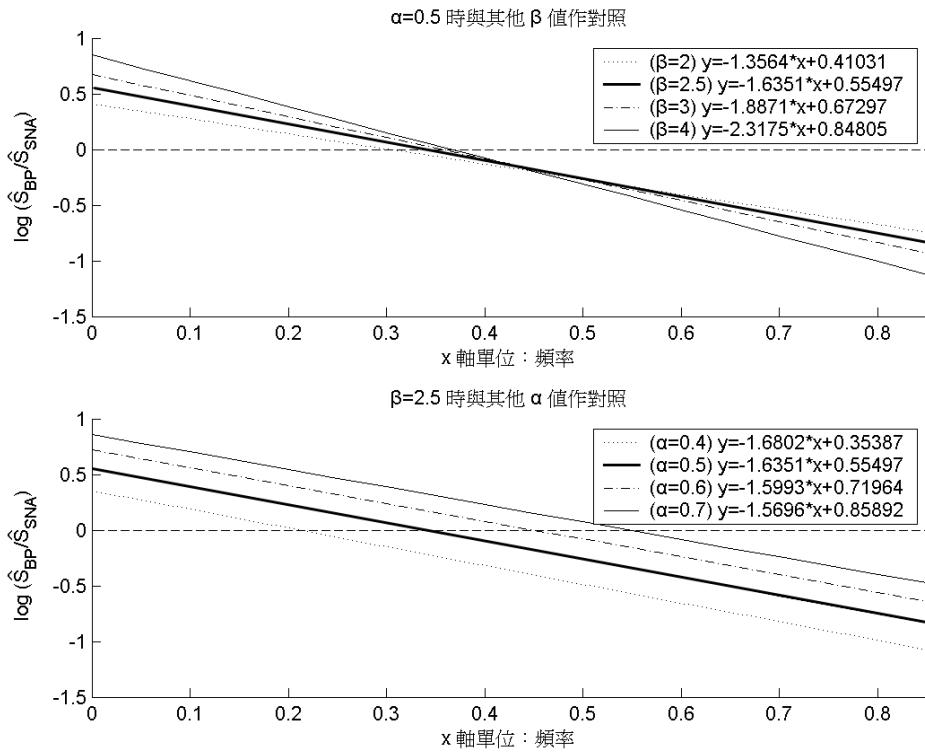


圖 49:  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為阻尼函數  $M(x)$ ,  $\alpha = 0.5$  時,  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  在頻率 0 到 1 Hz 上不同  $\alpha$ 、 $\beta$  值對照

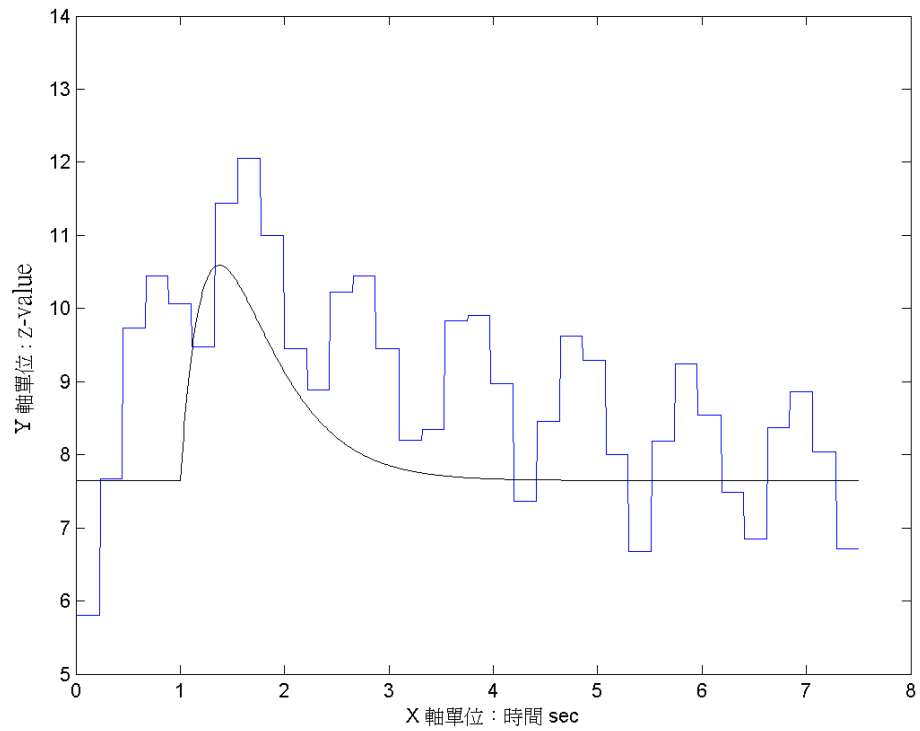


圖 50:  $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 2.5$  ( $a = 21.34$ 、 $b = 2.67$ ) 時，代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中與  $BP_{NP}^*$  能量圖單一完整訊號比較

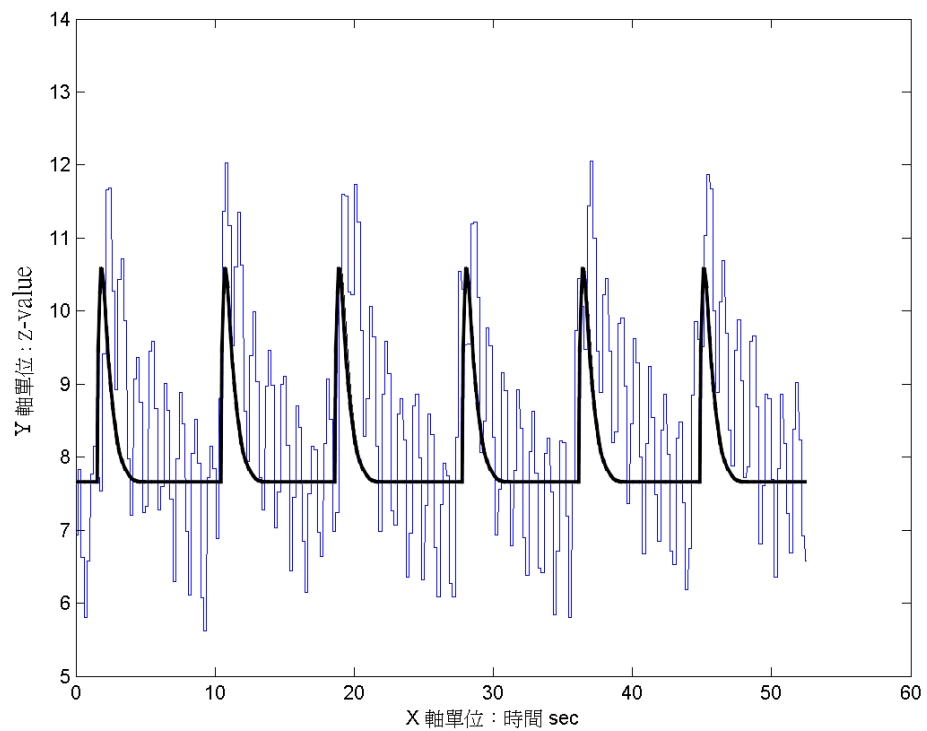


圖 51:  $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 2.5$  ( $a = 21.34$ 、 $b = 2.67$ ) 時，代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中與  $BP_{NP}^*$  能量圖上一段時間之訊號比較

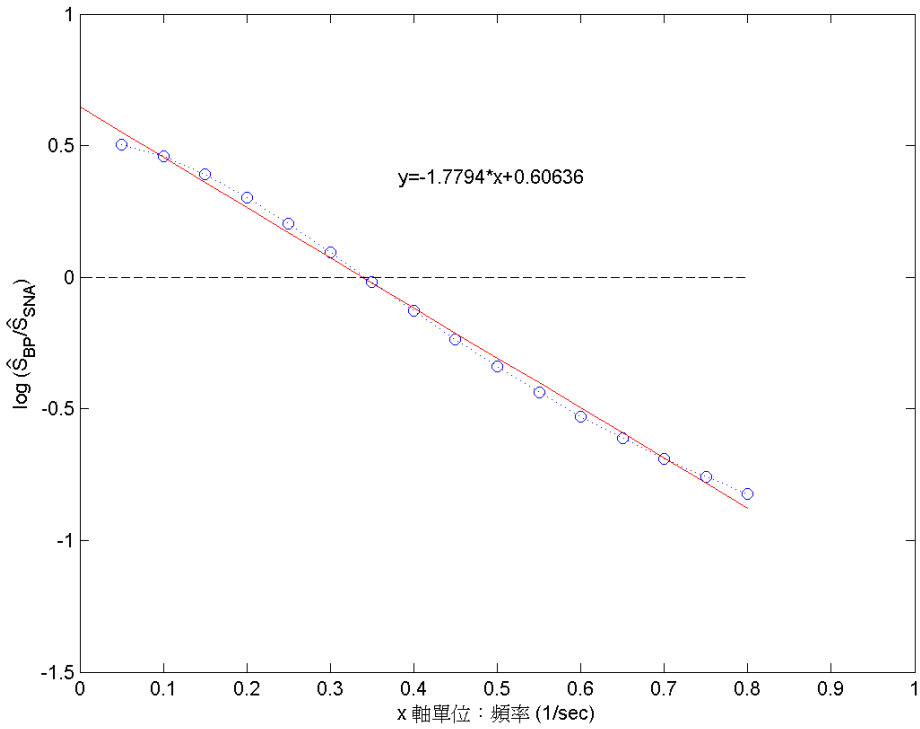


圖 52:  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為方盒函數  $B(x)$  型式， $\alpha = 0.8$  和  $\beta = 4$  時， $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  在頻率 0 到 1 Hz 的情形

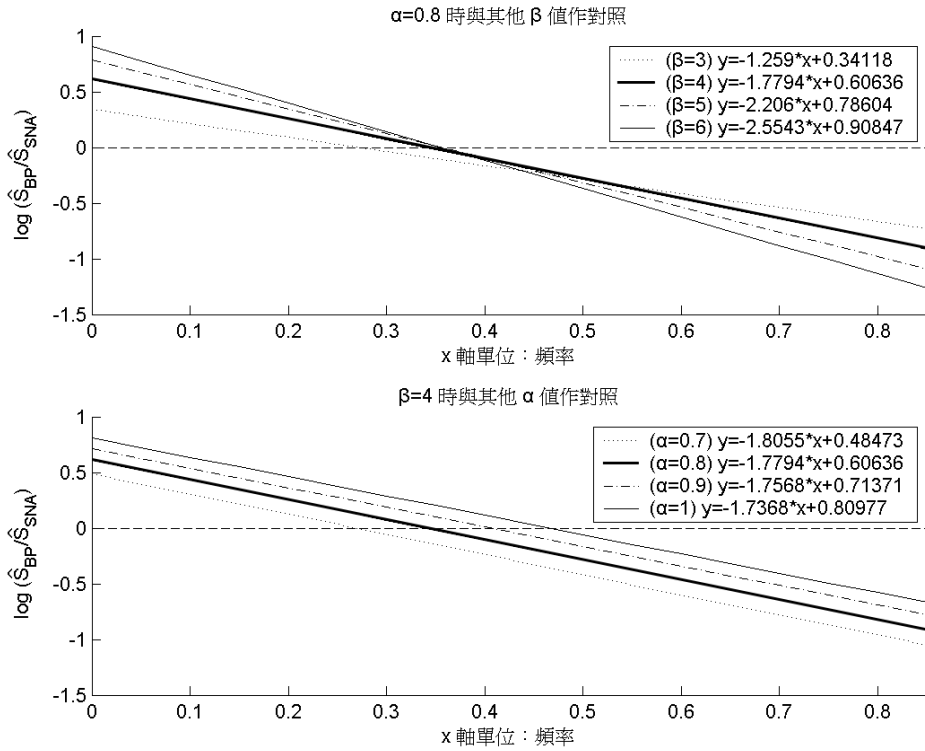


圖 53:  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為方盒函數  $B(x)$  型式， $\alpha = 0.8$  時， $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  在頻率 0 到 1 Hz 上不同  $\alpha$ 、 $\beta$  值對照

