國　立　中　央　大　學

數　學　系

碩　士　論　文

德國六至九年級數學教科書機率單元之內容分析

Content analysis of the probability unit of mathematics textbooks for grades 6 to 9 in Germany

研 究 生：黃 雅 萱

指導教授：單 維 彰

中 華 民 國　109　年　6　月

國立中央大學圖書館學位論文授權書

填單日期：109 / 7 / 8　　　　2019.9 版

授權人姓名	黃雅萱	學號	106221024
系所名稱	數學所	學位類別	☑碩士　□博士
論文名稱	德國六至九年級數學教科書機率單元之內容分析	指導教授	單維彰

學位論文網路公開授權

授權本人撰寫之學位論文全文電子檔：

・在「**國立中央大學圖書館博碩士論文系統**」.

( )同意立即網路公開

(V)同意 於西元 2020 年 12 月 31 日網路公開

( )不同意網路公開，原因是：________

・在**國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」**

( )同意立即網路公開

(V)同意 於西元 2020 年 12 月 31 日網路公開

( )不同意網路公開，原因是：________

依著作權法規定，非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統與國家圖書館，不限地域、時間與次數，以文件、錄影帶、錄音帶、光碟、微縮、數位化或其他方式將上列授權標的基於非營利目的進行重製。

學位論文紙本延後公開申請 (紙本學位論文**立即公開者此欄免填**)

本人撰寫之學位論文紙本因以下原因將延後公開

・**延後原因**

( )已申請專利並檢附證明，專利申請案號：

(V)準備以上列論文投稿期刊

( )涉國家機密

( )依法不得提供，請說明：________

・**公開日期**：西元 2020 年 12 月 31 日

※繳交教務處註冊組之紙本論文(送繳國家圖書館)若不立即公開，請加填「國家圖書館學位論文延後公開申請書」

研究生簽名：黃雅萱　　　　指導教授簽名：單維彰

*本授權書請完整填寫並親筆簽名後，裝訂於論文**封面之次頁**。

編號：

國家圖書館學位論文延後公開申請書
Application for Embargo of Thesis/Dissertation

申請日期：民國109年7月8日

Application Date: 2020/7/8 (YYYY/MM/DD)

<table>
<tr><td>申請人姓名
Applicant Name</td><td>黃雅萱</td><td>學位類別
Graduate Degree</td><td>☑碩士 Master
□博士 Doctor</td><td>畢業年月
Graduation Date
(YYYY/MM)</td><td>民國109年6月
____/</td></tr>
<tr><td>學校名稱
University</td><td colspan="2">國立中央大學</td><td>系所名稱
School/Department</td><td colspan="2">數學系</td></tr>
<tr><td>論文名稱
Thesis / Dissertation Title</td><td colspan="5">德國七到九年級數學教科書機率單元之內容分析</td></tr>
<tr><td>延後公開原因
Reason for embargo</td><td colspan="3">□申請專利並檢附證明，專利申請案號：
Filing for patent registration. Registration number:
☑準備以上列論文投稿
Submission for publication.
□涉及國家機密
Contains information pertaining to the national secret.
□依法不得提供，請說明：
Withheld according to the law. Please specify.</td><td>公開日期
Delayed Until</td><td>民國109年12月31日
____/__/__
(YYYY/MM/DD)</td></tr>
</table>

申請人簽名：
Applicant Signature: 黃雅萱

指導教授簽名：
Advisor Signature: 單維彰

學校認定/審議單位章戳：
Seal of the Authorization Institute: 國立中央大學理學院 數學系

【說明】
1. 以上所有欄位請據實填寫並檢附證明文件，經由學校向本館提出申請，缺項或簽章不全，恕不受理。
2. 論文尚未送交國家圖書館，請於提送論文時，夾附親筆簽名申請書1份。
3. 論文已送達國家圖書館，請將親筆簽名申請書一式2份掛號郵寄10001臺北市中山南路20號國家圖書館館藏發展及書目管理組，並於信封註明「學位論文延後公開申請書」。

【Notes】
1. Please fill in all blanks and deliver to your university. The application form will not be accepted for processing until all information, signatures, and stamps are included.
2. If the thesis or dissertation is not yet submitted to the NCL, please attach the signed application form to the thesis or dissertation.
3. If the thesis or dissertation has been submitted to the NCL, please send a registered letter with 2 copies of the signed application form attached. The letter should be addressed to “Collection Development Division”, National Central Library with a note in the envelope indicating “Application for delay of public release” to the following address. No.20, Zhongshan S. Rd., Zhongzheng District, Taipei City 10001, Taiwan (R.O.C.)

(以下由國圖填寫 For Internal Use)

承辦單位_館藏組：__________ 日期/處理狀況：

典藏地：__________ 登錄號：__________ 索書號：

會辦單位_知服組：__________ 日期：__________ □移送並註記，原上架日期：

論文系統：__________ 日期：

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

數學學系/研究所黃雅萱研究生所提之論

文德國六年級至九年級機率教科書研究

（題　目）

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授單維彰（簽章）

109年4月30日

104.07.24

國立中央大學碩士班研究生

論文口試委員審定書

數學 學系/研究所 黃雅萱 研究生

所提之論文

德國六至九年級數學教科書機率單元之內容分析

經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人 林孝微

委　　　　　　員 單維彰

張[illegible]

中華民國 109 年 5 月 25 日

101.06.15

致謝辭

碩士班三年，說長不長，說短也不短，是我經歷最為豐富，也是實現人生方向的關鍵時刻。在入學前，我已決定未來將往教職方向發展，因此碩班前兩年踏實地完成數學所和教育學程的課程，並在三年級上學期進入高中實習，三下完成論文，最後進入教職生涯。在這充實的三年期間，我遇到很多貴人的相助，使我在求學的路途上留下寶貴的經驗。

首先感謝我的指導教授 單維彰老師。謝謝老師這三年的栽培，除了無私的給予教學機會外，如暑期先修班擔任課後教學助教、文化脈絡中的數學助教，讓我磨練當老師的臺風和熟悉評量的準則，更在數學科教材教法、數學科教學實習、以及平鎮高中教育實習上給予多次撰寫教案及模擬試教機會後，用心細緻解釋其中教學原則撇步，以及反思學生學習脈絡的建立歷程，使數學素養的理想實現在教學現場當中。

再來，我要感謝研究室的所有學長姐和同學們。感謝哲毓學長在我跌跌撞撞的研究路途，以及遇到各種困難之時，給予我莫大的幫助及建言；感謝玉芬學姐，在我需要的時候，總是作為未來教職的前輩給我最大的資源和信心；感謝中央數學系所有碩班的學長姐、同學、學弟妹，以及所有的教授和行政人員。因著有你們的幫助和鼓勵，成就了今天的雅萱。

接著，我還要感謝我的口試委員，感謝您們從外地舟車勞頓的來到中央擔任我的口試委員，且親和力十足地緩和口試那天緊張的我，使我清楚知道論文中的缺失以及未來可以深究的方向。然後，感謝平鎮高中的師傅、實習老師們，以及所有教師、行政人員和學生們，我都在你們身上學到不一樣的課題，這都將是我未來生涯中的養分。

最後，感謝對於我的夢想無條件支持的家人們。

黃雅萱 謹誌

民國 109 年 7 月 8 日

德國六至九年級機率教科書研究

摘要

本研究針對適用於德國巴伐利亞邦的 Lambacher Schweizer 數學教科書中六至九年級的機率教材，進行量化和質性分析。其中量化分析採取單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）對於機率學前診測之雙向細目表，質性分析採用張芬芬（2010）提出的五個階段模式。

量化分析結果顯示德國六至九年級教科書皆有機率課程，但七年級以統計為主，機率作為連結，因此較少被提及。對於機率教學情境問題的分布種類，在「機率類型」向度上，主觀機率占 3%、古典機率占 74%、頻率機率占 23%；雖然以古典機率占大多數，但不偏廢其他兩類型，且有適當連結。在「機率概念層次」向度上，單一事件占 79%、餘事件占 4%、獨立性事件占 12%、互斥和事件占 5%；雖然以單一事件為主要教學內容，但是有適度延伸到其他幾項基礎概念。

質性分析結果顯示德國教科書的機率課程編排模式依序為「引入」、「課程內容」、「演練」，其中每一模式所提供的教材編排方法豐富多元。且發現本研究所分析的德國教科書，亦符合鄭章華（2018）依據現實數學教育（2014）所歸納的素養導向教材六大原則。

本研究屬於單維彰（2018）「建構下一代國中階段數學課綱：機率新課程」科技部計畫的一個基礎項目。研究結果以及過程中翻譯整理的德國機率單元教材，也可以提供給未來的課綱工作者、教科書編者、自編教材的教師，作為參考資源。

關鍵字：德國數學、機率教科書、量化分析、質性分析、素養

Content analysis of the probability unit of mathematics textbooks for grades 6 to 9 in Germany

Abstract

This study conducted quantitative analysis and qualitative research of the sixth to ninth grades of the Lambarcher Schweizer series probability textbooks published in the German state of Bayern. Among them, the quantitative analysis adopts Wei-Chang Shann, Che-Yu Hsu, Fei-Ching Chen (2018) for the Two-Way Specification Table of probability pre-school diagnosis, and the qualitative research method adopts the The Five Steps of Qualitative Data Analysis of Chang Fen-Fen (2010) for qualitative research steps.

The quantitative analysis found that German textbooks in grades 6 to 9 all have probability courses, but grade 7 is mainly based on statistics, and the probability is used as a link, so it is rarely mentioned. The distribution types of probabilistic teaching situation problems, subjective probability accounts for 3%, classical probability accounts for 74%, and frequentist probability accounts for 23% in the "probability type" dimension, in which the classical probability is the majority. And in the "probability conceptual level" dimension single event accounts for 79%, complementary event accounts for 4%, independence event accounts for 12%, mutually exclusive event accounts for 5%, in which single event accounted for the majority.

The qualitative research shows that the probability curriculum layout mode of German textbooks is "introduced", "curriculum content" and "exercise" in sequence, and each of the layout steps provides rich and diverse. Then through the six principles by Chang-Hua Chen (2018) for Realistic Mathematics Education (2014), which is based on " *Mathematics in Context* ". To illustrate the German probability textbooks as a literacy -oriented teaching

material design concept.

This study is part of the project of Wei-Chang Shann (2018) " A New Probability Curriculum for the Next National Standards on the Secondary Level", and the provision of probabilistic literacy-oriented textbooks for the 108-curriculum that is just on the road, as a reference resource for future writing of Probability textbooks, curriculum development and teaching on-site teachers.

KeyWords : German Mathematics, probability textbook, quantitative analysis, qualitative research, literacy

目錄

表目錄

圖目錄

第一章 緒論

本章節首先介紹研究背景與動機，從中衍生研究目的與問題，最後說明此研究的範圍與限制。

第一節 研究背景與動機

本研究背景為：「機率」成為現今社會生活的重要工具，和「教科書」對於教學的重要性。而由於單維彰（2018）「建構下一代國中階段數學課綱：機率新課程」計畫引起的契機，使得研究者對於研究國外教科書產生研究動機。

一、機率的重要性

「機率」起源可以追朔自人類文明初始，而 stochastic（隨機的）一詞源自古希臘文，意為一個人能預測未來。隨著機率論的發展及現今科技資訊的進步，機率的概念應用在許多學科領域，也成為當今社會解決真實問題的策略之一，其應用範圍遍及科學、工程、醫學、工業（尤欣涵、楊德清，2010）。對於我們生活而言，「機率」是預測不確定事件的基準，它提供我們了解這個世界的一個視角，幫助我們做出相對有利的決策（許哲毓、單維彰、劉柏伸，2016）。

二、教科書的重要性

教科書對於學生而言，能提供一套完整的學習系統，並針對每個學習階段重要的知識進行組織架構，以利達成課綱所設計的學習目標。對於教師而言，教科書除了減輕教師在備課上的負擔，呈現每單元的學習目標及教學方法之外，更補充對於日常生活和單元概念間的關係，使教師可自行安排教學模式，以便有效地達到教學目標。對於社會而言，教科書能統整長年來所累積的智慧精華，並選擇當前社會對於日後人才將著重的能力進行有意識的編撰（王馨梅，2011）。教科書的撰寫方式影響學生的學習狀況、教師的教學方法、社會人才培育的方向，因此教科書影響著教師教學課程內容方

向及學生的學習成就表現（尤欣涵、楊德清，2010）。

三、歐洲機率教科書研究文獻較少

機率單元的跨國教科書研究是單維彰（2018）計畫的其中一項基礎。在此方面，研究者發現目前的研究文獻不多，只有對於中國、新加坡、美國、英國的相關研究，其中英國教科書的文獻只專注於樹狀圖的教學研究；可見臺灣對於歐洲的機率單元數學教科書的研究相對缺乏。所以本研究選擇歐洲人口最多且經濟發展最好的德國，作為教科書的研究對象。

四、科技部研究計畫

在單維彰（2018）計畫中，針對臺灣國中機率課程的編排進行研究探討及提出改善方案。其中「研究探討」的部分，除了針對臺灣機率課綱的內容演變進行研究之外，更對於學生學習機率的各年齡層心智發展、以及各國教科書中機率內容的編排進行分析探討，期望改變目前臺灣較少或較遲機率內容的狀況。其中「改善方案」的部分，意欲提出一套適合臺灣機率課程發展的教學模式，以提供下一代制定數學課程綱要委員的參考依據。

本研究回應單維彰（2018）計畫中，對於外國機率教科書的分析需求，並專注於德國教科書六至九年級的機率課程內容編排及教材編寫方式，以提供多元素材，進而完善未來臺灣機率課程內容的發展。

第二節 研究目的與問題

綜合上述研究背景與動機，發展出本研究的目的與問題。本研究並期望為教科書機率單元的設計者、自行設計機率單元教案的教師，提供教學活動的設計參考，以呼應 108 課綱的素養導向教學。

一、研究目的

本研究主要是作為單維彰（2018）計畫中，對於建構臺灣下一代國中階段機率課程綱要的研修依據。在研究價值上，對編寫教科書的作者和自編教材的現場教師而言，在剛上路的 108 課綱中，對於素養導向的教學將是未知的挑戰，而本研究提供豐富多元的情境問題且深入淺出的教材分析，作為撰寫教科書題材和設計教學活動的參考。

二、研究問題

研究者關注以下四大問題：

- 德國六至九年級教科書之機率單元教材有多少種情境問題，及其題數分布為何？
- 德國六至九年級機率教科書的編排模式為何？
- 德國六至九年級機率教科書提供之教材編寫方法為何？
- 德國六至九年級機率教科書是否符合素養導向的教材設計理念？

第三節 研究範圍與限制

本研究範圍為德國六至九年級之機率教科書，其中包含教師在運用於課堂中的教材內容，並不包括用於課後專題研究或習題演練的教材部分，也沒有涉及教師手冊。以下分項說明本研究的限制。

一、研究者無德國文化背景

研究者因並無德語能力，因此在閱讀德國教科書時，方法之一是仰賴 Google 翻譯器和微軟翻譯器。遇到翻譯器的翻譯結果令人無法捉摸理解之時，研究者拿此段落給熟悉德語的專業人士翻譯，以幫助研究者理解其中含意。因為研究者並無德國文化背景，有時候即使翻譯了文字，還是難以體會：例如德國教科書中引用了民間常見的遊戲，研究者無法體會它所引起學習動機的趣味。

二、教科書取材單一

研究者所取材的德國 Lambacher Schweizer 系列教科書源自 1946 年，是德國歷史最為悠久的版本且在德國及瑞士的中學使用率眾多。但為了專注於課程內容的編排模式和教材撰寫的方法，研究者只針對單一教科書進行研究分析。

（https://www.klett.de/sixcms/media.php/321/KTD54_15-16.pdf）

對於臺灣教科書的取材，因並非本研究的主軸且研究者將臺灣三個版本康軒、南一、翰林之國中機率課程內容作粗略的比較，發現大致相同，因此只取康軒版本以作為了解臺灣機率課程內容的發展。

三、德國教師手冊

研究者找尋了網路資訊，並無發現配合本研究教科書之教師手冊。經過私下致函曾經訪問德國教科書研究機構的國內學者，還是不能確定是否有正式出版的教師手冊？經另一位國內數學教育學者的口頭交流，德國的中學數學教科書可能並沒有正式的教師手冊。總之，本研究不涉及前述教科書的教師手冊。

四、研究分析工具

本研究分析工具分為量化分析和質性分析兩大部分。在量化分析中，研究者利用雙向細目表作為量化分析工具，並呈現在第三章研究工具中詳細介紹。但因德國教科書有些機率題目並無正確解答且無唯一的答題策略，雖可從題目的前後脈絡中得知此問題情境應為的機率類型，但若將此問題情境獨立取出進行判斷分類，並無法非黑即白的說此機率問題情境所屬的類型。

在質性分析中，因質性分析依賴於研究者的知識背景和自我觀點的切入，因此可能導致較為主觀的研究結果。為避免過於偏頗的分析方式，研究者逐步提出研究分析結果呈於專家討論，以確保最終質性研究分析結果的完整性。

第二章 文獻探討

本章節首先以國外機率教科書的研究文獻作為基礎，接著藉由介紹德國的教育體制和課程綱要目標，得知德國教科書撰寫的背景，然後簡介臺灣的課綱及教科書背景。接著，本章探討研究所需的量化分析和質性分析之相關文獻。最後解釋德國教科書中專有名詞的定義，以及對於後續論文所需的專有名詞做釋義。

第一節 國外機率教科書研究文獻

本節對於國外機率教科書之研究文獻作整理，以盤點當前對於機率教科書研究的發展和結果，進而為本研究對象德國機率教科書找到適切的研究分析方向。

近年臺灣學者僅對於中國、新加坡、美國、英國的機率單元數學教科書發表過研究結果，本節整理這些文獻。以下各小節，依序先介紹該國教科書研究者所採用的教科書背景，之後透過列表呈現此國課程綱要中的機率內容，最後簡述其研究者對於教科書研究之結果分析，以作為了解當前國外機率教科書研究文獻探討。

（一）中國

吳永冬（2017）「臺灣與大陸中、小學統計與機率教科書內容之比較」論文中，採用 2011 年中國教育部頒布「全日制義務教育數學課程標準」為依據所編寫發行之人民教育出版社的數學教科書作為研究對象。表 2-1 為中國中小學數學機率課程綱要。

表 2-1 中國中小學機率課程綱要（引自吳永冬，2017）

學習階段	階段目標	課程內容
第一階段（一年級至三年級）		

第二階段（四年級至六年級）	• II-02 進一步認識到數據中蘊涵著信息，發展數據分析觀念；通過實例感受簡單的隨機現象。	• II-p-01 在具體情境中，通過實例感受簡單的隨機現象；能列出簡單的隨機現象中所有可能發生的結果。 • II-p-02 通過測試、遊戲等活動，感受隨機現象結果發生的可能性是有大有小的，能對一些簡單的隨機現象發生的可能性大小做出定性描述，並能進行交流。
第三階段（七年級至九年級）	• III-01 體驗數據收集、處理、分析和推斷過程，理解抽樣方法，體驗用樣本估總體的過程；進一步認隨機現象，能計算一些單事件的概率。 • III-02 了解利用數據可以進行統計推斷，發展建立數分析觀念；感受隨機現的特點。	• III-d-09 通過表格、折線圖、趨勢圖等，感受隨機現象的變化趨勢。 • III-p-01 能通過列表、畫樹狀圖等方法列出簡單隨機事件所有可能結果，了解事件的概率。 • III-p-02 知道通過大量的重複試驗，可以用頻率來估計概率。

該研究指出中國小學機率課程在五年級上學期開始，利用統計的概念介紹機率，使學生能體會統計與機率的連結。中學機率課程分布在七下、八下和九上，其中教學方式以普查與抽查開始統計課程內容，並利用頻率估計機率，進而進入機率課程教學，使其統計與機率有著密切的連結。

（二）新加坡

劉峻丞（2013）「台灣與新加坡國中階段教科書統計與機率題目之分析比較」論文中，採用根據新加坡教育部 2007 中學數學課綱（GCE‘O’Level）所編寫之 New Syllabus Mathematics 數學教科書作為研究對象。表 2-2 呈現新加坡機率課程綱要內容。

表 2-2 新加坡機率課程綱要（GCE‘O’Level）(引自劉峻丞，2013）

學習階段	內容
中學 2 年級	一、了解機率可用於描述可能性 二、求單一事件的機率

中學 3~4 年級	一、使用可能性圖表或樹狀圖進行簡單聯合事件機率計算 二、機率的加法與乘法 三、互斥事件與獨立事件

該研究結果指出新加坡教科書的機率總題目數多於臺灣，並以文字搭配圖片、圖表的方式呈現。其中內容特色有三：

(1) 樹狀圖分枝填入機率值；

(2) 具有創造性，例如其中例題為「編寫一個可以套用某一機率事件的故事寫作」，將「擬題」活動正式編入教科書；

(3) 資訊科技融入情境問題，例如其中例題為「有關真實生活中使用機率理論的情境問題，並利用網路搜尋資料，再發現寫出與同學分享」。

（三）美國

尤欣涵、楊德清（2010）在「台灣教研院教材與美國 MiC 教材於機率課程設計上之差異性比較」論文中，採用依據 2000 年「美國數學教師協會」(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）所出版之「學校數學原則與標準」(Principles and Standards for School Mathematics）編寫之「情境數學」(Mathematics in Context, MiC）教科書。表 2-3 呈現美國數學機率課程綱要內容。

表 2-3 美國機率課程綱要（引自尤欣涵、楊德清，2010）

學習階段	課程綱要內容
3～5 年級	• 以事件發生的可能性來進行描述，並使用「必然」、「有可能」及「不可能」來討論可能性的程度。 • 預測簡單試驗結果的可能性，並且檢驗預測。 • 瞭解事件的可能性可被用 0-1 的數值來測量表示。
6～8 年級	• 瞭解並使用適當的字彙來描述互補與互斥的事件。 • 使用比例及基本的機率認知來猜測並驗證試驗和模擬的結果。 • 使用有組織的清單、樹狀圖及面積圖等方法來計算簡單混合事件的機率。

9～12 年級	• 瞭解樣本空間和機率分布的概念，並能在樣本事件中建構樣本空間及分布。 • 利用模擬的方式來建購經驗式的機率分布。 • 計算並詮釋一樣本事件中隨機變數的期望值瞭解條件機率和獨立事件的概念。 • 瞭解如何計算一混合事件的機率。

該研究指出美國自三年級開始進入機率課程內容，並在「情境設計與佈題方式」上，以同一故事情境連貫單元概念，且多為由淺入深的開放性問題佈題。在「解題策略的發展方式」上，鼓勵學生多元解題，而教師可適時從中予以提示，其解題策略發展模式為：佈下情境→學生由情境獲得概念→再佈題→學生自行發展解題策略。在「連貫性與延伸性」上，由先前的單元導入機率教學，並於單元教學後延伸先前的問題，以提供學生進一步反思。

（四）英國樹狀圖

許哲毓、單維彰、劉柏伸（2016）在「樹狀圖在機率教學的應用-臺灣與英國教科書之比較」論文中，採用英國 Pearson 版本 Exploring Maths Tier 6 適用於七年級至九年級之應用於樹狀圖解決機率問題作為研究樣本。

該研究指出英國機率課程中的樹狀圖教材內容層次為

樹狀圖建立→具有獨立性→在樹枝上呈現機率→機率相乘

而其樹狀圖的數學意義著重於建立機率問題，並以事件發生之機率值填入每條樹枝上的技巧，應用至機率相乘之獨立性概念上，以成為機率課程內容的教學策略。

第二節 德國教育

本研究從德國的學習制度著手研究，進而了解教科書所撰寫的學生對象之學習程度、教學階段、未來展望，而後經由介紹德國課綱的課程目標，探討德國機率課程的核心價值。最後簡介本研究所使用的教科書背景。

一、德國學制

德國 16 邦的教育制度由各邦政府自行決定，以下說明德國大致上的學習制度。首先德國的義務教育至少九年，以 6 歲入學為主，小學大多為四年、中學為五年以上。德國各邦有三種中學：文理中學（Gymnasium）、實科中學（Realschule）、主幹學校（Hauptschule）。在完成中學學業後，由畢業中學的不同文憑而決定後續的升學管道。

德國小學畢業後，進行分流至不同類型的中學，其定向的根據分為兩種方式，其一為藉由透過老師建議或學生家長意願決定，例如：在 2015 年 Bayern、Brandenburg、Sachsen 、Sachsen-Anhalt 與 Thüringen 這五個邦要求學生應依照學校教師之推薦，進入中學；其二為學生的學業表現，並以文理中學為最高，實科中學次之，最後為主幹學校，例如：巴伐利亞邦成績標準採等第制，若將等第轉換成分數，則分數越低代表成績越好，而規定成績須低於 2.33 才能進入文理中學、低於 2.66 才進入實科中學（張炳煌，2018）。以下說明三種中學分流的學習歷程目標和生涯規劃。

文理中學就讀為八年或九年，在 1972 年「協議重新設計高級中學階段的教育」（Vereinbarung zur Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II）中，各邦文理高級中學（Gymnasiale Oberstufe）的學習歷程訂定至 12 年級或 13 年級，並以高中會考（Abitur）和入學大學為終極目標，且各邦之間須互相認證會考成績和文理高中畢業文憑。實科中學大多為六年，並以栽培工商業界、政府機關的實務專業人才為主，畢業生可就讀職業高級技術學校以繼續升學進修或者進入職場。主幹學校約為五年，其課程內容較於基礎，畢業生可進入雙元職業教育體系（Duales Ausbildungssystem）中完成學徒培訓後，從事技術性職業。在 2019 年德國中等後期教育階段學生高達 340 萬人，其中職業教育與普通教育的學生人數比例約為 7：3，因此在德國高中階段的學生以接受職業教育培訓為主（張嘉育、黃亞君，2019）。

本研究對象因採取德國巴伐利亞邦之教科書，因此研究者從「巴伐利亞邦教育文化部」（Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus）官網和「巴伐利亞國家學

校質量與教育研究所」（Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München，簡稱 ISB，為巴伐利亞國家教育文化部著作權所有）官網中，翻譯了巴伐利亞邦學制，如圖 2-1。圖中同一塊顏色為此學歷之學習歷程時間每一列皆為一年，所以同一顏色為此學歷之就讀時程。（資料來源：https://www.km.bayern.de/schueler/schularten.html 和 http://www.isb.bayern.de/schulartspezifisches/）

年級		高等職業資格（大學入學資格）		普通科目相關大學入學資格		普通大學入學資格	
	特殊需求學校	技術學院	專科學校	BOS	FOS		病童學校
	Förderschulen	Fachakademie	Fachschule			文理（高級）中學	Schule für Kranke
						Gymnasium（Oberschule）	
學徒制（具有中學學歷資格）							
	特殊需求學校	雙軌制職業學校		職業專門學校			病童學校
	Förderschulen	Berufsschule im dualen System		Berufsfachschule			Schule für Kranke
初中畢業							
10	特殊需求學校		經濟學校			文理中學	病童學校
9	Förderschulen		Wirtschaftsschule			Gymnasium	Schule für Kranke
8							
7							
6		中間學校		實科中學			
5		Mittelschule		Realschule			
小學畢業，進入中學							
4	特殊需求學校						病童學校
3	Förderschulen	小學 Grundschule					Schule für Kranke
2							
1							

圖 2-1 巴伐利亞邦學校制度

註：

- 特殊需求學校（Förderschulen）：對於有特殊教育需求的兒童、青少年和青年人實現接受特殊教育和培訓的。
- 病童學校（Schule für Kranke）：「即使在生病的情況下，也享有受教育的權利」是病童學校的理念。病童學校對於因生理或心理上的疾病，需長期仰賴醫院專業治療的學生，進行教育。
- 小學（Grundschule）：從 1 年級就讀至 4 年級，為 6 歲至 10 歲學生的普通教育。
- 文理中學（Gymnasium）：從 5 年級至 12 年級，共八年的學習歷程（簡稱 G8），提供深入的學科教育，以作為大學的準備或高要求的職業培訓。
- 實科中學（Realschule）：此為 5 年級至 10 年級的六年制計畫，其教育目標為學生能具備學科理論和專業實踐的能力，且學校提供適當的職業培訓，以利未來考取職業

證照或升學的機會。

- 中間學校（Mittelschule）：強調三大精神「專業的工作能力」、「淵博的知識」、「廣泛的人際交往」。提供基礎科目的教育，並聚焦於實用化的職業定位，每間學校可提供工作機會、模組化的個人資助、各種專業面向的就業機構職缺。
- 經濟學校（Wirtschaftsschule）：培訓初級商業人員，提供經濟和行政管理領域的基礎職業培訓學校，學習歷程為 7 至 10 年級、8 至 10 年級或 9 至 10 年級。
- 職業專門學校（Berufsfachschule）：提供完整的職業培訓。例如設計（如木匠）、IT 資訊、營養、護理、飲食、社會、兒童保育、飯店和旅遊、衛生、外語、音樂的專業領域，進行針對性的單一培訓。
- 雙軌制職業學校（Berufsschule im dualen System）：雙重培訓制度中提供通識教育和理論專業知識。
- 職業高中 Berufliche Oberschule （FOS）/ （BOS）：在職業高中裡分成技術學院（FOS）和職業高中（BOS），對於技術學院（FOS）文憑需研讀至 12 年級、職業高中（BOS）文憑需研讀至 13 年級，其中提供通識教育、技術理論和實踐經驗的人才專業培訓。
- 專科學校（Fachschule）/技術學院（Fachakademie）：為職業培訓學校，並提供深入的專業知識、技能以及通識教育，並為公司更高級別的操作任務或學習做好準備。

二、德國機率課綱

德國課綱因應 16 個邦而有所不同，但在「各邦文教部長常設會議」（Kultusministerkonferenz，簡稱 KMK）中，訂定對於初中學生（九年級）數學能力須具備的六大知識、技能和態度。研究者在 KMK 官網上，在文件/統計資料（Dokumentation/ Statistik）裡的決議與出版物（Beschlüsse und Veröffentlichungen）中的教育/學校（Bildung / Schule）普通教育（Allgemeine Bildung）數學、科學、科技（Mathematik, Naturwissenschaften, Technik）中學畢業證書的數學教育標準（九年級）Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss（Jahrgangsstufe 9），找到其對於中學學生數學六大能力的具體執行細項，如圖 2-2 所示。（資料來源：https://www.kmk.org/）