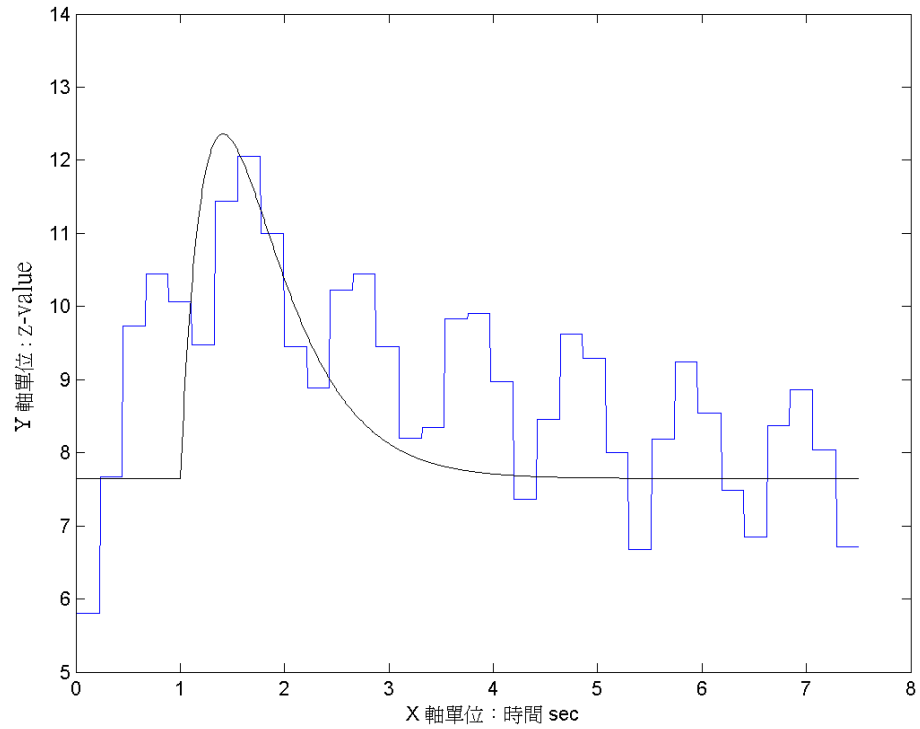


圖 54:  $\alpha = 0.8$ 、 $\beta = 4$  ( $a = 31.22$ 、 $b = 2.44$ ) 時，代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中與  $BP_{NP}^*$  能量圖單一完整訊號比較

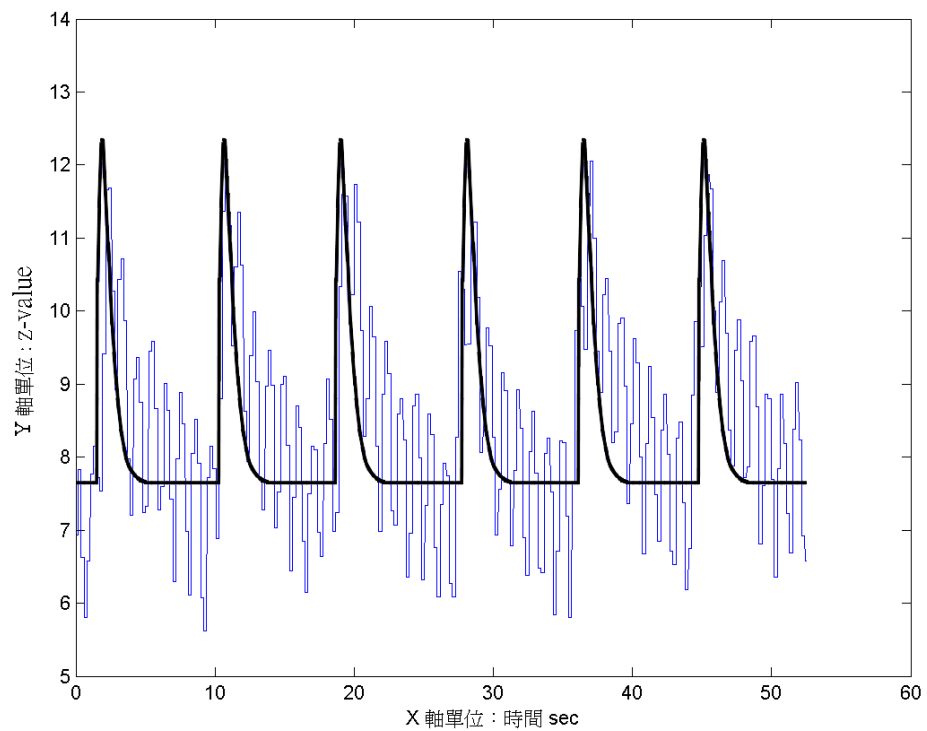


圖 55:  $\alpha = 0.8$ 、 $\beta = 4$  ( $a = 31.22$ 、 $b = 2.44$ ) 時，代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中與  $BP_{NP}^*$  能量圖上一段時間之訊號比較

## 第 4 章 無未受刺激訊號比對時之受刺激訊號推論

未受刺激訊號在前面幾個章節中，主要是用來評估是否呈現穩定性及找基準線，而找基準線的目地，是用來推論生物訊號在受刺激前後，整體訊號上提高多少振幅。然而在推論  $|\frac{\hat{S}_{BP}}{\hat{S}_{SNA}}|$  的過程中，發現整體訊號的向上平移，在傅立葉轉換的過程中，完全沒有作用。因此本章的目的，主要在探討當沒有未受刺激訊號作比對時，僅有的一組受刺激訊號，在缺少“基準線”機制時，經與前幾章所提之完全相同操作步驟後，是否可得類似的結果。

### 4.1 原始生物資訊之基本處理與數學模型建構

同第一章中之施以藥物或手術控制除 SNA 外，其他會影響 BP 的因素，記錄一段 16 秒的受刺激訊號 (圖 56)。為訊號處理的一致性，在不影響訊號本身性質的前題下，施以與第一章除“求基準線”外之其他基本處理：

#### 1. 簡化 BP 和 SNA 之訊號圖

$BP_P^*$  的作法和步驟同第一章所述，如圖 57。

$SNA_F^*$  的作法和步驟同第一章所述，如圖 58 和圖 59。

#### 2. BP 能量圖及 SNA 濾波圖的正規化

BP 正規化的作法：將  $BP_P^*$  減去其最低點附近大約  $\frac{2}{3}$  振幅的平均值 (77.89)，再除以  $BP_P^*$  標準差 (3.52)，如圖 60。

SNA 正規化的作法：將  $SNA_F^*$  減去  $SNA^*$  上的最低點 (0.00063)，再除以  $SNA^*$  的標準差 (0.0019)，如圖 61。

在建構  $BP_{NP}^*$  數學模型前，為了有與  $BP_{NP}^*$  模型比對的依據，同樣於原始  $BP_{NP}^*$  上截取一段單一刺激所造成之完整起伏波形，如圖 62。



使用阻尼函數  $M(x)$  來模擬  $BP_{NP}^*$ ，由實驗數據得知，當  $a = 10.96$ 、 $b = 1.61$  時 (圖 63)，和圖 62 的單一刺激所造成之完整起伏波形相較，相關係數為 0.89。在有了單一刺激下完整波形的數學模型後，便可進一步推出模擬在一段時間內數個刺激下的  $BP_{NP}^*$  數學模型及其一般式。

$BP_{NP}^*$  的時間長度為 16 秒，令  $S_{BP}$  為 16 秒內數個刺激下，模擬受刺激 BP 波形的數學模型。在  $BP_{NP}^*$  上可看出有 2 個明顯的受刺激突起，於是  $S_{BP}$  即為 2 個單一刺激完整波形的平移疊加。令  $t_i$  為各次刺激在整段時間內的發生點，則  $S_{BP}$  可表示為

$$S_{BP} = \sum_{i=1}^2 M(x - t_i)$$

由實驗數據，我們令  $t_1 = 2.1$  秒和  $t_2 = 10.9$  秒。 $S_{BP}$  (圖 64 中之粗線) 與  $BP_{NP}^*$  (圖 64 中之細線) 相較，兩者之相關係數為 0.87。

由上述結果可看出在缺少未受刺激訊號之比對下，直接使用受刺激訊號來建構數學模型，同樣可得相當不錯的相似程度。

而由前面第二章中之推論，若以固定頻率  $\omega_0$  刺激老鼠，而總時間長度為  $T$  時，則  $BP^*$  單一刺激完整波形的出現週期便為  $\frac{1}{\omega_0}$ ，於是同樣可得

$$S_{BP} = \sum_{n=0}^{\lfloor T\omega_0 \rfloor} M\left(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{BP}\right)$$

( $t_{BP}$  為  $BP^*$  第一個刺激反應出現的時間點)，上述即為以特定刺激頻率  $\omega_0$  刺激  $BP^*$  的數學模型。

在  $BP_{NP}^*$  (圖 60) 上可看出有 2 個受刺激的突起，所以在  $SNA_{NF}^*$  上應該也會有 2 個突起。觀察  $SNA_{NF}^*$  圖 61，將  $SNA_{NF}^*$  上包夾突起處所在的兩個低點作記錄，保留兩低點所包夾的時間段，並把其他段歸零，取出  $SNA_{NF}^*$  的縮減圖 (圖 65)。

當  $SNA_{NF}^*$  以方盒函數  $B(x)$  表示時，進一步將上述 2 段突起作平均，則它們的平均振幅約為 2.35，平均持續時間則約為 0.58 秒。取方盒函數  $B(x)$  之振幅為 2.35，持續時間為 0.58 秒 (即  $a = 2.35$ 、 $b = 0.58$ )。已知整個實驗的時間長度為 16 秒，令  $S_{SNA}$  為 16 秒內數個刺激下，模擬受刺激 SNA 波型的數學模型。於是  $S_{SNA}$  即為 2 個方盒函數  $B(x)$  的平移疊加。令  $t_i$  為各次刺激在整段時間內的發生點，則  $B(x)$  為

$$B(x) = \begin{cases} 2.35 & \text{if } 0 \leq x \leq 0.58, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

於是  $S_{SNA}$  可表示為

$$S_{SNA} = \sum_{i=1}^2 B(x - t_i)$$

由實驗數據推測，我們令  $t_1 = 1.3672$  秒和  $t_2 = 9.8438$  秒。在驗證  $S_{SNA}$  前，同樣得由  $SNA^*$  上新造一組  $SNA_N^*$ 。  $SNA_N^*$  的作法為將  $SNA^*$  減去  $SNA^*$  上之最小值後 (0.00063)，除以  $SNA^*$  的標準差 (0.0019) (圖 66)。而  $S_{SNA}$  (圖 67 中之粗線) 與  $SNA_N^*$  (圖 67 中之細線) 相較，兩者之相關係數為 0.56。

同樣地，根據前面第二章中之推論，若上述的結果是以固定的刺激頻率  $\omega_0$  所作的實驗，而總時間長度為  $T$  時，則模擬  $SNA_{NF}^*$  之方盒函數  $B(x)$  出現週期便為  $\frac{1}{\omega_0}$ ，於是同樣可得

$$S_{SNA} = \sum_{n=0}^{[T\omega_0]} B(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{SNA})$$

( $t_{SNA}$  為  $SNA^*$  第一個刺激反應出現的時間點)。當  $SNA_{NF}^*$  以阻尼函數  $M(x)$  來表示時，參考模型為方盒函數  $B(x)$  的作法，取阻尼函數  $M(x)$  之振幅為 2.35，持續時間為 1.5 (即  $a = 133.36$ 、 $b = 8.33$ )。同  $SNA_{NF}^*$  以方盒函數表示時之推論過程，則  $S_{SNA}$  為 2 個阻尼函數

$M(x)$  的平移疊加。令  $t_i$  為各次刺激在整段時間內的發生點，則  $S_{SNA}$  可表示為

$$S_{SNA} = \sum_{i=1}^2 M(x - t_i)$$

由於同為模擬  $SNA^*$  的受刺激反應，所以這裡的  $t_i$  和使用方盒函數  $B(x)$  表示時完全相同。 $S_{SNA}$  (圖 68 中之粗線) 與  $SNA_N^*$  (圖 68 中之細線) 相較，兩者之相關係數為 0.56。

根據前面第二章中之推論，若上述的結果是以固定的刺激頻率  $\omega_0$  所作的實驗，而總時間長度為  $T$  時，則模擬  $SNA_{NF}^*$  之阻尼函數  $M(x)$  出現週期便為  $\frac{1}{\omega_0}$ ，於是此時以阻尼函數  $M(x)$  模擬  $S_{SNA}$  的結果，同樣可得

$$S_{SNA} = \sum_{n=0}^{[T\omega_0]} M(x - \frac{n}{\omega_0} - t_{SNA})$$

( $t_{SNA}$  為  $SNA^*$  第一個刺激反應出現的時間點)。

從以上  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  數學模型的推導過程和相關係數的比對中可發現，在無未受刺激訊號的比對下，除波型的振幅有明顯的改變外，其他的差異處都相當微小。而當使用同樣的模型來模擬  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  時，更是只有影響模型所使用的參數值而已，其他都沒有影響，因此下一節中將直接進行  $\hat{S}_{BP}$  和  $\hat{S}_{SNA}$  計算比值後取對數的結果，驗證在改變模型所使用的參數值後，會否得到與有未受刺激訊號比對下，相同的結果？而兩組所得到的數據間差異性又有多少？

比較此時使用方盒函數  $B(x)$  和阻尼函數  $M(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  的效果，使用阻尼函數  $M(x)$  與  $SNA_N^*$  比較，相關係數較使用方盒函數  $B(x)$  高。

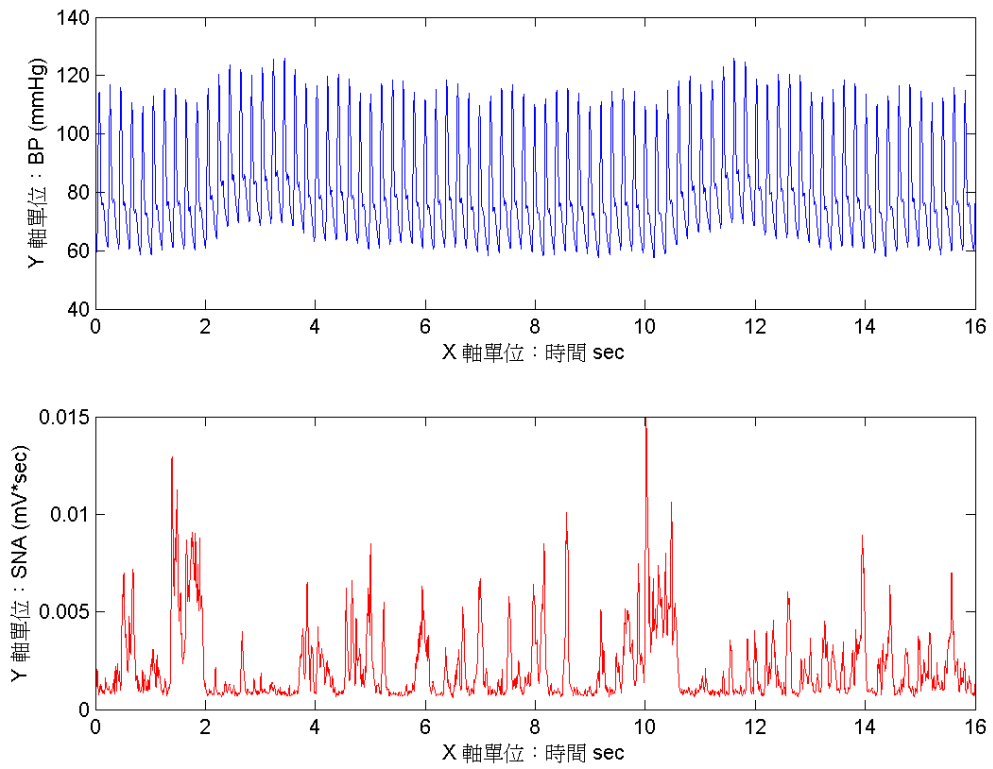


圖 56: BP、SNA 受刺激下之生物原始訊號圖形 (總時間長度為 16 秒，取樣頻率 128 Hz)