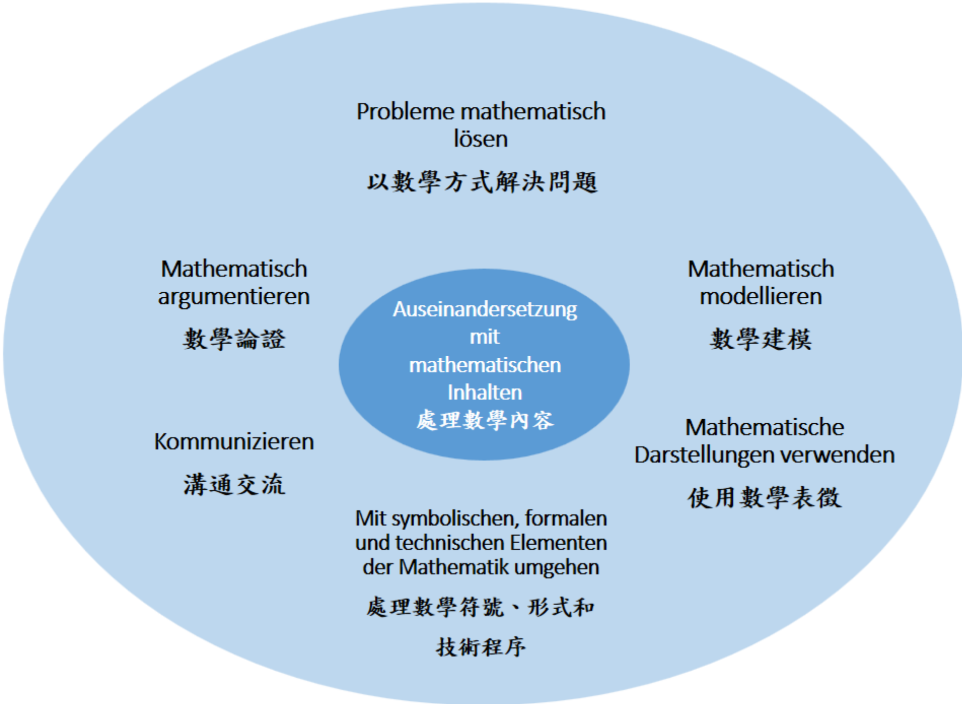


圖 2-2 德國初中（九年級）課綱之六大能力指標

（K 1）數學論證

- 提出數學特有的問題，例如：有存在什麼嗎？它是如何改變的？總是這樣的嗎？並先行給予合理的假設。
- 提出數學論證，例如：解釋、原因、證據。
- 描述和證明解決方案的合理性。

（K 2）以數學方式解決問題

- 確定預先確立或自行制定的問題。
- 選擇並使用合適的工具、策略和原則來解決問題。
- 檢查結果的合理性，並反思解決方案的概念。

（K 3）數學建模

- 將要建模的範圍或問題情境轉為數學術語、結構和關係。
- 選擇並使用合適的數學模型。
- 解釋並檢查相應範圍或問題情境的結果。

（K 4）使用數學表徵

- 能使用、解釋和區分不同數學符號和情況的表徵方式。
- 理解表徵形式之間的關係。
- 根據不同情況和目的選擇適當的表徵形式，並能在它們之間做轉換。

（K 5）處理數學的符號、形式和技術程序

- 能使用變數、術語、方程、函數、圖表。
- 將符號和形式語言翻譯成自然語言，反之亦然。
- 執行解決方案和控制程序步驟。
- 明智且有意義地使用數學工具，例如：公式模型、計算器、軟體。

（K 6）溝通交流

- 使用合適的媒體工具，以利於理解的方式記錄、呈現考慮因素、提出解決方案和展示結果。
- 適當使用技術語言。
- 了解和審查他人的陳述以及有關數學內容的文本。

接著，KMK 對於數學相關內容的能力標準，進行更進一步的描述。首先，初中數學內容分為五大主題：數字（Zahl）、測量（Messen）、空間和形狀（Raum und Form）、函數關係（Funktionaler Zusammenhang）、數據和機率（Daten und Zufall）。其中和本研究相關的主題是「數據和機率」。以下說明此主題（L 5）的教學指導原則。

（L 5）數據和機率之指導原則

- 從統計調查中評估圖表表示形式。
- 計畫統計調查。
- 使用合適的工具（如：軟體）有系統地收集數據資料，將其記錄在表格之中，並以圖形方式呈現。
- 使用參數解釋數據資料。

• 根據數據分析反映和評估論點。

• 描述日常生活中的隨機現象。

• 確定隨機試驗中的機率。

本研究對象是德國巴伐利亞邦之文理中學（Gymnasium）六至九年級之數學機率教科書。在「巴伐利亞邦教育文化部」（Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus）官網上，對於文理中學重要的問答集（Die wichtigsten Fragen und Antworten zum Gymnasium）中，得知六、七、九年級每週有 4 節數學課，每節 45 分鐘，八年級則為每週 3 節數學課（https://www.km.bayern.de/schueler/schularten/gymnasium.html）。

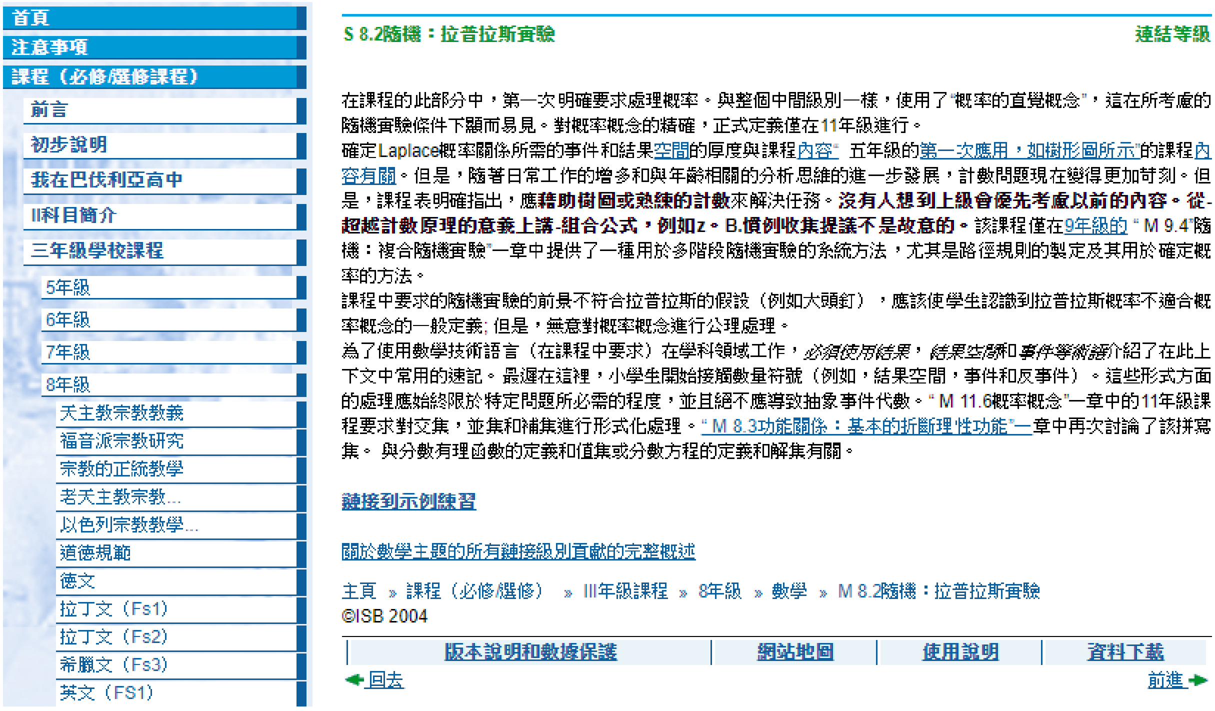
研究者在 ISB 官網中，得知巴伐利亞邦六至九年級之機率課程綱要，並呈現至表 2-4。（http://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26318.html）

表 2-4 巴伐利亞邦六至九年級之機率課程綱要

年級	課程內容綱要目標	課程內容
六年級	能夠解決與日常生活有關的基本百分比概念	• 相對次數（約 6 小時） 學生進行簡單的隨機試驗並評估數據，而後知道相對次數（表示方式可為分數、小數或百分比）為評估單個結果的一種方法，以作為預測獲勝機會的有用估計。（大數的經驗法則）
	在簡單的情況下，能創建圖表及解釋	• 日常生活中的數學之百分比計算和圖表（約 10 小時） 透過使用各種生活實例，讓學生認識到百分比計算的重要性，而將其概念應用至圖表的創建和解釋，如此連結起來，學生將理解如何呈現數據，以利引導讀者的印象。
七年級	以數學和圖形方式評估數據	• 日常生活中的數學之數據、圖表和百分比（約 11 小時） 學生以圖形和數學方式評估來自隨機試驗或統計調查的數據資料，並利用分析圖表以提高評估真實情境的能力。而學生從 6 年級開始透過需要改變基準值的問題，進而重複計算百分比的基礎知識，以利加深加廣對於百分比的知識量。

八年級	能確定在特定情況下的拉普拉斯機率	• 隨機之拉普拉斯試驗（約 12 小時） 從較低級別的隨機試驗開始，重點是絕對次數和相對次數，現在是第一次計算機率，並將其解釋為預期程度和預測的確定性程度。學生觀看拉普拉斯試驗，並使用數學術語描述相關的測試結果。您可以使用樹狀圖或熟練的計數方式來確定拉普拉斯機率。看看不符合拉普拉斯假設的隨機試驗，使學生認識到有必要對機率概念進行更全面的表述。
九年級	使用路徑規則描述多階段隨機過程和計算其機率值	• 隨機之多階段隨機試驗（約 11 小時） 直接從 8 年級情境問題延續至此，使學生們能系統性地操作多階段隨機試驗，而透過使用樹狀圖呈現此隨機試驗過程，並將路徑規則視為公理，以利使用來確定機率值。最後，因應現代科技的發達，我們透過模擬來彌補理論上考量的誤差，例如：使用甕作為亂數。

研究者在「巴伐利亞國家學校質量與教育研究所」(ISB）整理表 2-4 時，發現在網站中除了將學生各個年級之教學目標清楚說明、執行方法和時間具體描述之外，更在此單元名稱下增添連結鍵。點選進入連結之後，可看到解釋此單元概念教材的精華內容，並說明與先前課程和未來課程的連結，及給予此單元的演練習題評量，如圖 2-3 所示。圖 2-3 是經由 Google 瀏覽器直接翻譯的 ISB 德語網頁，因此雖有些語意不通，但足以看出德國巴伐利亞邦編寫課綱的特色。



首頁
注意事項
課程（必修/選修課程）
前言
初步說明
我在巴伐利亞高中
II科目簡介
三年级學校課程
5年级
6年级
7年级
8年级
天主教宗教教義
福音派宗教研究
宗教的正統教學
老天主教宗教...
以色列宗教教學...
道德規範
德文
拉丁文（Fs1）
拉丁文（Fs2）
希臘文（Fs3）
英文（FS1）

S 8.2隨機：拉普拉斯實驗　　連結等级

在課程的此部分中，第一次明確要求處理概率。與整個中間級別一樣，使用了"概率的直覺概念"，這在所考慮的隨機實驗條件下顯而易見。對概率概念的精確，正式定義僅在11年級進行。
確定Laplace概率關係所需的事件和結果空間的厚度與課程內容" 五年級的第一次應用，如樹形圖所示"的課程內容有關。但是，隨著日常工作的增多和與年齡相關的分析思維的進一步發展，計數問題現在變得更加苛刻。但是，課程表明確指出，應**藉助樹圖或熟練的計數**來解決任務。**沒有人想到上級會優先考慮以前的內容。從-超越計數原理的意義上講-組合公式，例如z。B.慣例收集提議不是故意的。**該課程僅在9年級的" M 9.4"隨機：複合隨機實驗"一章中提供了一種用於多階段隨機實驗的系統方法，尤其是路徑規則的製定及其用於確定概率的方法。
課程中要求的隨機實驗的前景不符合拉普拉斯的假設（例如大頭釘），應該使學生認識到拉普拉斯概率不適合概率概念的一般定義; 但是，無意對概率概念進行公理處理。
為了使用數學技術語言（在課程中要求）在學科領域工作，*必須使用結果*，*結果空間*和*事件等術語*介紹了在此上下文中常用的速記。最遲在這裡，小學生開始接觸數量符號（例如，結果空間，事件和反事件）。這些形式方面的處理應始終限於特定問題所必需的程度，並且絕不應導致抽象事件代數。" M 11.6概率概念"一章中的11年級課程要求對交集，並集和補集進行形式化處理。" M 8.3功能關係：基本的折斷理性功能"一章中再次討論了該拼寫集。 與分數有理函數的定義和值集或分數方程的定義和解集有關。

鏈接到示例練習

關於數學主題的所有鏈接級別貢獻的完整概述

主頁 » 課程（必修/選修） » III年级課程 » 8年级 » 數學 » M 8.2隨機：拉普拉斯實驗
©ISB 2004

版本說明和數據保護 | 網站地圖 | 使用說明 | 資料下載
回去　前進

圖 2-3 巴伐利亞八年級課綱之第二單元 ISB 翻譯網頁

在圖 2-3 中所有藍色字體為超連結鍵，在中間課程內容介紹的第三行中段提及此單元和五年級樹形圖（樹狀圖）的單元課程息息相關，而此超連結至五年級的樹形圖單元。再往下三行的後段，告訴讀者未來九年級與此單元的關聯性……等等，最後在課程內容介紹完後，網頁提供「鍵接到示例練習」之超連結的習題演練，使學生能自主確認學習狀況。

三、本研究採用之德國教科書背景

在 1946 年 5 月 9 日，Klett 出版社與作者 Theophil Lambacher 和 Wilhelm Schweizer 簽訂了一份的合約，其目標為了撰寫中等水平程度的中學數學教科書，因此開啟了 Lambacher Schweizer 系列的教科書。自 1946 年初版以來，成為德國 16 聯邦州和瑞士學校中最常使用的一系列數學課程教材。(資料來源：https://www.klett.de/)(此系列教材為德國「最常用」的數學教科書之看法，來自單維彰教授。他則根據兩項資訊來源，其一為在德國留學之友人，亦即代為採購此套教科書的先生，在採購前詢問書店老闆所得；其二為 2019 年 11 月 18、19 日在師大數學系舉辦「臺德數學教育雙邊研討會」時，他在會後晚宴時詢問德國來訪的數學教育學者 Hans-Stefan Siller 教授所得的