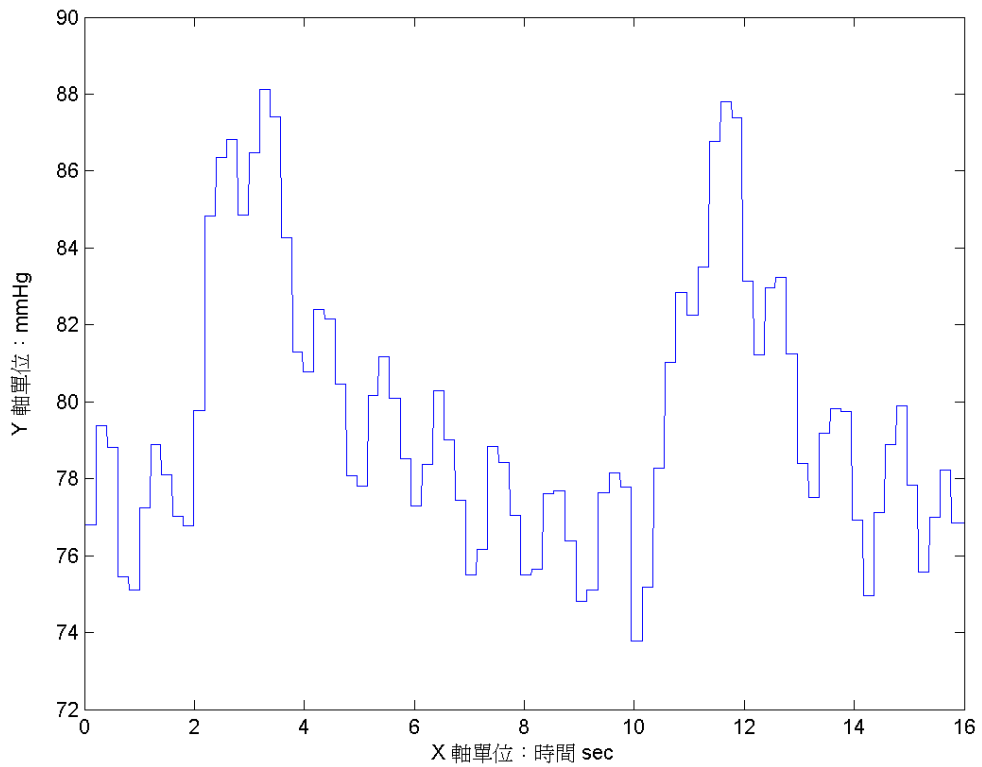


圖 57:  $BP_P^*$  結果

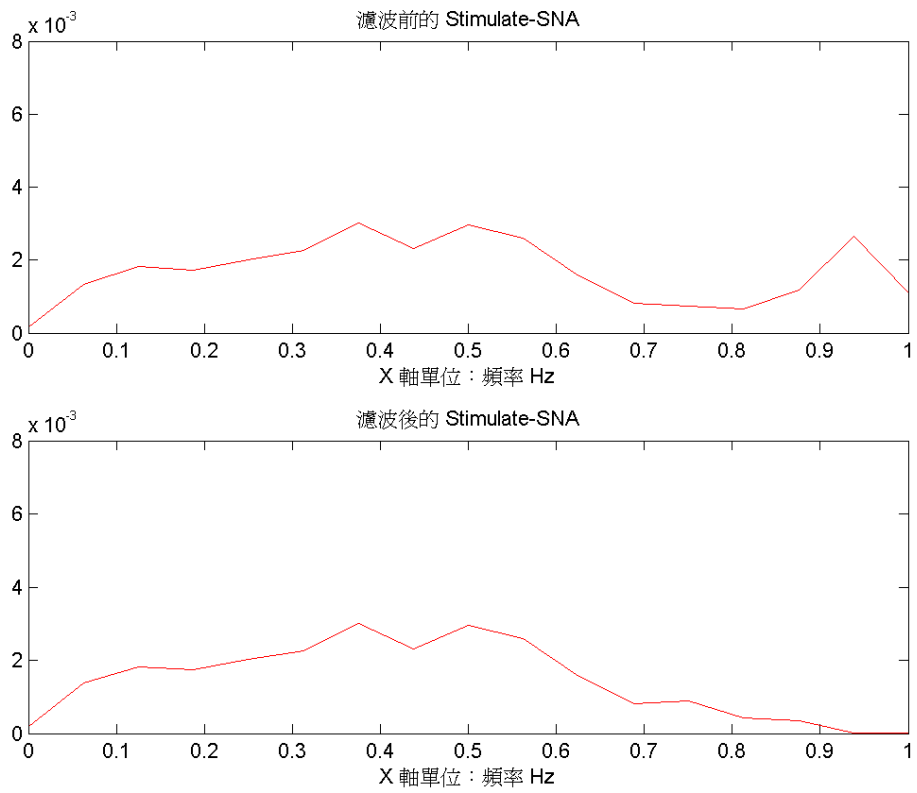


圖 58: 頻率 0 到 1 間 SNA\* 濾波前後頻譜圖

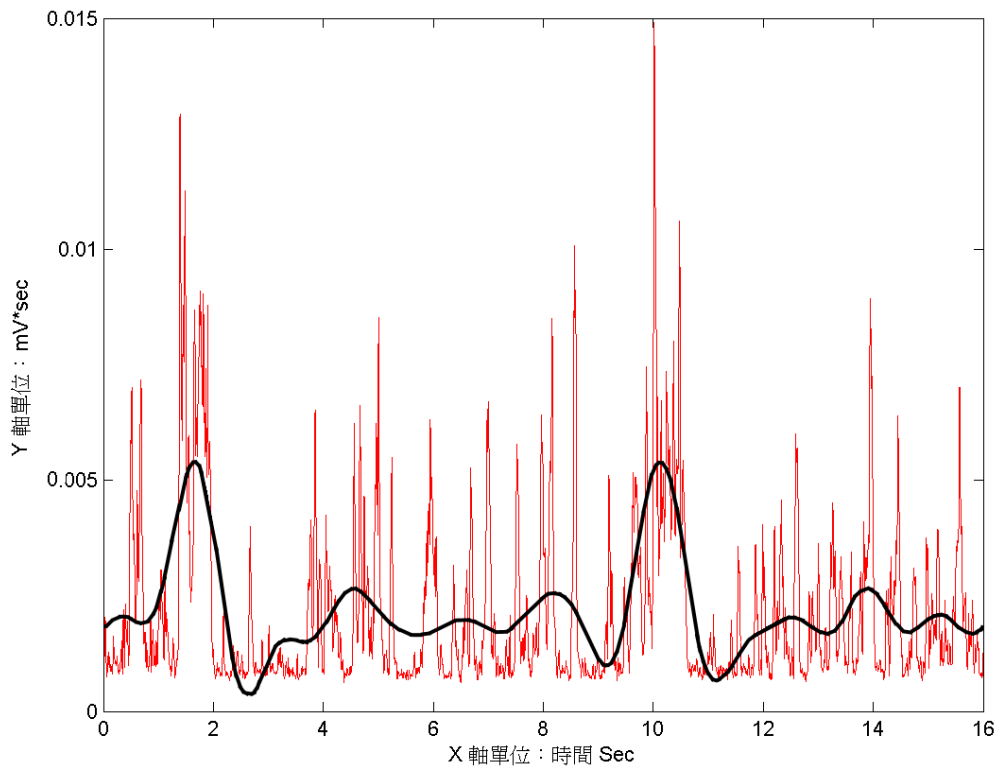


圖 59: SNA\* 原始訊號與 SNA 濾波圖對照

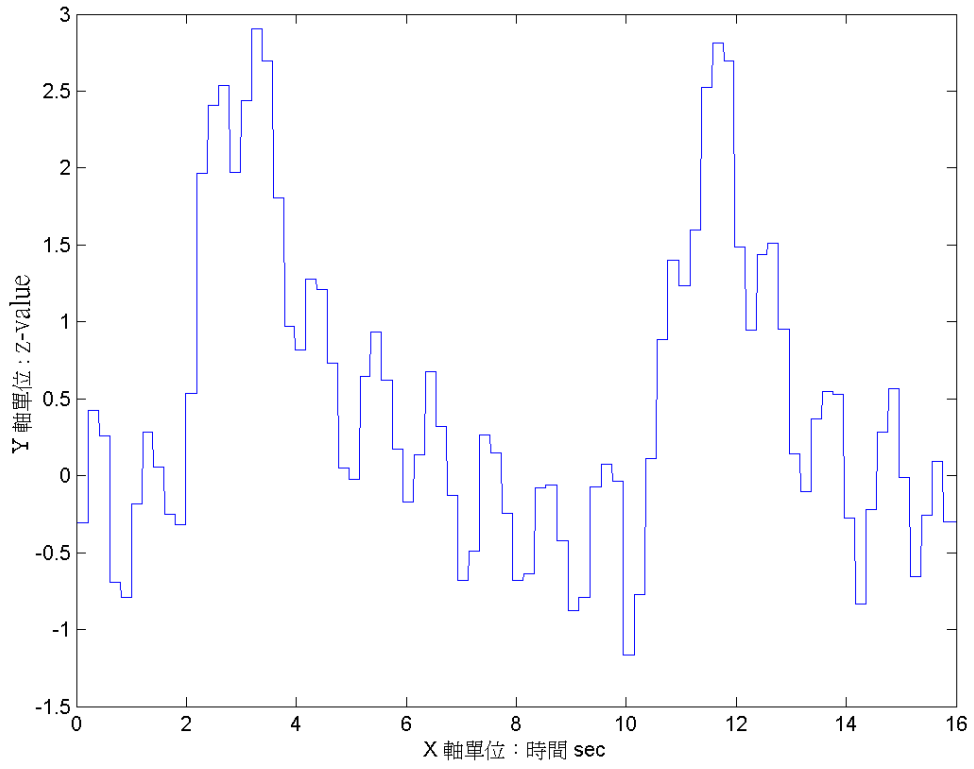


圖 60:  $BP_{NP}^*$  結果

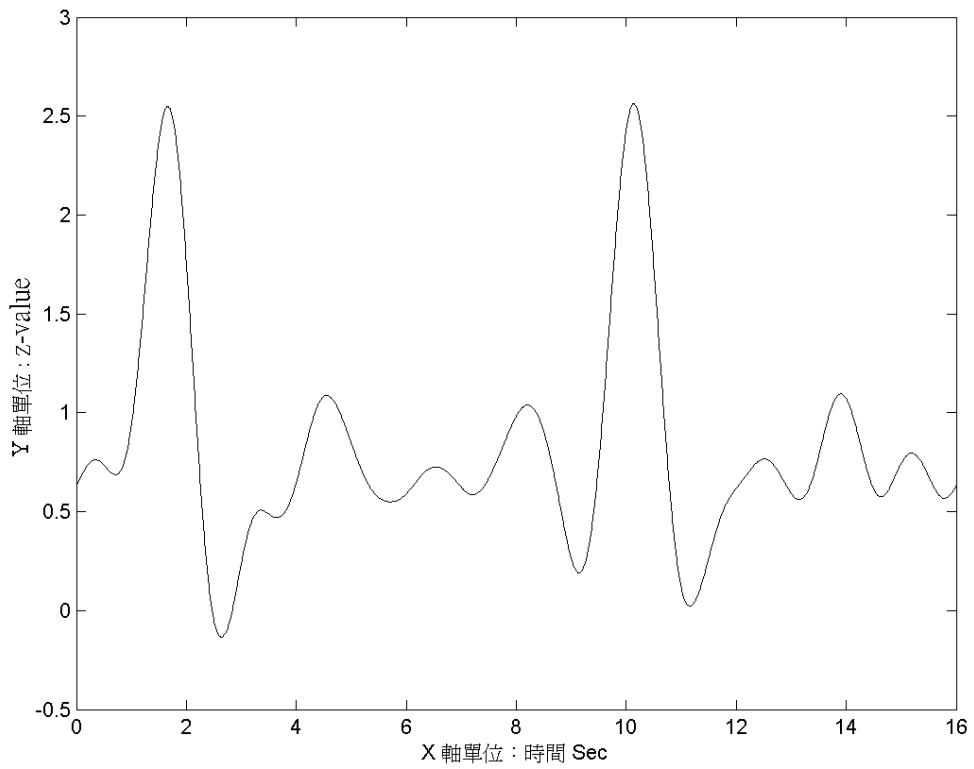


圖 61:  $SNA_{NF}^*$  結果

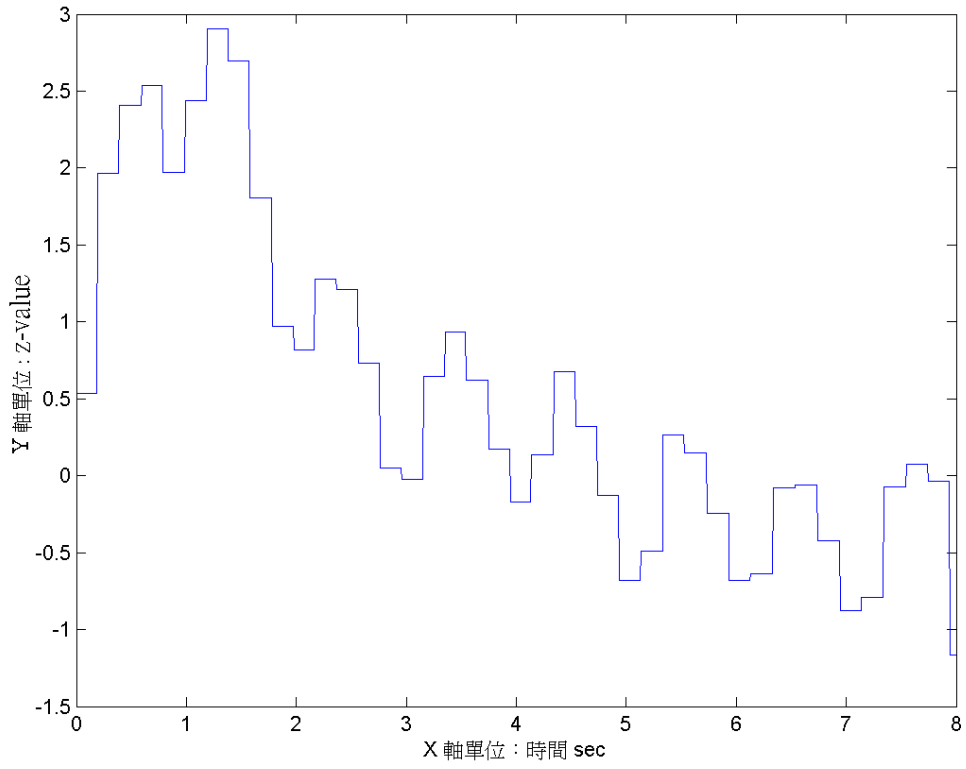


圖 62: 原始  $BP_{NP}^*$  上單一刺激下完整波形訊號

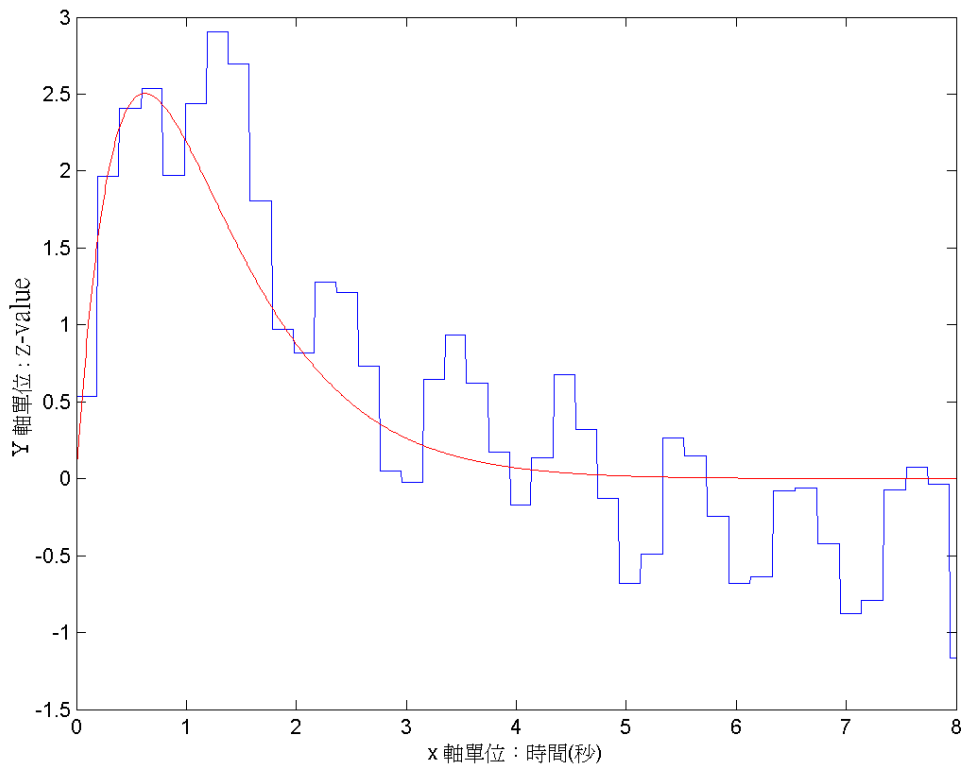


圖 63: 阻尼函數  $M(x)$  模型與圖 62 相較圖

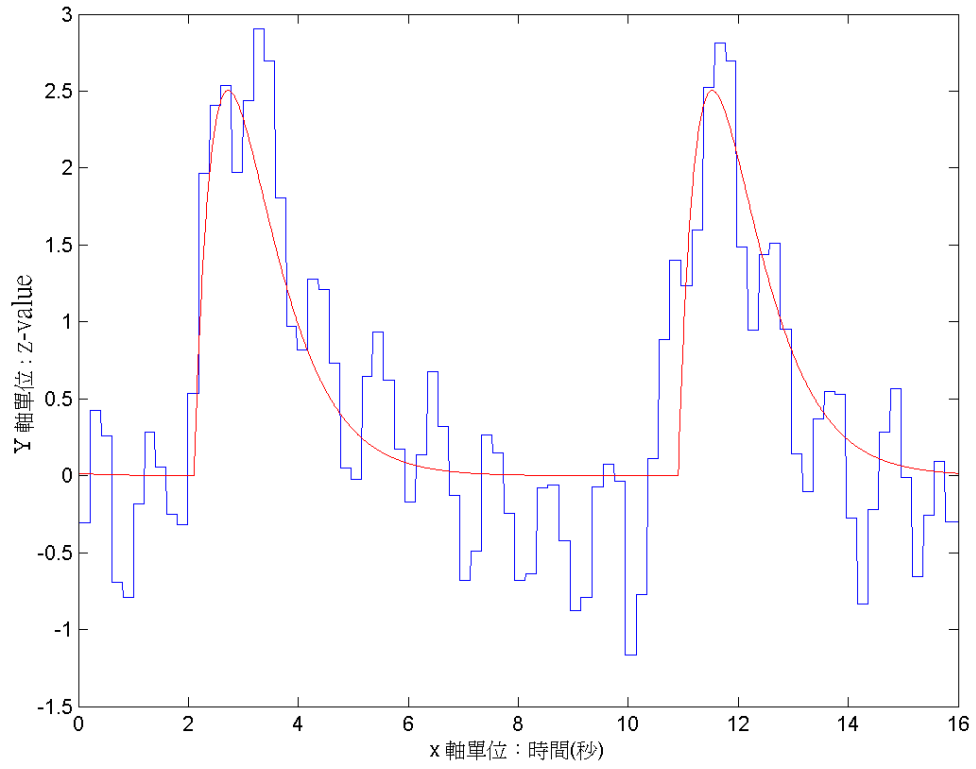


圖 64: 此時之  $S_{BP}$  模型與  $BP_{NP}^*$  相較圖

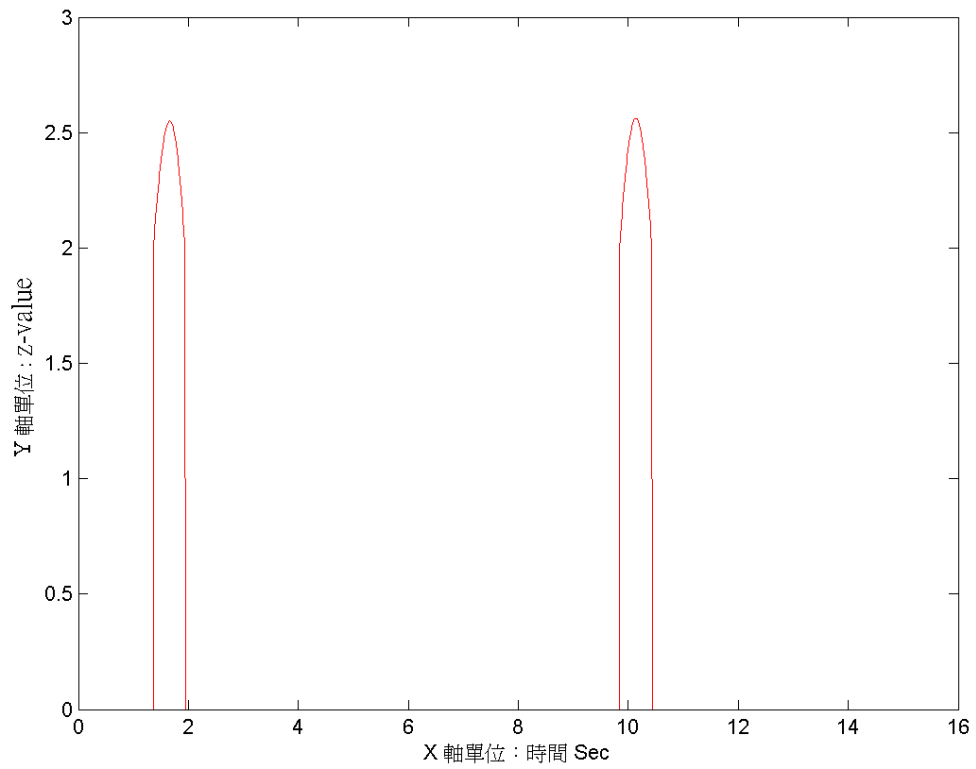


圖 65: 根據圖 61 取出之縮減圖



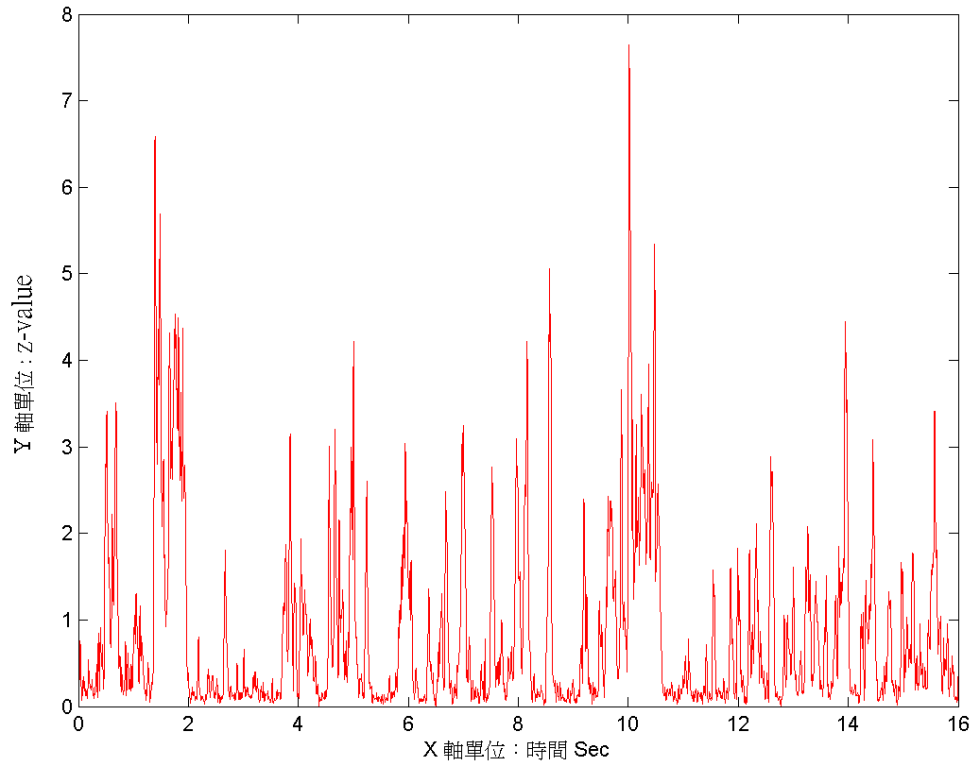


圖 66:  $SNA_N^*$  圖形

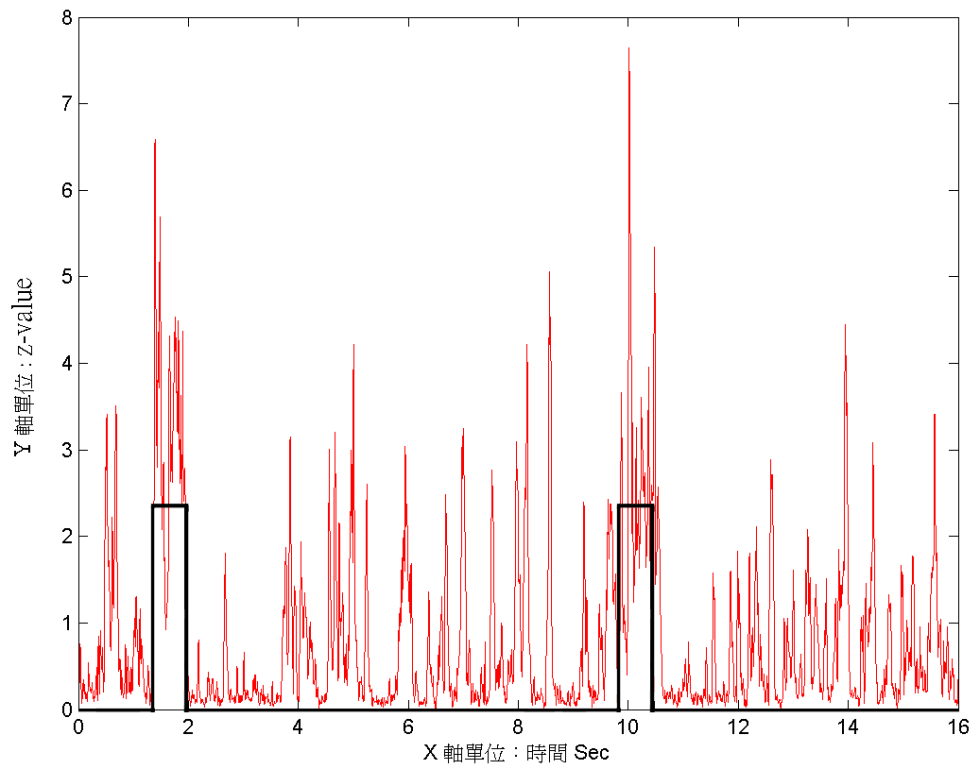


圖 67: 方盒函數  $B(x)$  模型與圖 66 相較圖

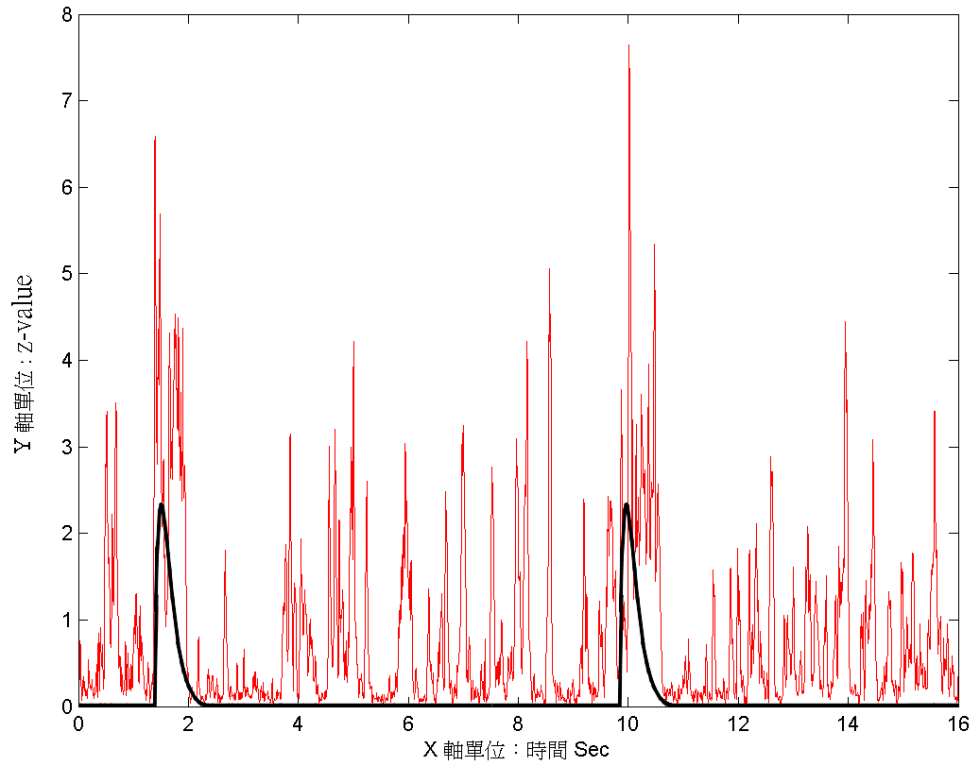


圖 68: 阻尼函數  $M(x)$  模型與圖 66 相較圖

#### 4.2 無未受刺激訊號比對下 $BP_{NP}^*$ 與 $SNA_{NF}^*$ 振幅與持續時間關係之推論

當  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為阻尼函數  $M(x)$  時，此時之  $SNA_{NF}^*$  振幅為 2.35，持續時間為 1.5 秒 ( $c = 48.94$ 、 $d = 7.66$ )，會滿足下面這三個式子：

i.  $BP_{NP}^*$  的振幅為  $SNA_{NF}^*$  的  $\alpha$  倍，則有  $\frac{a}{be} = \alpha \frac{c}{de}$ 。

ii.  $BP_{NP}^*$  的持續時間比  $SNA_{NF}^*$  多  $\beta$  秒，則有

$$\frac{4\ln(2)+3\ln(5)+\ln(a)}{b} = \frac{4\ln(2)+3\ln(5)+\ln(c)}{d} + \beta。$$