訊息。）

Klett 集團的發展可以追朔到在 1897 年開始的一家小型印刷廠，而後在 1920 年代出版了德國西南部符騰堡州地區的第一本教科書，至今發展已成為一家遍布全球的教育公司。Klett 的發展除了傳統教科書之外，更發展了使用數位互動式學習解決方案、專業書籍和小說，並為私立教育和成人繼續教育服務。在德國也擁有自己的國際學校和學院，每年招收約 185,000 名學生，並在各地經營著從日托中心到一般傳統和遠距學習的大學。（資料來源：https://www.klett.de/）

第三節 臺灣機率教育

本節整理臺灣六至九年級之機率課程綱要內容，而後介紹所參考的教科書出版社背景，以利了解臺灣機率課程內容及教材編寫方式。

一、臺灣六至九年級機率課綱

在「十二年國民基本教育課程綱要」中，對於臺灣六至九年級之機率主題之學習目標，呈現於表 2-5。

表 2-5 臺灣十二年國民基本教育之六至九年級機率課程綱要

編碼	學習內容條目及說明	備註	參考教具	對應學習表現
D-6-2	解題：可能性。從統計圖表資料，回答可能性問題。機率前置經驗。「很有可能」、「很不可能」、「A 比 B 可能」。	「A 比 B 可能」限兩者差異大的情況。僅從資料數量的多寡來回答。本條目非古典機率教學（D-9-3）。		d-III-2
D-9-2	認識機率：機率的意義；樹狀圖（以兩層為限）。	以樹狀圖分析所有的可能性，國中階段以對稱性（節點相同）的樹狀圖為主。		d-IV-2

D-9-3	古典機率：具有對稱性的情境下（銅板、骰子、撲克牌、抽球等）之機率；不具對稱性的物體（圖釘、圓錐、爻杯）之機率探究。		計算機	n-IV-9 d-IV-2

註：• d-III-2 能從資料或圖表的資料數據，解決關於「可能性」的簡單問題。

• d-IV-2 理解機率的意義，能以機率表示不確定性和以樹狀圖分析所有的可能性，並能應用機率到簡單的日常生活情境解決問題。

• n-IV-9 使用計算機計算比值、複雜的數式、小數或根式等四則運算與三角比的近似值問題，並能理解計算機可能產生誤差。

因 108 課綱剛上路，因此未有正式出版的六年級和九年級數學教科書，所以本研究採用在教育部 97 年發布「國民中小學九年一貫課程綱要」之下所出版的機率教科書，表 2-6 呈現 97 課綱的機率課程綱要內容。因為研究者比較康軒、南一、翰林的九年級機率教科書發現課程內容差異不大，因此以康軒版本為例。

表 2-6 臺灣國民中小學九年一貫之六至九年級機率課程綱要

九年級分年細目編號	第四階段能力指標
9-d-05	D-4-04 能在具體情境中認識機率的概念。

二、康軒出版社背景

康軒文教集團創辦人為李萬吉先生，在 1988 年 12 月時創辦了康和出版有限公司，並在臺灣 1989 年開放由民編出版國中藝能科教科書時，開始發行國中小藝能科教科書。而在 1993 年 1 月，康和出版社改組為康軒文化，並籌備發行國小各學科教科書。（資料來源：https://www.knsh.com.tw/_Group/History.asp）

康軒文教集團的出版產品，除了國中小教科書之外，更將對象向下延伸至幼教，廣及參考書、輔助教材、兒童雜誌、幼教教材、授權教材。除此之外，更創建從幼兒園至高中階段的「康橋國際學校」、成立連鎖安親班系統「康軒學習教室」、與日本株式社拓人與冠傑教育集團創立臺灣第一個跨國補習班系統「臺灣拓人教育」，並在中國和泰國拓展教育事業。（資料來源：https://www.knsh.com.tw/index.asp）

第四節 研究工具的文獻探討

本節針對量化分析工具和質性分析工具做文獻上的探討。量化分析工具採用單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）發展的雙向細目表；質性分析工具採用張芬芬（2010）質性資料分析的五步驟。

一、量化分析工具

本研究採用單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）中對於機率學前診測之雙向細目表作為量化分析工具。本研究除了沿用「機率類型」和「機率概念層次」兩個向度作為分析機率題型之外，更添加獨立於兩向度的「前機率」類型，以利量化分析機率題型更為完整。以下描述論文內容對於本研究量化工具之文獻探討。

（一）機率類型

機率類型的向度採用 Shaughnessy（1992）對於機率類型做的整理，分為主觀機率（subjective probability）、古典機率（classical probability）、頻率機率（frequentist probability）、形式機率（formal probability），以下解釋其定義。

1. 主觀機率（subjective probability）

指隨機事件的機率值由個人信念賦予，而個人信念可根據日常經驗累積和直觀的感受，因此主觀機率的機率值會因個人所接收的訊息量，有所變動調整。相對於主觀機率，古典機率和頻率機率又稱為客觀機率。

2. 古典機率（classical probability）

隨機試驗符合拉普拉斯試驗條件（所有 n 個事件結果擁有相同的可能性），使其利用拉普拉斯公式得到機率值（每個結果發生的機率值皆為$\frac{1}{n}$）。也可將此概念推廣為若隨機事件集合 S 是有限互斥的，且符合拉普拉斯試驗條件，則發生事件 A 的機率為 $\mathrm{P(A)} = \frac{|A|}{|S|}$，$|A|$代表事件 A 的樣本點數，$|S|$代表隨機事件 S 的事件個數。

3. 頻率機率（frequentist probability）

利用大量重複的隨機試驗，並計算某事件發生之相對次數作為估計機率值的方式，稱為頻率機率。而後藉由大數法則得知隨著重複試驗次數的增加，事件發生的頻率將會趨於一個穩定值，因此若能執行無窮多次試驗，其計算試驗結果之相對次數將為真實機率值。

4. 形式機率（formal probability）

此機率類型的概念通常不屬中學課程，所以後文也不再討論此機率類型。

（二）機率概念層次

在機率概念層次的向度中，單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）整理 Jones 等人（1997, 1999）對於機率情境和 Bognár 與 Nemetz（1977）對於青少年機率概念發展的研究結果，其中分為單一事件、複合事件（餘事件、和事件、積事件）、獨立性、條件機率，以下說明其定義。

1. 單一事件

問題中僅涉及一個隨機事件。

2. 複合事件

分為三項機率概念，包括「餘事件」、「互斥和事件」、「複合事件」。「餘事件」不在事件 A 之樣本點集合，稱為 A 的餘事件。「互斥和事件」樣本點彼此之間為互斥事件，當隨機事件為多個樣本點時，利用加法原理計算。而「複合事件」在德國六至九年級機率教科書中，並無此機率概念，因此後文不再討論此機率概念。

3. 獨立性

在兩隨機事件間互不影響時，所發生的機率問題。

4. 條件機率

德國六至九年級機率教科書中，並無此機率概念，因此後文不再討論此機率概念。

（三）前機率

此為單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）中，「沒有機率」的機率概念。因為前者的評析對象為數學擬題，所以可能會「沒有機率」；本研究的評析對象為數學教科書的機率單元，若以「沒有機率」分類容易產生誤解，因此修改名稱為「前機率」，意為在進入機率課程概念前的引導性概念。

二、質性分析工具

本質性研究採用張芬芬（2010）對於質性資料分析的五個階段模式。而在最後一階段中，研究者引用鄭章華（2018）以驗證本研究結論。

（一）質性分析步驟

張芬芬（2010）利用 Carney（1990）「分析性抽象階梯」所提出的以資料轉型（data transformation）提昇抽象層級過程作為質性資料分析觀點，如表 2-7 所示。

表 2-7 分析性抽象階梯（引自張芬芬，2010）

層次名稱	細項層次結果	舉例具體行為
1 資料的摘要與包裹	1a 產生一份可分析的文本	• 整理個別訪談為概要 • 將晤談錄音整理為文字稿
	1b 嘗試編碼，找出合適的一套類目	• 資料編碼 • 就各種詮釋架構之關係，寫分析備忘錄
2 資料的再包裹與彙集	2 找出整個資料中的主旨與趨勢	• 尋找資料中的關係：撰寫分析備忘錄 • 找出資料中的重點與斷層
3 發展並檢測命題以建立一個解釋架構	3a 檢測假設並簡化資料組，以分析其中趨勢	• 交叉檢核暫時的各種發現分析 • 分析資料中的主旨畫出圖表
	3b 勾勒深層結構	• 綜合：將資料內入一解釋架構中

張芬芬（2010）為使未來研究者們能更容易掌握質性分析中的核心精神，利用表

2-7 Carney（1990）所提出的三層次五細項的概念，列出五個階段性的具體步驟流程，說明如下。

1. 階段一「文字化」

以蒐集文字或產生文字為主，而質性研究基本上主要就是文字「軟資料」(soft data)，其方式有三種：觀察、訪談、文件分析。相對之後的四個階段而言，「文字化」主要是一種客觀上的資料整理工作，後四階段皆為資料詮釋（interpretation）步驟，使資料獲得轉型。

2. 階段二「概念化」

將某段文字資料賦予某個「概念」，而當某片段文字被一概念所詮釋後，這段文字便獲得了轉型，進而找到其中意義的內涵。這就是當研究者走入抽象世界、觀念世界開始的質變過程。Miles 與 Huberman 將 A. Strauss 與 J.Corbin 的「概念化」程序整理如下（張芬芬，2006：頁 126，引自張芬芬 2010）。

- 編流水號：讀札記，並為行數/段數編流水號。
- 初步編碼：在段落旁/下，寫下想到的代碼。
- 整理代碼清單：累積代碼而成代碼清單。
- 建立初步代碼系統：看代碼清單，將代碼分類分層，形成類別與層級。
- 尋找主旨代碼：看初步代碼系統，找出更抽象的代碼。
- 建立更統整的代碼系統：以主旨代碼為主軸，形成更統整的代碼系統。
- 繼續運用、修改，直到代碼系統合用。

3. 階段三「命題化」

在研究樣本資料中找出的主旨與趨勢，並以命題形式呈現此關係，而此命題為暫時性研究假設，有待下一階段驗證。其中命題的產生可能為邏輯推理或整體直觀，因此長期全身心地投入研究資料當中，將是生成「命題化」結果的必要條件。

4. 階段四「圖表化」

經系統整理「概念化」資料，並仔細比對其中異同，進而驗證趨勢、主旨、類型、漏洞等「命題化」關係。而「圖表化」的四大優點（張芬芬，2006：頁 196-9，引自張芬芬 2010）：其一，在頁面中可一目了然的展現出資料與分析結果；其二，找出分析結果需再進一步分析漏洞；其三，易於比較不同類型的資料組；其四，提升研究問題的確實性，使讀者更相信研究結論。

5. 階段五「理論化」

建立某一理論或者驗證某一理論作為將資料整合在一起的系統化解釋架構。研究者要解開糾結在一起的意義之網（web of meanings），條理地梳理其中的脈絡關係，以利讀者理解網中的內涵。

（二）質性分析結果之驗證理論

本研究質性分析結果之階段五「理論化」中，提出鄭章華（2018）以作為驗證數學素養導向教科書的理論。鄭章華（2018）採用《脈絡數學》教科書（亦即前面介紹過的 MiC 教科書），它的寫作基於荷蘭數學家 Freudenthal 所提出的「現實數學教育」（Realistic Mathematics Education, RME）六大原理：「活動」(activity)、「真實」(reality)、「層次」(level)、「纏繞」(intertwinement)、「互動」(interaction）和「引導」(guidance)，作為學習數學教育原則（Van den Heuvel-Panhuizen, 2000）。以下呈現鄭章華（2018）和現實數學教育（2014）對於六大原則的說明與解釋。

1. 活動原則（activity）

學生被視為學習過程中的主動積極參與者（active participants），從做中學建構數學相關工具與發展數學洞察能力。

2. 真實原則（reality）

提出對學生有意義的真實情境問題是學習數學的重要精神與價值，因為當學生能運

用數學解決「現實生活」(real-life)問題的能力時，這為他們提供了意義與數學結構聯繫在一起的機會。

3. 層次原則（level）

不同理解層次的數學學習經歷。學習者從一開始處理非形式化、具有脈絡的問題，逐步建立出解題捷徑（shortcuts）與基模，最終深入了解其單元概念和解決策略之間的關係。

4. 纏繞原則（intertwinement）

數學課程內容應不被視為孤立的單元章節（isolated curriculum），而是考量內部連結與外部連結的高度整合（heavily integrated）所組織的課程架構。

5. 互動原則（interaction）

學習數學不僅是個人任務，也是一種社會活動（social activity）。而藉由與同儕互動促進解題策略的層次，並透過自我反思學習提升對於單元概念上的理解。

6. 引導原則（guidance）

教師應在學生的學習中發揮引導和催化的角色，如槓桿般地提升學生理解課程的想像，使學生能「再次」發明數學（guided reinvention）。

第五節 名詞釋義

本節介紹德國六至九年級機率教科書，所提及的數學專有名詞和表示形式的定義。以及對於後續論文所需的名詞，進行定義與解釋。

一、拉普拉斯試驗

在德國教科書中，把符合拉普拉斯假設條件的試驗，稱為「拉普拉斯試驗」（Laplace-Experimente），而其條件假設為此隨機試驗為「對稱隨機事件」，也就是我國

所說的「古典機率模型」。

二、集合表示方式

在德國教科書中，序對的表示方式為（ ； ）中間以分號隔開，如圖 2-所示。若樣本空間之子集合並無序對，則樣本空間之元素間以「；」區隔開來，如：$\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$。若樣本空間之子集合以序對方式表示，則樣本空間之元素間以「,」區隔開來，如：$\Omega=\{(K;K),(K;Z),(Z;K),(Z;Z)\}$。

三、樹狀圖

樹狀圖為有向無環圖，從一個點作為樹根發展，邊為離根方向的樹枝且分岔個數為發生某一隨機事件的元素個數、其他結點為發生事件的可能結果，且樹狀圖只存在一條從根到結點的路徑，不會形成迴圈（環狀路徑）。如圖 2-4 和 2-5 所示。

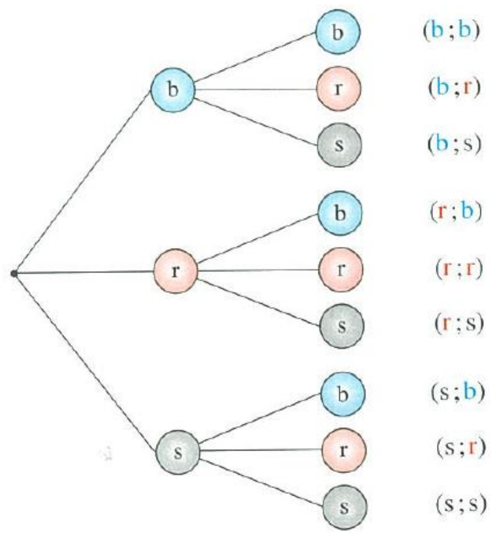


圖 2-4 樹狀圖示例 1

在德國教科書中，樹狀圖的樹根可能在左邊，則該樹狀圖的樹枝往右邊離根方向發展，如圖 2-4 所示。但樹根也有可能在上方，則該樹狀圖的樹枝往下方離根方向發展，如圖 2-5 所示。