iii.  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(0.33)}{\hat{S}_{SNA}(0.33)} \right| \approx 0。$

經由測試，當  $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 3$  (即  $BP_{NP}^*$  的振幅為  $SNA_{NF}^*$  的 0.5 倍，持續時間則較  $SNA_{NF}^*$  多 3 秒) 時 (圖 69、70)，與 [4] 的結果 (圖 39) 最接近，可得  $a = 6.75$ 、 $b = 2.11$ ，將此計算出之參數  $a$ 、 $b$  代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中，與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖單一完整訊號相較，相關係數 0.84 (圖 71)；與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖上一段時間之訊號相較，相關係數 0.83 (圖 72)。

$SNA_{NF}^*$  的數學模型為方盒函數  $B(x)$  型式時，考慮  $SNA_{NF}^*$  的振幅為 2.35，持續時間為 0.58 秒 ( $c = 2.35$ 、 $d = 0.58$ )，則前述三個式子改寫成以下型式：

i.  $BP_{NP}^*$  的振幅為  $SNA_{NF}^*$  的  $\alpha$  倍，則有  $\frac{a}{be} = \alpha c$ 。

ii.  $BP_{NP}^*$  的持續時間比  $SNA_{NF}^*$  多  $\beta$  秒，則有

$$\frac{4\ln(2)+3\ln(5)+\ln(a)}{b} = d + \beta。$$

iii.  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(0.33)}{\hat{S}_{SNA}(0.33)} \right| \approx 0。$

經由測試，當  $\alpha = 0.8$ 、 $\beta = 5$  (即  $BP_{NP}^*$  的振幅為  $SNA_{NF}^*$  振幅 0.8 倍，而持續時間則較  $SNA_{NF}^*$  多 5 秒) 時 (圖 73、74)，與 [4] 的結果