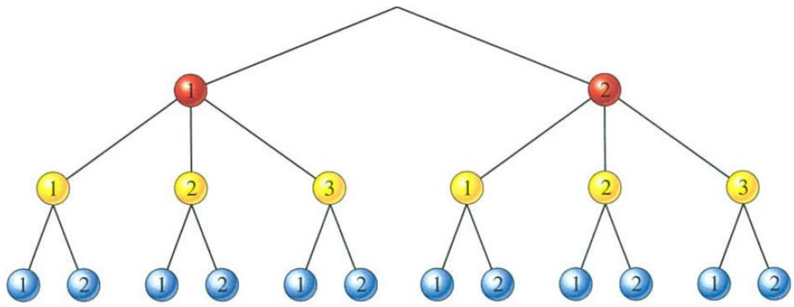


圖 2-5 樹狀圖示例 2

四、對稱隨機事件

隨機事件的所有樣本點發生的機率值相等，則稱為「對稱隨機事件」(equipossible events)。此英文翻譯並非直譯而是對譯。例如：投擲一公正骰子一次，隨機事件的樣本空間為{1, 2, 3, 4, 5, 6}，其中擲出任何一結果都幾乎擁有相同的可能性，所以此一隨機試驗稱為「對稱隨機事件」。

五、數學教學三步驟

劉秋木（2015）「國小數學科教學研究」第一章第四節中提出對於數學知識的性質與教學原則，其中針對「數學知識是抽象概念所形成的結構」之數學知識性質所做出的建議為利用「圖畫和語言是實際操作的紀錄」為教學原則，因此教學順序應為：

具體學習經驗→半具體學習經驗→抽象學習經驗

研究者借此教學順序之學習歷程稱為「數學教學三步驟」，以作為後續分析德國教科書教材編寫技巧的特色之一。

六、計數原理

有 k 個不同的盒子，裡面有已經編號的球，已知每盒的球數為$m_1, m_2, \ldots. m_k$，若在每盒中取一球，則總共有$m_1 \times m_2 \times \ldots. \times m_k$種可能的結果。也就是我國所謂的「乘法原理」。

第三章 研究方法

本研究採用內容分析法進行德國機率教科書研究。而本章節針對研究對象、研究流程設計之步驟方法、研究工具之量化和質性分析、資料分析之信度與效度，進行分節解釋敘述。

第一節 研究對象

本研究對象是 Klett 出版社為巴伐利亞（Bayern）邦出版的 Lambacher Schweizer 系列之六至九年級數學教科書。在 Klett 官網上，對於此系列教科書擁有以下五大特點，以實現八年制文理中學學習階段（G8）課程：

1. 有結構的教學課程及清晰的學習目標。
2. 提供多種新概念的情境問題，使其適合各種學習水平學生和發展各樣教學模式。
3. 利用主題計畫（Themenseiten）或閱讀文本（Lesetexte）補充議題和鞏固所學的知識。
4. 不斷演練新任務和複習舊內容，以確保熟練基本知識和技能。
5. 利用問題情境任務發展數學策略的項目建議書（Projektvorschläge）。

（資料來源：https://www.klett.de/produkt/isbn/978-3-12-731460-1）

本研究採用此系列六至九年級數學教科書，表 3-1 呈現各年級的初版年份，以及本研究所使用的教科書資訊。對於這四本教科書中，分別取其中機率課程單元作為研究對象，如表 3-2 呈現。

表 3-1 德國教科書各年級的出版年份

	初版年份	本研究所使用的教科書
六年級	2004 年	2019 年第 12 刷
七年級	2005 年	2015 年第 8 刷
八年級	2006 年	2018 年第 12 刷
九年級	2007 年	2018 年第 10 刷

表 3-2 德國教科書六至九年級之機率課程單元名稱

年級	單元名稱	教材內容
六年級	6-2-1 隨機試驗	隨機試驗、相對次數與絕對次數
	6-2-2 記錄並評估數據	列聯表
	6-2-3 相對次數和機率	大數法則
八年級	8-5-1 結果集	樣本空間、集合
	8-5-2 活動	
	8-5-3 相對次數與機率	機率性質
	8-5-4 拉普拉斯試驗	古典機率
	8-5-5 拉普拉斯試驗中事件的機率	餘事件
	8-5-6 數字和機率	乘法原理
九年級	9-5-1 多階段隨機試驗	多階段隨機試驗
	9-5-2 機率的乘積（第一條路徑規則）	獨立性
	9-5-3 機率之和（第二路徑規則）	互斥和事件
	9-5-4 模擬隨機試驗	模擬隨機試驗

第二節 建立研究分析流程

本研究邀請兩位評分者和一位專家，兩位評分者皆擁有多年的數學教育背景，其一為博士生，另一為碩士生。而專家除了擁有專業的數學教育知識背景外，更長期貢獻於數學教育研究領域上，即為研究者的指導教授單維彰教授。

研究者確定研究對象為德國機率教科書之後，開始整理研究樣本資料。首先將德國教科書六至九年級之機率課程單元掃描成電子檔，再選定量化分析內容範圍以及分析的單位，並將量化分析範圍內容分割成分析單位後，進行分析單位的編碼，並整理成檔案。然後將編碼後的研究樣本，列印給予兩位評分者及一位專家。

本研究德國機率教科書之量化分析採用單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）中的機率學前診測之雙向細目表作為分類方式。而後研究者向評分者逐一解釋細目表中的各項定義，並達成共識後。評分者分別帶走編碼後之研究樣本資料，各自開始進行量化分類（第一次）。

在評分者完成研究樣本資料分類後，提出此雙向細目表對於德國教科書機率題目之疑問。例如以下質疑：

在雙向細目表中，機率概念層次之複合事件所涵蓋的概念是否過於廣泛？

透過專家指導（第一次）的建議和評分者們的討論後，決定修改雙向細目表，將複合事件之餘事件與互斥和事件獨立出來，成為兩種機率概念層次項目。而後考量課程內容的教材安排順序，將其依序列為「單一事件」、「餘事件」、「獨立性」、「互斥和事件」，此時確立了量化分析的雙向細目表中各項定義。

接著，評分者們依據雙向細目表中各項定義，再次進行編碼資料的分類（第二次）。最後評分者們將分類結果再和專家討論（第二次），在此階段確定量化分析研究結果。

再來，本研究德國機率教科書之質性分析方法採用張芬芬（2010）的質性資料分析的五步驟，其步驟分別為文字化、概念化、命題化、圖表化、理論化。在每步驟分析結束後，研究者都將質性分析結果呈現給專家指導（第三次），利用專家效度以確保質性分析方向及內容的完整性。

最後，研究者將德國六至九年級之機率教科書的研究背景、動機、目的、相關文獻、量化分析、質性分析、結果、結論和建議的研究歷程整理之後，並撰寫成論文。研究流程圖如圖 3-1。

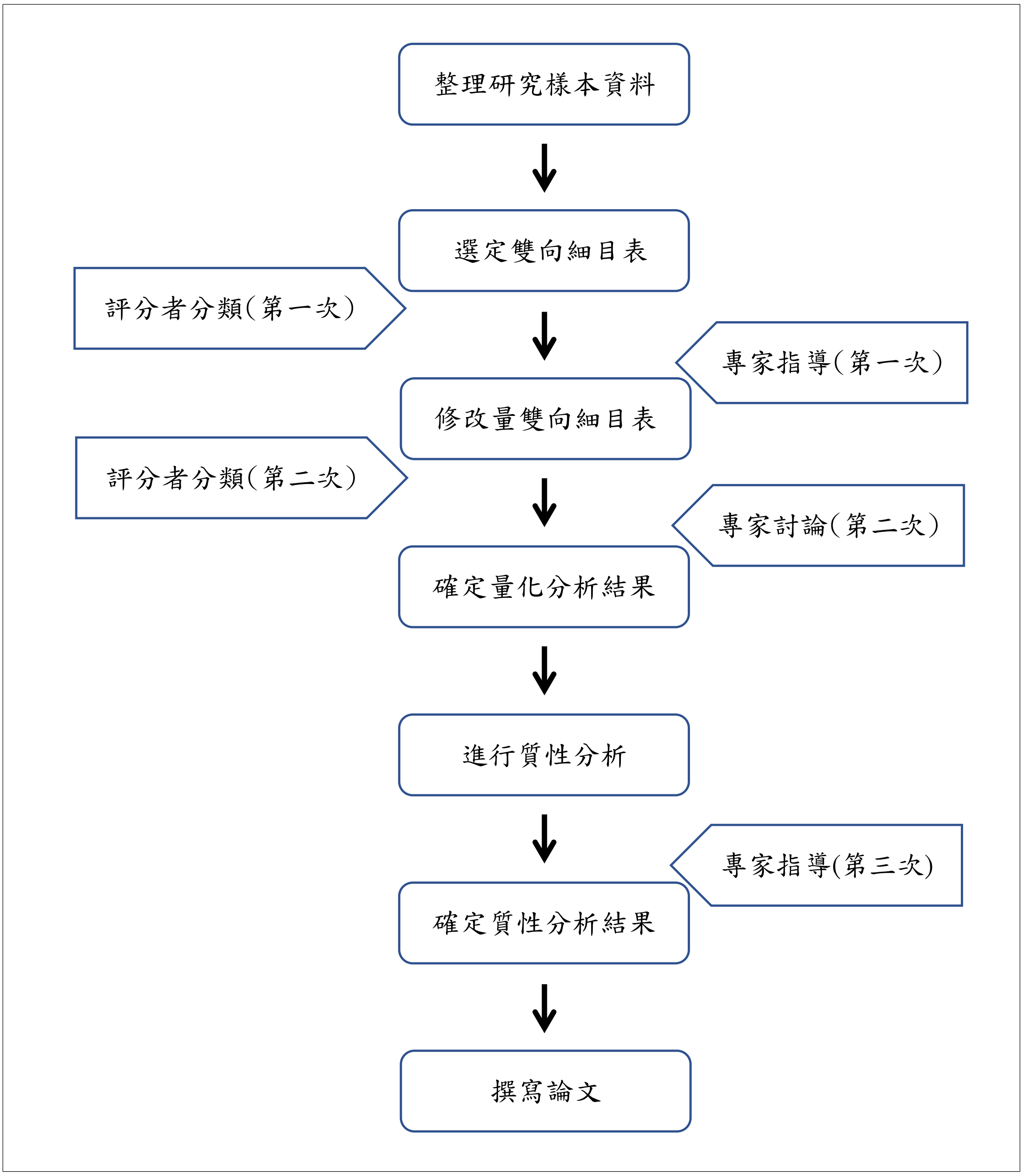


圖 3-1　德國機率教科書之研究流程圖

第三節 研究工具

本研究針對德國機率教科書進行兩種分析方式，首先是量化分析，其次是質性分析。本節說明量化分析的內容範圍、量化分析的單位、分析單位的編碼方式、使用的雙向細目表、細目表中的各項定義。然後說明質性分析的內容範圍、質性分析的單位、分析單位的編碼方式、質性分析的五步驟之定義、質性分析之具體操作方法。

一、量化分析

首先研究者整理研究樣本資料，整理流程為確定量化分析範圍、分析單位、單位編碼方式。再來選定量化分析的雙向細目表，並與評分者們共同討論細目表中的各項定義最後透過評分者們討論和專家指導，確立其量化分析結果，進而完成量化分析歷程。

（一）量化分析範圍及單位

本研究分析內容範圍為德國教科書六至九年級之機率課程，且在教材脈絡下課堂中教學例題及學生演練題，但是不包括教科書對於課後的練習題目任務（Aufgaben）、專題（Projekt）、延伸閱讀文本（Lesetext）、主題式延伸任務（Thema）和網路延伸任務（Vernetzende Aufgaben）。

本研究以「題」作為德國教科書之機率分析單位，定義如下。

（1）若題目敘述僅包含一個問題，計為一題。如圖 3-2 所示。

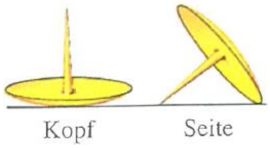
Was könnte von Interesse sein, wenn das in der Figur abgebildete Glücksrad gedreht wird?

當轉動「命運轉盤」之後，可能會有什麼樣的結果發生呢？

圖 3-2 量化分析單位之例題

此題為八年級第五單元第一節的例題，此題的教學目標是樣本空間的初步概念介紹。針對這題的樣本空間，若以「數字」作為事件結果的切入基準背景，則此樣本空間$\Omega=\{1;2;3;\cdots 11;12\}$；若以「顏色」作為事件結果的切入基準背景，則此樣本空間為$\Omega=\{紅色;黃色;綠色\}$。此題僅包含一個問題，計為一題。

（2）若有一主題之情境問題，而衍生出一些子問題，其針對每一子問題分別各計為一題。如圖 3-3 所示。



Wirft man einen Reißnagel, so kann er entweder auf „Kopf" oder auf „Seite" fallen.
a) Wie oft wird wohl bei 20 Würfen das Ergebnis „Kopf" auftreten?
b) Führe das Experiment 20-mal aus und vergleiche mit deiner Vermutung.

投擲一個圖釘，它會出現的結果為尖端朝上或尖端朝下。
a）請預測在 20 次試驗中會有幾次出現尖端朝上的結果。
b）投擲 20 次試驗後，將結果與上題你的猜測進行比較。

圖 3-3 定義分析單位之例題 1

此題組主要教學目標是探討投擲圖釘後，圖釘尖端朝上的機率結果為何？由此衍生出兩個子題，引導學生利用兩種不同的方法去得知尖端朝上的機率。此題組中兩小題分別各為一題，共計為兩題。

（3）若對於報章雜誌所衍生出的子問題，則每篇文章分別各計為一題。如圖 3-4 所示。

閱讀下方剪報，找出錯誤在哪裡？你會在哪裡產生錯誤的印象？

Die Preise für PC's sind in dieser Zeit um bis zu 100% gefallen und sinken noch weiter.

Jede dritte Ehe in Deutschland wird geschieden. In Großstädten sind es sogar schon 30%.

Die Steigung der Kletterroute betrug durchschnittlich etwa 95%. Das Gelände war damit fast senkrecht.

Friedrich Müller, der vor 4 Jahren 10% der Wählerstimmen erhalten hatte, kam in diesem Jahr auf 15%. Er konnte damit seinen Anteil um 5% steigern.