(圖 39) 最接近，將計算出之參數  $a = 8.97$  和  $b = 1.76$  代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中，與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖單一完整訊號相較，相關係數 0.88 (圖 75)；與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖上一段時間之訊號相較，相關係數 0.86 (圖 76)。

從本節的結果和前面第三章的結果中可發現，在無未受刺激訊號比對下，以阻尼函數  $M(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  推論出來的  $BP_{NP}^*$  振幅，為  $SNA_{NF}^*$  的 0.5 倍和有未受刺激訊號比對下相同； $BP_{NP}^*$  持續時間為  $SNA_{NF}^*$  多 3 秒則和有未受刺激訊號比對時之多 2.5 秒差不多。而以方盒函數  $B(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  推論出來的  $BP_{NP}^*$  振幅，為  $SNA_{NF}^*$  的 0.8 倍和有未受刺激訊號比對下相同； $BP_{NP}^*$  持續時間為  $SNA_{NF}^*$  多 5 秒也和有未受刺激訊號比對時之多 4 秒差不多。

至此可假設不論有無未受刺激訊號作比對，都可在  $|\frac{\hat{S}_{BP}}{\hat{S}_{SNA}}|$  頻譜圖上取對數後，得到與 [4] 這篇所提的現象 (圖 39) 有相同結果。

比較此時使用方盒函數  $B(x)$  和阻尼函數  $M(x)$  模擬  $SNA_{NF}^*$  的效果，使用方盒函數推論出來的  $BP_{NP}^*$  模型經與  $BP_{NP}^*$  比較，相關係數較使用阻尼函數  $M(x)$  高。

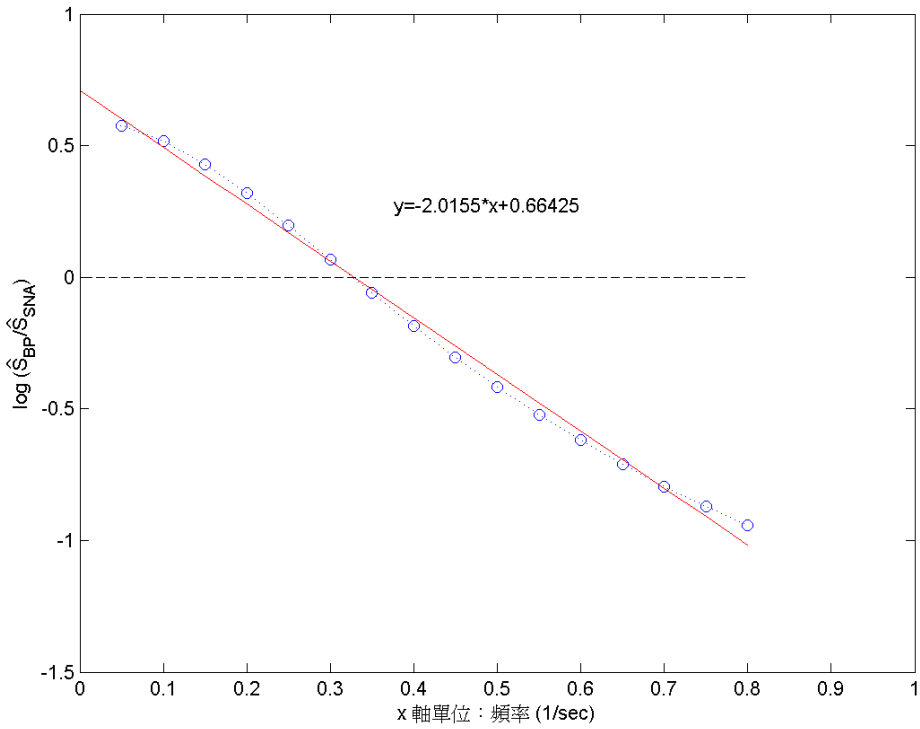


圖 69:  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為阻尼函數  $M(x)$ ,  $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 3$  時,  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  在頻率 0 到 1 Hz 間的情形

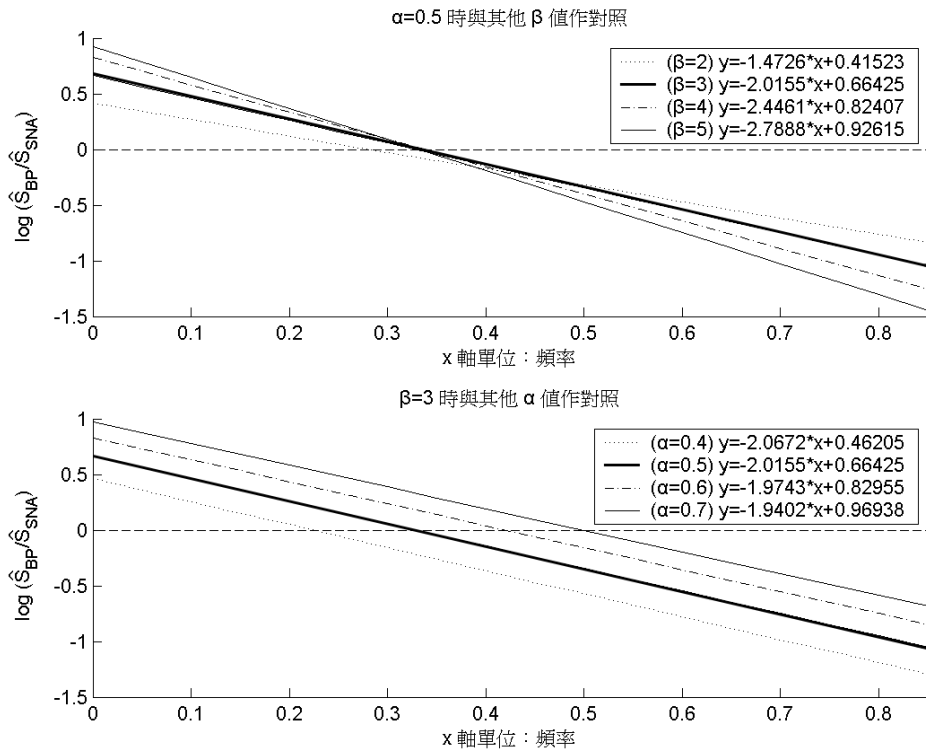


圖 70:  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為阻尼函數  $M(x)$ ,  $\alpha = 0.5$  時,  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  在頻率 0 到 1 Hz 上不同  $\alpha$ 、 $\beta$  值對照

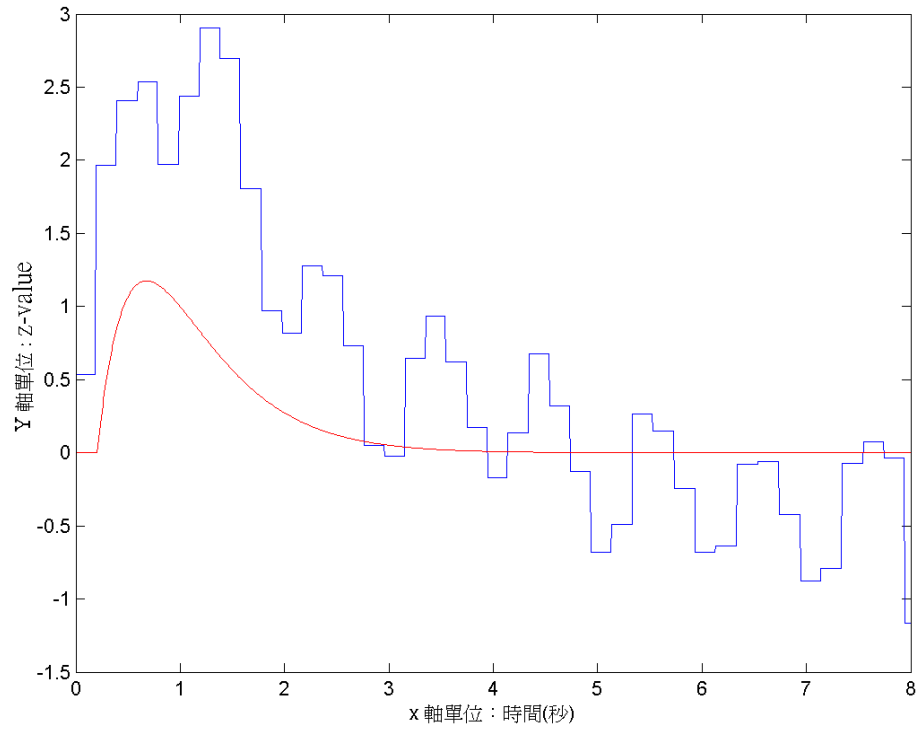


圖 71:  $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 3$  ( $a = 6.75$ 、 $b = 2.11$ ) 時，代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖單一完整訊號比較

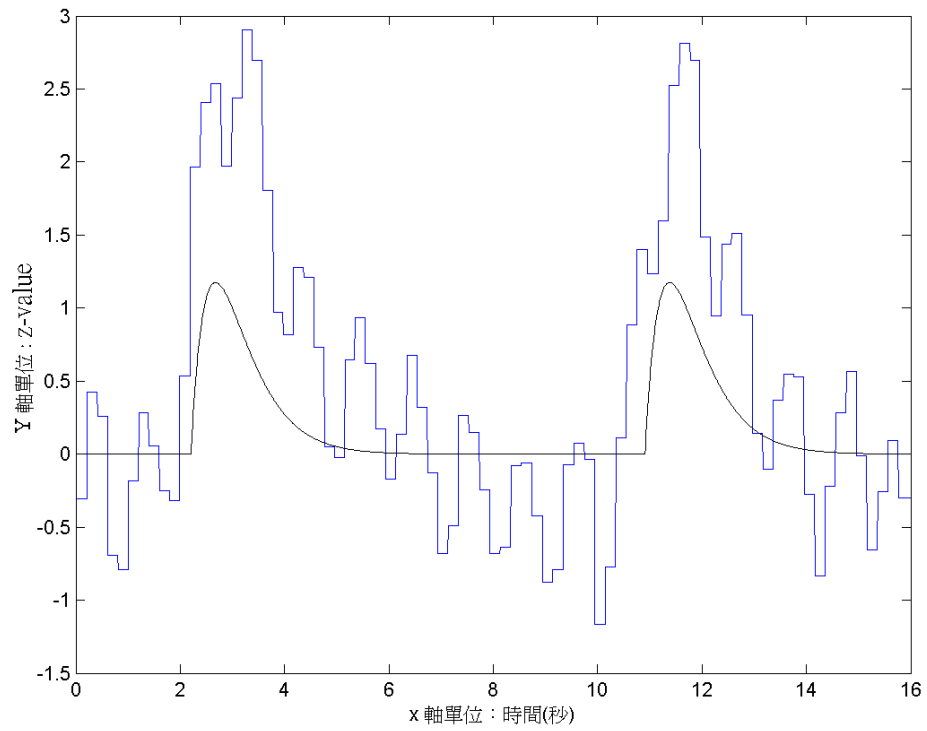


圖 72:  $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 3$  ( $a = 6.75$ 、 $b = 2.11$ ) 時，代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖上一段時間之訊號比較

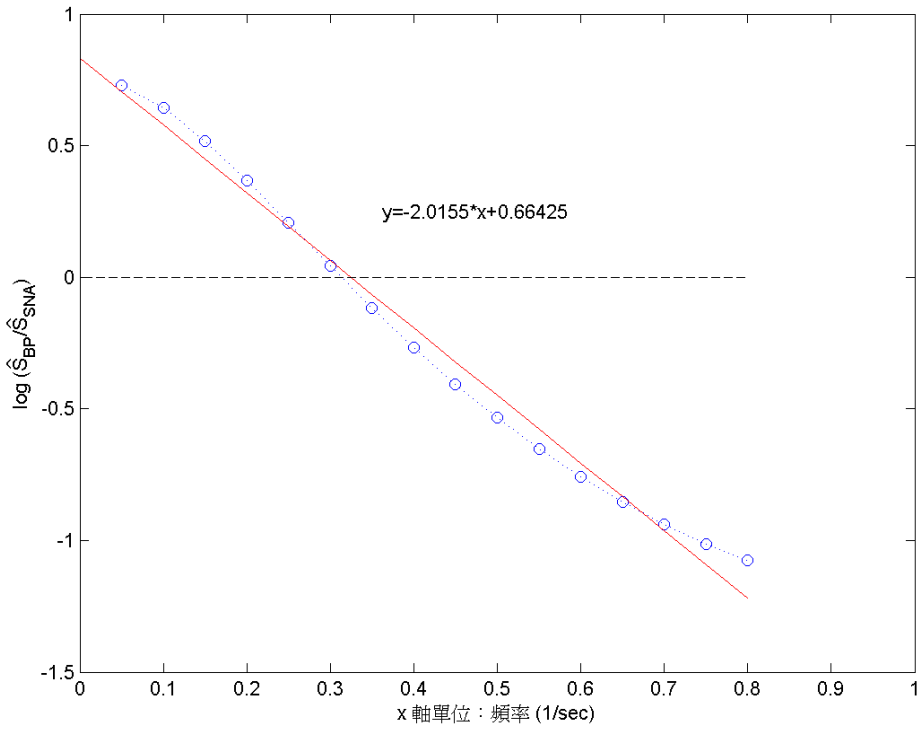


圖 73:  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為方盒函數  $B(x)$  型式,  $\alpha = 0.8$  和  $\beta = 5$  時,  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  在頻率 0 到 1 Hz 的情形

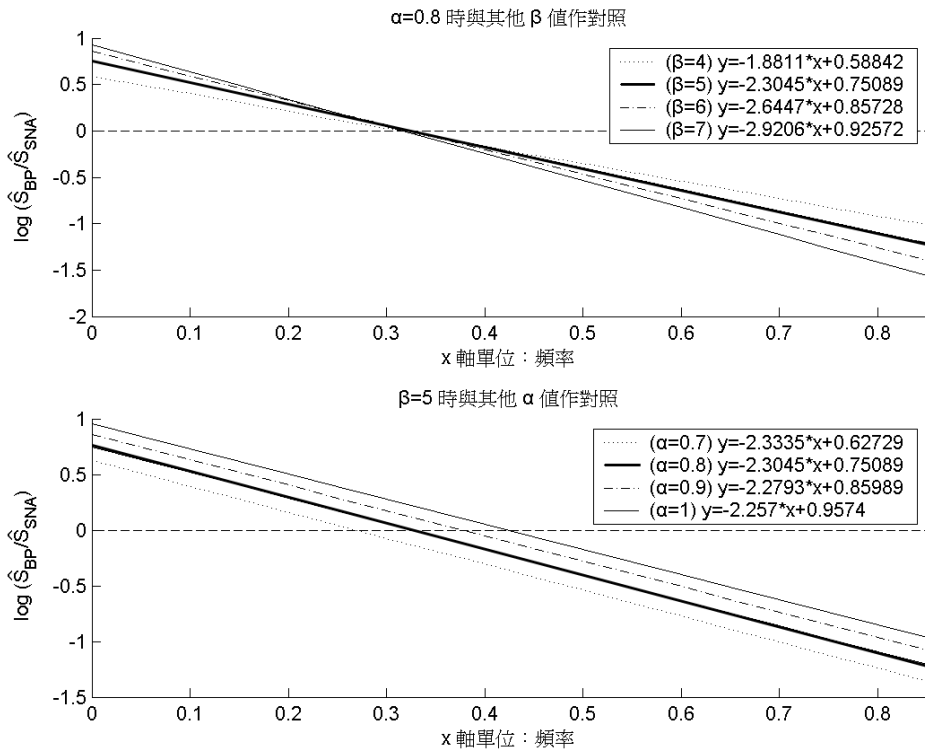


圖 74:  $SNA_{NF}^*$  的數學模型為方盒函數  $B(x)$  型式,  $\alpha = 0.8$  時,  $\log \left| \frac{\hat{S}_{BP}(\omega_0)}{\hat{S}_{SNA}(\omega_0)} \right|$  在頻率 0 到 1 Hz 上不同  $\alpha$ 、 $\beta$  值對照