左上：在這個期間，個人電腦的價格下跌了 100%，甚至更進一步下跌。
左下：攀登路線的平均坡度約為 95%。地形幾乎是垂直的。
右上：在德國，每三對夫妻中有一對是離婚的。在大城市裡，這一比例已經高達 30%。
右下：在 4 年前 Friedrich Müller 獲得了 10%的選票，今年獲得了 15%的選票，他的選票提高了 5%。

圖 3-4 定義分析單位之例題 2

此題意主要教學目標為利用生活中報章雜誌的數學語言來了解各種有關比例的數學專有名詞，而在此題組中有四篇不同報導的陳述，因此各計為一題，共四題。

（二）量化分析的單位編碼方式

本研究以上述「題」之定義作為量化分析單位，而後再將每一單位進行編碼。編碼方式細分為三種模式；其一為若題型無子問題，則其定義為「年級-單元-節-題序號」，例如圖 3-2 編碼為「8-5-1-1」，意為此題為八年級第五單元第一節的第一道題目；其二為若題型中有衍生出某些子問題，則其定義為「年級-單元-節-題序號（子問題名稱）」，例如圖 3-3 中將兩題依序編碼為「6-2-1-1（a）」和「6-2-1-1（b）」意為此兩題為六年級第二單元第一節第一道題目的第 a 小題和第 b 小題；其三為若題型中對於報章雜誌所衍生出的子問題，則其定義為「年級-單元-節-題序號（文章位置）」，例如：圖 3-4 中將其四題編碼為「6-8-5-1 左上」、「6-8-5-1 左下」、「6-8-5-1 右上」、「6-8-5-1 右下」意為此題為六年級第八單元第五節第一道題目的左上角報導內容，依此類推。

（三）量化分析的雙向細目表

本研究利用單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）中的機率學前診測之雙向細目表作為量化分析的研究工具，並微調其細目表中的細項定義，以利本研究對象的量化分析。以下呈現其雙向細目表及各細項定義說明。

1. 雙向細目表

量化分析雙向細目表主要分為兩個向度，其一橫向為機率概念層次向度；另一縱向為機率類型向度，而獨立於兩向度之引導性例題分類至「前機率」類型，如表 3-3 所示。

表 3-3 量化分析的雙向細目表

機率概念層次 機率類型	單一事件	餘事件	獨立性	互斥和事件
主觀機率				
古典機率				
頻率機率				
前機率				

2. 雙向細目表定義

在量化分析的雙向細目表的「機率類型」向度中，有三個細項分別為「主觀機率」、「古典機率」、「頻率機率」，在「機率概念層次」向度中，有四個細項分別為「單一事件」、「餘事件」、「獨立性」、「互斥和事件」，最後獨立於「機率類型」和「機率概念層次」兩向度的「前機率」分類項目。

（1）前機率

指情境問題不需機率概念，即可解題。如圖 3-5 所示。

6-2-1-2

2

Markus würfelt 20-mal mit einem normalen Spielwürfel und notiert vier „Sechser".
Lena erzielt bei 30 Würfen fünfmal eine „Sechs". Markus behauptet, bei ihm sei die „Sechs" häufiger gefallen.
Hat er Recht mit seiner Behauptung?

Markus 投擲公正的骰子 20 次，出現四次「6 點」；而 Lena 在 30 次試驗中，得到五次「6 點」。Markus 聲稱他擲到「6 點」更頻繁。
請問他的主張是否正確？

圖 3-5 「前機率」之例題

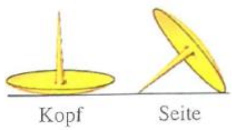
此題的解決方式可先投擲總次數換成同一基準值，再去比較兩人擲到「6 點」的次數為何，即可得知兩人擲到「6 點」的頻率。此題僅需有相對次數的概念即可解題，因此將此題視為「前機率」的機率題目類型。

（2）機率類型

A. 主觀機率

指發生一個事件的機率由某人決定，而某人可以依據有效的證據對於個別事件設計的機率，或者個人根據過去的經驗去進行相信程度上的猜測。如圖 3-6 所示。

6-2-1-1（a）



Wirft man einen Reißnagel, so kann er entweder auf „Kopf“ oder auf „Seite“ fallen.
a) Wie oft wird wohl bei 20 Würfen das Ergebnis „Kopf“ auftreten?

投擲一個圖釘，它會出現的結果為尖端朝上或尖端朝下。
a）請預測在 20 次試驗中會有幾次出現尖端朝上的結果。

圖 3-6 「主觀機率」之例題

此題因為要學生自行對於投擲圖釘後，預測尖端朝上的次數，而先前卻無投擲圖釘的任何資訊，因此這個答案取決於學生過去的個人生活經驗去進行相信程度上的直覺估測，因此將此題視為「主觀機率」的機率類型。

B. 古典機率

假設所能發生的隨機事件集合 S 是有限互斥的，且其中每個樣本點發生的可能性相等，則事件 A 發生的機率為$P(A)=\frac{|A|}{|S|}$，$|A|$代表事件 A 的個數，$|S|$代表隨機事件 S 的個數，而在德國教科書中稱為「拉普拉斯試驗」。如圖 3-7 所示。

8-5-5-2

Eine 8. Klasse besteht aus 29 Schülern, darunter sind 16 Jungen. Zur Verlosung einer Freikarte für das Schultheater schreibt jeder Schüler seinen Namen auf eine Karte. Die Karten werden gut gemischt und anschließend wird eine Karte gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht auf der gezogenen Karte ein Mädchenname?

一個八年級的班級，由 29 名學生組成，其中男生佔 16 名。為了給學校劇院畫一張免費票的設計圖，決定先將每個學生的名字寫在各別的卡片上，再將卡片洗好隨機抽取一張卡片，而卡片上的名字作為設計者。請問卡片上的名字是女生的機率有多少？

圖 3-7 「古典機率」之例題

此問題的樣本空間為全班 29 位學生，而因每位學生被抽到當設計者的機會均等，再加上全班人數扣掉男生人數為女生人數 13 人，因此抽到女生當設計者的機率為

$P(\text{卡片上的名字是女生})=\frac{13}{29}$，所以將此題視為「古典機率」的機率類型。

C. 頻率機率

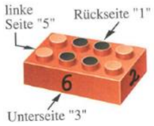
利用大量地、重覆地隨機試驗，並根據統計觀察數據的趨勢去估計隨機事件可能發生結果的相對次數。如圖 3-8 所示。

6-2-3-3

Beispiel
Beim Werfen eines Lego-Achters ergab sich nach 1300 Würfen folgende Tabelle.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	151	17	585	403	15	129
relative Häufigkeit	$\frac{151}{1300} = 11{,}6\,\%$	$\frac{17}{1300} = 1{,}3\,\%$	$\frac{585}{1300} = 45{,}0\,\%$	$\frac{403}{1300} = 31{,}0\,\%$	$\frac{15}{1300} = 1{,}2\,\%$	$\frac{129}{1300} = 9{,}9\,\%$

Schätze mit ihrer Hilfe die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augenzahlen.
Wie gut ist die Schätzung?



例題
投擲「凸八點」樂高積木 1300 次後，產生了下表。

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	151	17	585	403	15	129
relative Häufigkeit	$\frac{151}{1300} = 11{,}6\,\%$	$\frac{17}{1300} = 1{,}3\,\%$	$\frac{585}{1300} = 45{,}0\,\%$	$\frac{403}{1300} = 31{,}0\,\%$	$\frac{15}{1300} = 1{,}2\,\%$	$\frac{129}{1300} = 9{,}9\,\%$

請問你該如何用表去估計每面數字被擲到的機率？
而這樣的估計有多好？

圖 3-8 「頻率機率」之例題

此問題透過紀錄和觀察 1300 次的大量隨機試驗結果，去估計每面數字被擲到的機率，而我們透過大數法則知道當試驗次數越多，試驗結果將越逼近實際機率。因此此題視為「頻率機率」的機率類型。

（3）機率概念層次

A. 單一事件

在情境問題中僅涉及一個事件的隨機試驗。如圖 3-9 所示。

8-5-6-1

Bei dem Fahrradschloss kann man vierstellige Zahlen aus den Ziffern 1 bis 9 bilden.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die „richtige“ Zahl zufällig einzustellen?

您可以從數字 1 到 9 中，選擇四個數字作為自行車的號碼鎖。
b）請問隨機轉到「正確」數字的機率是多少？

圖 3-9 「單一事件」之例題

此問題的自行車鎖為四位數密碼，每一位數有可能的數字為 1 號到 9 號，而樣本空間個數為9^4個。再來，因為每一組數字被轉到的機率相同，但只有一組四位數為正確的密碼，所以$P(\text{轉到「正確」數字}) = \frac{1}{6561}$。此題僅涉及「轉到正確數字」的一個隨機事件，因此將此題視為「單一事件」的機率概念層次。

B. 餘事件

在教材脈絡下，課程目標期望利用在樣本空間為 S 下，不包含事件 A 的機率為$P(A^c) = 1 - P$（A）的解題策略。如圖 3-10 所示。

8-5-5-3

In einer Lostrommel befinden sich Lose mit den Nummern 1000 bis 9999. Losnummern mit drei Nullen bedeuten „Hauptgewinn“; endet die Losnummer auf 3 oder 7, so gibt es einen Trostpreis. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Ereignisse:
c) Ziehen einer Niete.

彩票的數字從 1000 到 9999 中，如果號碼中有三個零，表示獲得「大獎」；如果最後一個號碼為 3 或 7，則表示獲得「安慰獎」；其餘沒得獎。請問下列事件發生的機率：
c）沒抽中獎品

圖 3-10 「餘事件」之例題

此問題分別有三個子問題為 8-5-5-3（a）抽中「大獎」、8-5-5-3（b）抽中「安慰獎」和 8-5-5-3（c）沒抽中獎品。在教科書的脈絡中，此（c）子問題期望學生能藉由前兩小題的結果，並利用餘事件的概念去解題為

$$P(\text{沒抽中獎品}) = 1 - P(\text{抽中「大獎」}) - P(\text{抽中「安慰獎」})$$

而非逐一列舉的方式解決。因此將此題視為餘事件的機率概念層次。

C. 獨立性

當隨機事件間相互不影響時，則同時發生的機率為

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

本研究中，在此定義下建構出適合德國機率教科書之獨立性規準：若題型之樹狀圖同時滿足下列兩性質時，我們可將此題歸類至獨立性：一、樹狀圖為兩層（含）以上；二、樹狀圖為非對稱隨機事件。如圖 3-11 所示。

9-5-2-6

Beim Basketball trifft Mike mit 80 % und Jan mit 60 % Wahrscheinlichkeit.
Erst wirft Mike und dann Jan. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) beide treffen

Mike 的籃球命中率是 80%，Jan 的籃球命中率是 60%。
現在 Mike 先投一球接著 Jan 再投一球，則下列的機率為多少？
a） 當兩個人都投進

圖 3-11 「獨立性」之例題

此題的前提假設為 Mike 投球和 Jan 投球為互相不影響的兩隨機事件，因此可藉由獨立性的基本定義概念解題，所以我們知道同時發生投進的機率為

$$P(\text{當兩個人都投進}) = 0.8 \times 0.6 = 0.48。$$

此題樹狀圖，如圖 3-12。

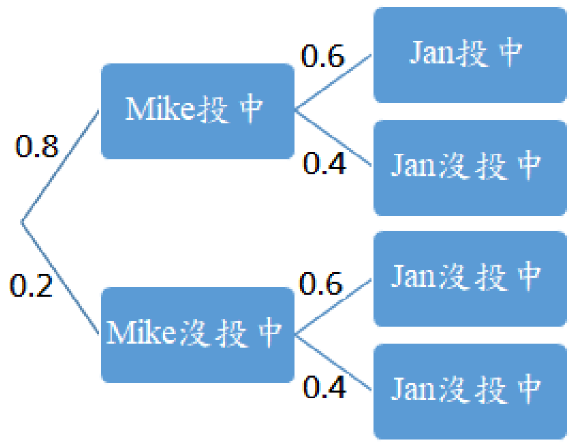


圖 3-12 德國教科書 9-5-2-6 題之樹狀圖

從圖 3-12 得知樹狀圖滿足「獨立性」的條件為兩層（含）以上且為非對稱隨機事

件，因此將此題目視為「獨立性」的機率概念層次。

D. 互斥和事件

在樣本空間集合 S 下，其中子事件為A_i，且須滿足$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset$，則代表子事件間為互斥事件，因此發生事件 B 的機率為

$\mathrm{P}(A_x \cup A_y \cup \cdots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_x) + \mathrm{P}(A_y) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)$，其中$A_x$、$A_y$、⋯、$A_n$為符合發生事件 B 之子集

在本研究中，在此定義之下建構出適合德國機率教科書之互斥和事件規準：若題型之樹狀圖同時滿足下列三個性質時，可將此題歸類至「互斥和事件」：一、樹狀圖為兩層（含）以上；二、樹狀圖為非對稱隨機事件；三、某事件 B 機率為符合事件 B 條件之樹枝末端數值和，如圖 3-13 所示。

9-5-3-2

Beispiel 1
In einem Korb liegen 6 gekochte und 4 rohe Eier. Christine nimmt 2 Eier heraus.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass mindestens ein rohes Ei dabei ist?

籃子裡有 6 個熟雞蛋和 4 個生雞蛋。
事件 A 為克里斯汀拿出 2 個雞蛋，則至少選到一個為生雞蛋的機率是多少？

圖 3-13 「互斥和事件」之例題

首先先將此問題的樹狀圖繪製如圖 3-14，g 代表選到熟雞蛋，r代表選到生雞蛋：

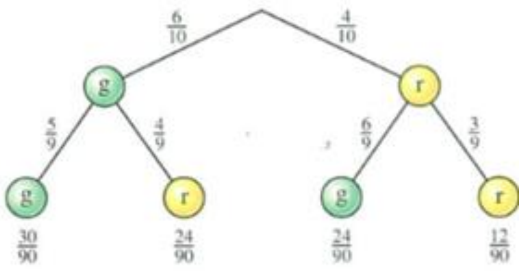


圖 3-14 德國教科書 9-5-3-2 題之樹狀圖

再來列出符合事件 A 至少有一個 r 的樣本空間，其意指為至少選到一個生雞蛋的樣本空間為$\{gr；rg；rr\}$，而後透過如圖 3-14 樹狀圖可直接計算其機率值為

$$P(A) = P(\{gr；rg；rr\}) = \frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$$

此題型因樹狀圖滿足兩層（含）以上、非對稱隨機事件、至少選到一個為生雞蛋的機率為符合事件條件之樹枝末端數值和，因此將此類型題目視為「互斥和事件」的機率概念層次。

二、質性分析

本節先定義質性分析的範圍、分析的單位、分析單位編碼的方式，而後介紹張芬芬（2010）指出的質性資料分析之五個步驟。研究者將按此五步驟逐步分析，並與專家討論，以確立德國機率教科書之質性分析結果，進而完成質性分析歷程。

（一）質性分析範圍

本研究的質性分析內容範圍為德國教科書六至九年級的機率教材。除了在教材脈絡下課堂中的教師教學例題、學生自行操作演練題（和量化分析範圍相同）之外，再加上題與題之間相互連結的圖文內容，即為質性分析範圍。

（二）質性分析單位和編碼方式

本研究質性分析單位分為兩種：其一為量化分析單位「題」之定義；其二為在教材課程安排下,「題」與「題」之間的銜接內容。

質性分析單位的編碼分為兩種方式：其一，若為「題」之定義，則利用量化分析單位「題」之編碼方式作為質性分析編碼，可參照第三章第三節研究工具中，一、量化分析之（二）量化分析的編碼方式；其二，若為「題」與「題」之間的教材內容，則其定義為「年級-單元-節-題序號-段-段序號」其中「年級」、「單元」、「節」、「題序號」、「段序號」皆為變數，而為了區分分析單位為「題」或教材脈絡課程內容，以「段」固定字作為區分。例如圖 3-15 中，將 6-2-1-3 和 6-2-1-4 之間的教材脈絡課程內容編碼為「6-2-1-3-段-1」意為此段落位於六年級第二單元第一節第三道題目後的第一段圖文內容，依此類推。

6-2-1-3

Beispiel 1

Welche Vorgänge können als Zufallsexperimente angesehen werden? Begründe deine Antwort.

a) Eine Münze wird geworfen.

b) Eine Taschenlampe wird ausgeknipst.

c) Eine Kugel wird mit geschlossenen Augen aus einer Urne mit roten, gelben und blauen Kugeln gezogen.