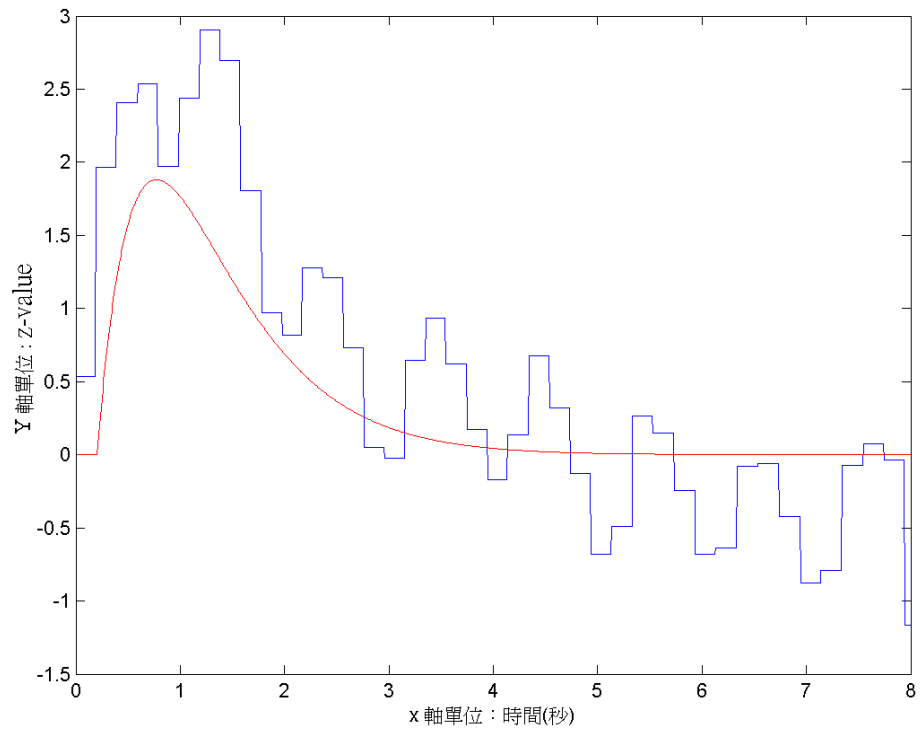


圖 75:  $\alpha = 0.8$ 、 $\beta = 5$  ( $a = 8.97$ 、 $b = 1.76$ ) 時，代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖單一完整訊號比較

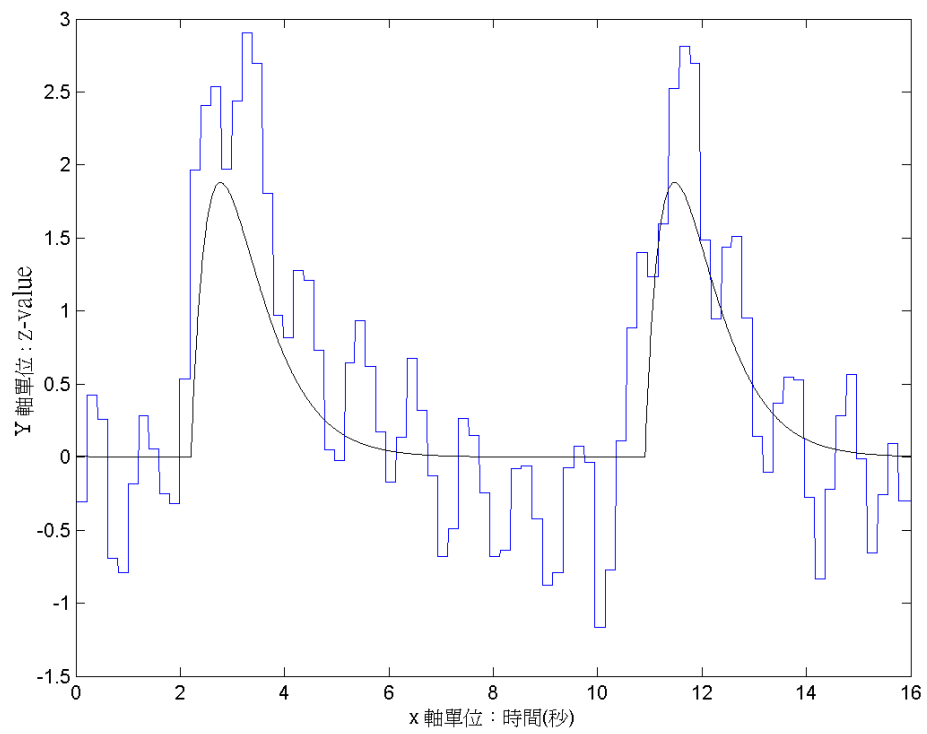


圖 76:  $\alpha = 0.8$ 、 $\beta = 5$  ( $a = 8.97$ 、 $b = 1.76$ ) 時，代入模擬  $BP_{NP}^*$  的數學模型中與原始  $BP_{NP}^*$  能量圖上一段時間之訊號比較



## 第 5 章 數據分析結果與討論

比較第三章和第四章的結果，可以推論用數學模型模擬生物  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  的  $|\frac{\hat{S}_{BP}}{\hat{S}_{SNA}}|$  結果，與訊號整體的向上平移多少及  $BP_{NP}^*$  與  $SNA_{NF}^*$  間的時間延遲無關。也就是可以直接使用一段受刺激訊號來觀察和推論  $\log|\frac{\hat{S}_{BP}}{\hat{S}_{SNA}}|$  的現象，不需另一段的未受刺激訊號作比對。而  $\log|\frac{\hat{S}_{BP}}{\hat{S}_{SNA}}|$  的現象只與數學模型模擬的振幅高度和持續時間多久有關，至於數學模型模擬的振幅該決定多高？持續時間該決定多長？則有賴與實際生物反應的相關程度，用模型的參數來控制。

生物上之觀察，當刺激頻率大至某種程度時， $BP^*$  波形上會出現一些較單一刺激波形小的波形，根據第二章的  $BP_{NP}^*$  數學模型推導的過程和結果，可發現這些較小的波形，只是數個相同  $BP^*$  波形疊加出來的效果，並沒有因為刺激的關係產生新的波形。

而第三章推論出來的  $\log|\frac{\hat{S}_{BP}}{\hat{S}_{SNA}}|$  在頻域  $(0, 1]$  會呈現線性關係的結果，滿足 [4] 這篇論文中，描述的老鼠血壓頻譜功率和交感神經活性頻譜功率之間的方程式。

$$P_{SNA} = P_{BP} \times a \times 10^{b \times (frequency)} \quad (a, b \text{ 為常數})$$

並且根據第三章和第四章的結果，可推得 BP 受 SNA 影響後，其變動持續時間會維持約 4 到 6 秒。

此外，可在圖 49、圖 53、圖 70 和圖 74 中看出， $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  間之持續時間關係  $\beta$ ，對於  $\log|\frac{\hat{S}_{BP}}{\hat{S}_{SNA}}|$  圖上的斜率有影響，而  $BP_{NP}^*$  和  $SNA_{NF}^*$  間之振幅關係  $\alpha$ ，則主要影響  $\log|\frac{\hat{S}_{BP}}{\hat{S}_{SNA}}|$  圖上平移的現象，對於斜率則幾乎沒有影響。

第三章和第四章  $BP_{NP}^*$  與  $SNA_{NF}^*$  振幅與持續時間關係之推論，則整理如表 7：

有未受刺激訊號比對時				
SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 模型		BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 和 SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 關係		得到的 BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 可能結果
阻尼函數 M(x)	SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 振幅	5.89 z-value	×0.5	BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 振幅 2.945 z-value
	SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 持續時間	1.5 sec	+2.5	BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 持續時間 4 sec
方盒函數 B(x)	SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 振幅	5.89 z-value	×0.8	BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 振幅 4.712 z-value
	SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 持續時間	0.53 sec	+4	BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 持續時間 4.53 sec
無未受刺激訊號比對時				
SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 模型		BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 和 SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 關係		得到的 BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 可能結果
阻尼函數 M(x)	SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 振幅	2.35 z-value	×0.5	BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 振幅 1.175 z-value
	SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 持續時間	1.5 sec	+3	BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 持續時間 4.5 sec
方盒函數 B(x)	SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 振幅	2.35 z-value	×0.8	BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 振幅 1.88 z-value
	SNA <sub>NF</sub> <sup>*</sup> 持續時間	0.58 sec	+5	BP <sub>NP</sub> <sup>*</sup> 持續時間 5.58 sec

表 7: BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 與 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 振幅與持續時間關係推論整理表

由上表中可看出，以同樣的操作流程，在使用阻尼函數  $M(x)$  模擬 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 時，不論有無未受刺激訊號作比對，BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 的振幅都約為 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 的 0.5 倍，持續時間則約為 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 多 2.5 到 3 秒。而使用方盒函數  $B(x)$  模擬 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup>，不論有無未受刺激訊號作比對，BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 的振幅都約為 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 的 0.8 倍，持續時間則約為 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 多 4 到 5 秒。並且在相同生物訊號下，不論使用何種模型模擬 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup>，大部份所推得之 BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 振幅和持續時間都會相當接近。

比較例外的是，有未受刺激訊號比對時所推得的 BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 振幅，差距為 1.758 z-value，以及沒有未受刺激訊號比對時所推得的 BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 持續時間，差距為 1.08 秒。差距的主要來源，應該是出在估計 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 的振幅和持續時間過程上。

由前面幾章 SNA<sub>NF</sub><sup>\*</sup> 推論出之 BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 圖形看來，除圖 75 和 76，由方盒函數  $B(x)$  推論出之 BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 模型比較剛好外，其他由方盒函數  $B(x)$  推論出之 BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 模型，振幅有偏高的現象，如圖 54 和圖 55，而由阻尼函數  $M(x)$  推論出之 BP<sub>NP</sub><sup>\*</sup> 模型，振幅則有偏低的現象，如圖 50、圖 51、圖 71 和圖 72。由於我們是使用 SNA<sub>F</sub><sup>\*</sup> 上受刺激突起的平均值，來估計振幅和持續時間，這會和實際 SNA<sup>\*</sup> 的振幅和持續

時間會有一些誤差。如果能在模擬  $SNA_{NF}^*$  振幅和持續時間的這個過程上，找到更適合的值，應該可以更有效的提高模型模擬  $SNA_{NF}^*$  的相似程度，並進而改善所推論出來之  $BP_{NP}^*$  振幅差異性。

## 參考文獻

- [1] 單維彰，凌波初步，全華科技圖書公司，2000。
- [2] Meng-Li Tsai, Wei-Chang Shann, Wen-Ren Luo and Chen-Tung Yen. “ Wavelet based analysis of the quantitative relationship between the fluctuations of blood pressure and sympathetic nerve activity at low frequency domain in rats,” *Neuroscience Letters*. 358:165–168, 2004.
- [3] Stauss, H. M and K. C. Kregel. “ Frequency response characteristic of sympathetic-mediated vasomotor waves in conscious rats,” *American Journal of Physiology*. 271(4 Pt 2): H1416-22, 1996.
- [4] Tsai, M.L., L.W. Chu, C.Y. Chai, and C.-T. Yen. “ Frequency dependent sympathetic modulation of vasomotor tone in the anesthetized rat,” *Neurosci. Lett*. 221:109-112, 1997.
- [5] Tsai, M. L., Shaw, F. -Z. and Yen, C. -T. “ The quantitative relationship between the fluctuations of blood pressure and sympathetic nerve activity in pentobarbital anesthetized rats,” *Neuroscience Letters*, 263:85 - 88, 1999.