Lösung:

a) Es handelt sich um ein Zufallsexperiment, weil man zwar weiß, dass entweder „Wappen" oder „Zahl" erscheinen wird, man aber beim einzelnen Wurf das Ergebnis nicht vorhersagen kann.

b) Es handelt sich um kein Zufallsexperiment, weil als Ergebnis das Licht erlöschen wird.

c) Es handelt sich um ein Zufallsexperiment, weil man weiß, dass die gezogene Kugel eine der Farben rot, gelb oder blau haben wird, aber nicht vorhersagen kann, welche der drei Farben die gezogene Kugel haben wird.

6-2-1-3-段-1

Gefäße, aus denen man zufällig z. B. Kugeln zieht, nennt man in der Mathematik Urnen. Als Urnen kann man Kisten, Tüten, Beutel, Socken, Schüsseln und vieles andere benutzen.

6-2-1-4

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Leonie	卌 I	卌 II	卌 I	卌 II	卌	卌 IIII
Marcel	卌 IIII	卌 I	卌 IIII	卌 III	卌 卌	卌 III

Beispiel 2

Leonie und Marcel haben gewürfelt. Die Strichliste hält die Ergebnisse fest. Bei wem ist der Anteil der gewürfelten Vierer größer?

圖 3-15 質性分析編碼方式之例題

（三）質性資料分析的步驟

本研究採用張芬芬（2010）指出的質性資料分析五階段作為質性分析工具，並利用五步驟「文字化」、「概念化」、「命題化」、「圖表化」、「理論化」，以達到將研究資料轉型成質性分析結果的目標。以下呈現機率質性分析五步驟歷程，並說明其各細項之定義。

1. 質性分析步驟歷程

圖 3-16 繪製對於德國機率教科書質性分析五步驟之流程圖，其中由左至右依序代表質性分析之步驟順序。

圖 3-16 質性分析步驟之流程圖

2. 質性分析步驟之各階段定義和具體研究流程

本節以下說明質性分析五步驟：「文字化」、「概念化」、「命題化」、「圖表化」、「理論化」的各階段定義解釋，以及如何利用上述五步驟具體實施在本研究德國機率教科書之質性分析方法。

（1）文字化定義與具體研究流程

「文字化」即為對研究樣本的第一筆資料，以蒐集和整理原始資料成為文字為主。例如觀察田野札記、訪談紀錄、文件摘要等，對具體世界做「相對真實地」或「逼近真實地」的觀察，並主要利用文字方式描繪。

此階段研究者藉由翻譯德國教科書六至九年級機率課程內容，作為第一手資料。為了逼近真實地客觀蒐集整理原始資料，研究者採取段落式翻譯：首先從頭第一段落的德文輸入至 Google 翻譯至中文，然後再次複製此段落德文輸入至微軟翻譯至中文，以確保理解原文文意。若兩者翻譯結果發生不同的解釋或產生難以理解的語句時，研究者猜測有兩種原因：其一，因翻譯器直譯，產生一詞多義的問題；其二，因翻譯器並無考量德國文化背景，導致理解文意的問題。因此研究者解決方法為三：其一，先藉由將德文翻譯至英文，再從中理解文意；其二，研究專有名詞的德國文化背景意義，以利重新理解其中文意，例如研究者先理解德國十字傳統遊戲規則後，進而了解教科書編排機率情境問題的含意；其三，若以上方法皆不可行時，研究者將此段落拿給熟悉德文的研究夥伴，以尋求幫助。最後整理得到「相對真實地」研究樣本的第一筆資

料。

（2）概念化定義與具體研究流程

此一步驟進入資料詮釋的階段，即為將某段文字資料賦予某個「概念」，使資料獲得其意義，相較於前一步驟產生的文字化資料並無概念上的解釋，而研究者藉由將其合適的概念貼在一段文字上，而此文字資料即獲得了本質上變化的意義。

在此階段，研究者先將文字化資料編碼，並研讀編碼化資料，將其教材脈絡細緻的分析解釋及賦予研究意義概念，而後整理成表格，以利找出其中關鍵亮點和概念間的關連，進而形成德國機率教科書教材脈絡之合適的分類系統。

（3）命題化定義與具體研究流程

「命題化」即為找到整個研究樣本中的主旨與趨勢，並以命題形式呈現其研究假設，而此為暫時的假設，需藉由下一步驟「圖表化」進行更進一步的驗證。

此階段研究者將概念化資料結果進行反思及探究，並將其中關係的貓膩經由和專家討論後，指出其教材脈絡之主旨與趨勢，進而形成命題。

（4）圖表化定義與具體研究流程

「圖表化」為將「概念化」資料經整理後，讓研究者仔細比對，並證實或找出「命題化」之漏洞、隱藏類型、關係、主旨或趨勢等問題，進而檢測命題的有效性，以利調整原命題或建立新命題。

此階段研究者將其「概念化」資料逐一繪製成「圖表化」呈現，以利清楚分析命題化之主旨，並驗證其命題是否成立，而後有效繼續尋找「概念化」之資料遺漏和隱藏關係，並來回反思「命題化」和「圖表化」的吻合性。

（5）理論化定義與具體研究流程

將前四步驟所產生的質性分析結果整合起來，並利用一套系統化解釋其中含意，此

過程稱為「理論化」。

研究者藉由至今已建構出某一完整之理論系統，去解釋前四步驟之研究分析結果。在此除了驗證現有理論系統之完整性之外，也說明本研究之質性分析結果具有一定程度的廣度，以及本研究對象具有一定程度的豐富度。

第四節 資料分析

本研究為考驗研究工具的信度，進行資料分析。在量化分析中，本研究使用雙向細目表，並以兩位評分者和研究者，共三人一同參與分類。而最終的量化分析結果以及質性分析結果，研究者皆和專家討論以確立研究分析結果。

一、信度

本研究在選定量化分析的雙向細目表後，進行評分者們分類（第一次）後，採取評分者信度的檢驗方式作為本研究之信度參考。而後修訂雙向細目表後，再次進行評分者分類（第二次）並和專家一起（共四人）逐一討論每題的機率題型分類，以互相提出自己的觀點，並時常審核定義的完整性，進而形成完整的量化雙向細目表及分析結果，因此並無收集評分者分類（第二次）的各自資料。

（一）信度計算方式

本研究採取楊德清、鄭婷芸（2015）臺灣、美國與新加坡國中階段幾何教材內容之檢定方式，其流程步驟如下。先計算評分者間**相互同意值** P_i：

$$\mathrm{P}_i = \frac{2M}{N_1+N_2}$$

其中 i 代表某兩位評分者比較編號，M 代表 2 人同意的項目數，N_1和N_2代表應有的同意項數。

而後，計算出評分者間**平均相互同意值 P**

$$P=\frac{\sum_{i=1}^{N}P_i}{N}$$ （N 代表相互比較的次數）

最後，得知評分者分類**信度 R** 之數值：

$$R=\frac{nP}{1+[(n-1)P]}$$ （n 代表評定員人數）

因為 n 位評分者，每兩位就要比較一次，共 N 次，所以 $N=\frac{n\times(n-1)}{2}$。

（二）信度計算結果

本研究根據前述信度計算步驟，依序得知信度相關結果。首先，表 3-4 為量化分析的雙向細目表中，機率類型向度的評分者間相互同意值。評分者共有三人，分別命名為 A、B、C，所以相互同意值P_i有三種：A 與 B 之間相互同意值、A 與 C 之間相互同意值、B 與 C 之間相互同意值。表 3-4 呈現評分者間相互同意值P（以四捨五入方式呈現二位小數）。

表 3-4 機率類型之評分者間相互同意值

評分者	A	B
B	0.69	
C	0.80	0.80

透過表 3-4 中評分者間各個相互同意值P，可計算出評分者間平均相互同意值P

$$P=\frac{0.69+0.8+0.8}{3}=\frac{2.29}{3}\approx 0.76$$

最後，利用評分者間平均相互同意值P，得知機率類型之信度 R

$$R=\frac{3\times 0.76}{1+(2\times 0.76)}\approx 0.91$$

從此結果中得知此向度分類達到一定程度的一致性和可信性。

在另一機率概念層次之向度中，重複上述信度計算步驟，得到表 3-5 之評分者間相互同意值P（以四捨五入方式呈現至二位小數）。

表 3-5 機率概念層次之評分者間相互同意值

評分者	A	B
B	0.63	
C	0.61	0.72

而後，透過表 3-5 中評分者間各個相互同意值P，可計算出評分者間平均相互同意值P

$$\mathrm{P} = \frac{0.63 + 0.61 + 0.72}{3} = \frac{1.96}{3} \approx 0.65$$

最後，利用評分者間平均相互同意值P，得知機率概念層次之信度 R

$$\mathrm{R} = \frac{3 \times 0.65}{1 + (2 \times 0.65)} \approx 0.85$$

從此結果中得知此向度分類達到一定程度的一致性。雖然後來修改量化分析的雙向細目表，但透過研究者、評分者們和專家多方討論溝通，並達成定義上的共識才確定量化分析結果，可說明此向度的分類結果可信度將在 0.85 之上。

二、效度

本研究在量化分析時，透過研究者、評分者們以及專家互相討論，並來來回回的修正，最後經由專家效度確立最終量化分析結果。

接者，研究者對於研究樣本進行質性分析，而在每一質性分析步驟完成後，都將研究結果呈現給專家指導，並經由專家效度確保其完整性，確立最終質性分析結果。

第四章 教科書內容分析的結果

本章分成兩大部分呈現研究分析結果：一、量化分析結果，二、為質性分析結果。而因質性分析結果之「文字化」步驟資料量過於龐大，因此整理至附錄中呈現。其中附錄一是本研究所採用的德國教科書文本，附錄二是臺灣教科書文本。

第一節 量化分析結果

本節修訂單維彰（2018）中的機率學前診測之雙向細目表作為量化分析工具，並經由專家建議和評分者們的討論後，確立量化分析結果。以下分為兩大部分呈現德國機率教科書之量化分析結果：其一引導教材部分，則為歸類至「前機率」類型裡的機率題目；其二機率內容部分，即為在德國機率教科書中將歸類在「量化分析細目表」扣除「前機率」的題目之外的機率題目。最後提及臺灣教科書的量化分析結果，以利了解現今臺灣機率教科書之課程內容發展。

一、引導機率課程概論

本研究發現德國教科書在介紹新概念之前，常利用引導性題型讓學生能從舊有的知識中過渡到機率概念單元，而這些題目並不屬於機率範疇，因此將其整理至「前機率」類型裡，並獨立整理於表 4-1。

表 4-1 機率量化分析細目表之前機率題目

6-2-1-2	6-2-2-1（d）	6-2-2-1（g）	6-8-5-1 左上	6-8-5-1 右下	9-5-2-2
6-2-1-4	6-2-2-1（e）	6-2-2-1（h）	6-8-5-1 左下	8-5-3-1	7-6-1-4
6-2-2-1（b）	6-2-2-1（f）	6-2-2-2	6-8-5-1 右上	8-5-3-2	

從表 4-1 得知在德國機率教科書中，「前機率」類型共有 17 題。以下說明這 17 題歸類於「前機率」類型之中的原因。

首先說明 6-2-1-2、6-2-1-4、6-2-2-1、8-5-3-1、8-5-3-2 被歸類為「前機率」類型之緣由。

6-2-1-2

Markus 投擲公正的骰子 20 次，出現四次「6 點」；而 Lena 在 30 次試驗中，得到五次「6 點」。Markus 聲稱他擲到「6 點」更頻繁。

請問他的主張是否正確？

此題的解決方式可先計算 Markus 擲到「6 點」的相對次數為$\frac{4}{20}=20\%$、Lena 擲到「6 點」的相對次數為$\frac{5}{30}\approx 17\%$，資料顯示 Markus 聲稱是正確的。而此題僅需有相對次數概念即可解題，因此將此題視為「前機率」的類型。

6-2-1-4

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Leonie	卌 I	卌 II	卌 I	卌 II	卌	卌 IIII
Marcel	卌 IIII	卌 I	卌 IIII	卌 III	卌 卌	卌 III

Leonie 和 Marcel 投擲一個公正的骰子，比較其結果。

誰擲出「4」的比例較大？

從此題表格中，得知 Leonie 在投擲 40 次骰子中擲出「4」的絕對次數為 7 次，因此相對次數為$\frac{7}{40}=17.5\%$；而 Marcel 在投擲 50 次骰子中擲出「4」的絕對次數為 8 次，因此相對次數為$\frac{8}{50}=16\%$，透過比較兩人投擲到「4 點」的相對次數中，得知 Leonie 擲出「4」的比例較大。此題僅需有相對次數的概念即可解題，所以將此題視為「前機率」的類型。

6-2-2-1

Urliste zu einem Fragebogen der Klasse 6a

Vorname	J/M	Lieblingsfarbe	Lieblingstier	Lieblingssport
Karin	M	lila	Hund	Schwimmen
Stefan	J	grün	Hund	Fußball
Mike	J	blau	Katze	Fußball
Aishe	M	gelb	Pferd	Inlineskating
Ines	M	rot	Katze	Schwimmen
Bernd	J	grün	Hund	Tennis
Alex	J	blau	Katze	Basketball
Anja	M	grün	Hund	Volleyball
Patrick	J	blau	Hund	Schwimmen
Ali	J	blau	Fische	Volleyball
Gabi	M	pink	Pferd	Reiten
Natascha	M	gelb	Schlange	Basketball
Sascha	J	orange	Vogel	Basketball
Nora	M	grün	Katze	Schwimmen
Anke	M	rot	Hund	Fußball
Robert	J	blau	Hund	Basketball
Wiebke	M	rot	Katze	Inlineskating
Max	J	rot	Katze	Inlineskating
Sebastian	J	lila	Hund	Schwimmen
Lisa	M	rot	Pferd	Reiten
Kosta	J	blau	Bär	Basketball
Florian	J	grün	Fische	Fußball
Ulrike	M	grün	Pferd	Reiten
Peter	J	blau	Hund	Fußball
Lukas	J	grün	Katze	Tennis
Simon	J	rot	Hund	Fußball
Ahmed	J	blau	Katze	Schwimmen
Stefanie	M	rot	Katze	Inlineskating
Markus	J	rot	Vogel	Tennis
Andreas	J	blau	Pferd	Fußball

在你的班上收集你感興趣的問題，並對以下問題進行評估。

首先你得先計畫如何蒐集資料和分配工作。

如果你不想自己做調查，你可以用已調查好的結果 6a 表做為問題評估。

b）用男孩和女孩答案的絕對和相對次數繪製表格。

d）班上最受歡迎的動物是哪種？

e）班上有明顯喜歡的顏色嗎？

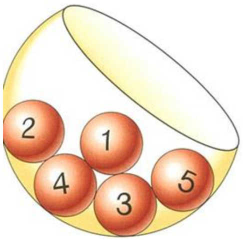
f）男生比女生更喜歡綠色，這是真的嗎？

g）男生比女生更喜歡游泳，這是真的嗎？

h）女孩是否有典型的運動？

在此題表格中，得知班上同學的名字、性別、喜歡的顏色、動物、運動，因此利用統計全班喜歡動物、顏色的比例，進而回答 6-2-2-1（d）、6-2-2-1（e），接著利用性別重新整理此原資料中的喜歡顏色、運動項目的比例，進而回答 6-2-2-1（d）、6-2-2-1（e）。此題組皆僅需有相對次數的概念即可解題，因此將此題組視為「前機率」的引導性類型。

8-5-3-1



Mandy 從一個甕中將球抽出 50 次，每次抽完後放回甕中。
表顯示了 Mandy 抽球次數的結果。

球號	1	2	3	4	5
次數	9	12	11	10	8

請問偶數球被抽中的比例是多少？

此題從表格中，首先將偶數球被抽中的絕對次數求出$12+10=22$，而後再計算相對次數為$\frac{22}{50}=0.44$，因此得知偶數球被抽中的百分比為44%。此題僅需相對次數概念即可解題，因此將視為「前機率」的類型。

8-5-3-2
表顯示投擲骰子 60 次的結果。

5 2 5 3 1 6 3 5 6 3　1 5 4 6 6 2 3 2 5 3　3 1 3 6 1 5 3 6 1 5
4 4 3 6 1 5 3 1 2 1　6 1 5 4 5 2 5 2 2 3　4 4 3 6 2 1 5 4 2 6

請問投擲到「質數」的絕對次數和相對次數為何？

從已知數列中，首先求出「質數」的絕對次數為 33 個，而後再計算其相對次數為$\frac{33}{60}=0.55$。此題教學目標只需相對次數概念，所以將此題視為「前機率」類型。

從上述解題策略中，得知 6-2-1-2、6-2-1-4、6-2-2-1、8-5-3-1、8-5-3-2 皆因只涵蓋相對次數概念，因此歸類至「前機率」類型。而藉此作為從相對次數概念到頻率機率定義及計算方式之引導教學演練題目。

以下依序解釋說明 6-2-2-2、6-8-5-1、7-6-1-4、9-5-2-2 作為「前機率」類型之原因。

6-2-2-2
調查班上同學的居住地點後，有以下資訊：
班上來自外地的有 30%，男孩 60%，來自外地的女孩 10%。
在這個班級裡，本地女孩的比例是多少？

透過對此題的敘述，進行理解及推論後，可以繪製成表 4-2。

表 4-2 德國教科書 6-2-2-2 題意

	男孩	女孩	小計
外地	20%	10%	30%
當地	40%	30%	70%
小計	60%	40%	100%

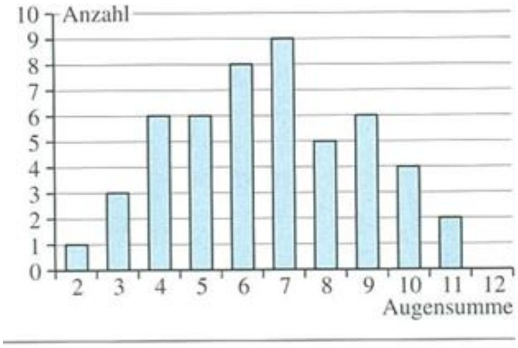
利用表 4-2 的資訊得知在這個班級裡，本地女孩占了 30%。而此題僅需有列聯表概念即可解題，因此將此題視為「前機率」類型，而藉此隱約看出教科書對於列聯表工具的重要性，也可為未來埋下學生對於發生所有隨機事件機率和為一的概念。

6-8-5-1
閱讀下方剪報，找出錯誤在哪裡？你會在哪裡產生錯誤的印象？
左上：在這個期間，個人電腦的價格下跌了 100%，甚至更進一步下跌。
左下：攀登路線的平均坡度約為 95%。地形幾乎是垂直的。
右上：在德國，每三對夫妻中有一對是離婚的。在大城市裡，這一比例已經高達 30%。
右下：在 4 年前 Friedrich Müller 獲得了 10%的選票，今年獲得了 15%的選票，他的選票提高了 5%

此題組之教學目標為針對學生日常中關於相對次數的專有名詞，進行敘述真假的判斷，因此將此題組視為「前機率」類型。而藉此從相對次數概念連接到統計圖表課程教學的引導演練題，也藉此增加了學生對於日後生活中相關專有名詞的使用素養。

7-6-1-4
例 2
投擲兩個骰子 50 次，並記下每次兩骰子的總和。
繪製適合的圖表，並找出最大的相對次數為何？
解決方案：

總和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	1	3	6	6	8	9	5	6	4	2	0



點數 7 的相對次數$\frac{9}{50}=\frac{18}{100}=18\%$

此題學生須預備兩顆骰子，接著自行操作 50 次試驗，並記錄每次試驗後之兩骰子和，雖此題並無正確解答結果，但經大數法則知道學生的答案應聚集在兩骰子和為 7 的隨機事件結果，而教科書也提供了參考解答，在此教科書埋下未來學生對於古典機率概念的建立。

9-5-2-2
在 50 名教職員中，60%是女性，其中 20%教數學。請問這所學校有多少數學女教師？

透過此題敘述得知這間學校裡面有 60%為女性，且其中女性中有 20%為教數學，因此這所學校的數學女教師有$50 \times 0.6 \times 0.2 = 6$人。此題僅需有比例的概念即可解題，所以將此題視為「前機率」的引導性類型。而此問題能引導出樹狀圖中的獨立性技巧，使學生對於接下來獨立性課程概念定義及計算方式有著初步的數學感受。

二、德國教科書之量化分析結果：機率內容

表 4-3 中之橫向項目代表為機率概念層次細項，縱向項目代表為機率類型細項，而表內編碼代表為研究樣本之機率題目編號。

表 4-3 德國教科書之量化分析結果

機率概念層次／機率類型	單一		餘事件	獨立性	互斥和	小計
主觀	6-2-1-1(a) 6-2-3-1					2
古典	6-2-1-3 8-5-1-1 8-5-1-2(a) 8-5-1-2(b) 8-5-1-3 8-5-1-4(a) 8-5-1-4(b) 8-5-2-1(a) 8-5-2-1(b) 8-5-2-2 8-5-4-2 8-5-4-3 8-5-4-4 8-5-5-1 8-5-5-2 8-5-5-3(a) 8-5-5-3(b)	8-5-6-1(a) 8-5-6-1(b) 8-5-6-2(a) 8-5-6-2(b) 8-5-6-2(c) 8-5-6-3(a) 8-5-6-3(b) 8-5-6-4 9-5-1-1(a) 9-5-1-1(b) 9-5-1-1(c) 9-5-1-2(a) 9-5-1-2(b) 9-5-1-3(a) 9-5-1-3(b) 9-5-1-4 9-5-4-1	8-5-5-3(c)	9-5-2-1 9-5-2-3 9-5-2-4 9-5-2-5	9-5-3-1 9-5-3-2 9-5-3-3	42
頻率	6-2-1-1(b) 6-2-3-2(a) 6-2-3-2(b) 6-2-3-3 8-5-3-3	8-5-4-1 9-5-4-2 9-5-4-3 9-5-4-4	9-5-2-6(b)	9-5-2-6(a) 9-5-2-6(c) 9-5-2-6(d)		13
小計	45		2	7	3	57

研究者將表 4-3 數據化後，製成表 4-4，其橫向項目代表為機率概念層次細項，縱向項目代表為機率類型細項，表內數值代表為該類型之總題數，而括號裡之數值代表為該類型之總題數佔總題數之百分比。

表 4-4 德國教科書之量化分析結果數值化

機率類型 \ 機率概念層次	單一	餘事件	獨立性	互斥和	小計
主觀	2	0	0	0	2 (3%)
古典	34	1	4	3	42 (74%)
頻率	9	1	3	0	13 (23%)
小計	45 (79%)	2 (4%)	7 (12%)	3 (5%)	57 (100%)

從表 4-4 得知德國教科書在機率類型中著重古典機率（74%），其次為頻率機率（23%），最後為主觀機率（3%）；而在機率概念層次中著重單一事件（79%），其次為獨立性（12%），而互斥和事件（5%）、餘事件（4%）較少發生。

三、臺灣教科書之量化分析結果

臺灣教科書進入機率單元之後，並無「前機率」類型的機率題目，因此所有機率題目皆分類至雙向細目表中，並整理至表 4-5 中。其中橫向項目代表為機率概念層次細項，縱向項目代表為機率類型細項，而表內編碼代表為研究樣本之機率題目編號。

表 4-5 臺灣教科書之量化分析結果

機率概念 層次 機率類型	單一			餘事件	獨立性	互斥和	小計
主觀							0
古典	3-3-1-1(1) 3-3-1-1(2) 3-3-1-2 3-3-1-3 3-3-1-4 3-3-1-5 3-3-1-6(1) 3-3-1-6(2) 3-3-1-6(3) 3-3-1-7(1) 3-3-1-7(2) 3-3-1-7(3)	3-3-1-8(1) 3-3-1-8(2) 3-3-1-8(3) 3-3-1-9 3-3-1-10(1) 3-3-1-10(2) 3-3-1-10(3) 3-3-1-11(1) 3-3-1-11(2) 3-3-2-1 3-3-2-2 3-3-2-3(1) 3-3-2-3(2)	3-3-2-3(3) 3-3-2-4(1) 3-3-2-4(2) 3-3-2-5(1) 3-3-2-5(2) 3-3-2-5(3) 3-3-2-6(1) 3-3-2-6(2) 3-3-2-6(3) 3-3-2-7(1) 3-3-2-7(2) 3-3-2-8				37
頻率							0
小計	37			0	0	0	37

研究者將表 4-5 經數據化後製成表 4-6，橫向項目代表為機率概念層次細項；縱向項目代表為機率類型細項，表內數值代表為該類型之總題數，而括號裡之數值代表為該類型之總題數佔總題數之百分比，如表 4-6 所示。

表 4-6 臺灣教科書之量化分析結果數值化

機率概念層次 機率類型	單一	餘事件	獨立性	互斥和	小計
主觀	0	0	0	0	0（0%）
古典	37	0	0	0	37（100%）
頻率	0	0	0	0	0（0%）
小計	37（100%）	0（0%）	0（0%）	0（0%）	37 （100%）

從表 4-6 中得知臺灣教科書在機率類型中唯有古典機率（100%），且在機率概念層次中唯有單一事件（100%）。就整體而言，機率教材內容只發展古典單一事件。

總結上述量化分析結果，在機率類型向度中，雖兩國教科書都相當重視古典機率的

發展，但德國較臺灣機率教科書，更發展了主觀機率和頻率機率，使其涉略較廣的機率題型樣貌。而在機率概念層次的向度中，兩國教科書雖都著重於單一事件的發展，但德國較臺灣機率教科書有多觸及餘事件、獨立性事件、互斥和事件的題型，使機率題型情境多樣化。

第二節 質性分析結果

本節說明德國機率教科書之質性分析的研究結果，並利用「理論化」後所得之一套有系統的分析架構，進行臺灣機率教科書之質性分析。

一、德國教科書之質性分析結果

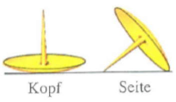
本研究採用張芬芬（2010）指出的質性分析步驟，其階段性步驟為文字化、概念化、命題化、圖表化、理論化，而其間研究者將每步驟的分析結果呈現給專家，並經由專家指導（第三次）的建議，進行增減修訂，以完整本研究之質性分析。

（一）「文字化」之質性分析結果

研究者藉由翻譯德國教科書六至九年級機率課程內容作為第一手資料，以逼近真實且客觀地蒐集及整理原始資料成為文字，但因文字化資料過於龐大，因此將其置於附錄一。以下依教材脈絡順序，從德國六至九年級教科書之機率教材內容作簡單摘要。

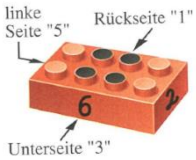
德國六年級教科書分別在第二單元和第八單元中介紹機率的概念。在第二單元中，教科書首先透過 6-2-1-1 投擲圖釘的實例，引導學生建立隨機試驗的數學定義。再來透過隨機試驗去探討每個試驗結果出現的頻繁性，藉此定義了絕對次數（次數）和相對次數（相對次數 $=\frac{\text{絕對次數}}{\text{總數}}$ ），緊接著為了系統化的計算絕對次數和相對次數，介紹了列聯表工具。而後透過 6-2-3-1 投擲凸八點的樂高積木發現我們無法預測非對稱隨機事件的頻繁性，因此大數法則是解決此問題的方法，也是所有隨機試驗的建立基礎。

6-2-1-1



投擲一個圖釘，它會出現的結果為尖端朝上或尖端朝下。
a）請預測在 20 次試驗中會有幾次出現尖端朝上的結果。
b）投擲 20 次試驗後，將結果與上題你的猜測進行比較。

6-2-3-1



不要使用公正的骰子投擲，拿一個「凸八點」的樂高積木，如左圖所示。每面和對面的數字和為七。
請估計投擲「凸八點」的樂高積木時，每面出現的相對次數（百分比）為何？

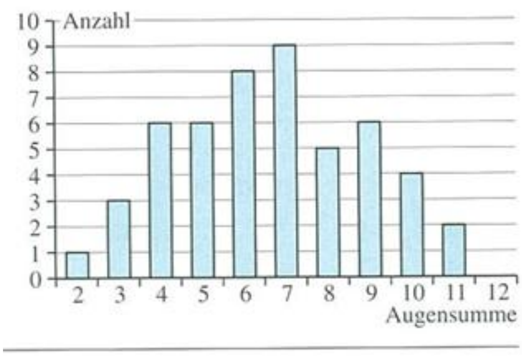
在六年級的第八單元中，教科書介紹了有關生活中相對次數的數學語言，例如：平均坡度、成長率、衰退率、投票率以及離婚率的定義，並提醒學生避免被報章雜誌的術語誤導成媒體所期望的扭曲概念。

接著在德國七年級教科書中，著重於統計之教學主題，雖然此階段之教材內容不在本研究範圍中探討，但其中 7-6-1-4 為統計概念結合機率教材內容，研究者將其提出進行研究分析討論。

7-6-1-4

投擲兩個骰子 50 次，並記下每次兩骰子的總和。
繪製適合的圖表，並找出最大的相對次數為何？
解決方案：

總和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	1	3	6	6	8	9	5	6	4	2	0



點數 7 的相對次數$\frac{9}{50} = \frac{18}{100} = 18\%$

在八年級德國教科書的第五章中，透過複習先前隨機試驗的定義，進而介紹樣本空間的數學概念與符號表達方式：$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3 \ldots\}$，並藉由利用樹狀圖建構出有系統

的樣本空間，而後練習各種事件的集合表示方式，以利之後課程介紹 $\bar{A}$ 的符號意義。接著透過 8-5-3-2 實例引導學生建立任何事件的機率值介於 0 到 1 之間，且所有子事件 ω_i 的機率值相加為 1 之兩大機率性質。再來藉由 8-5-4-1 引導學生「拉普拉斯試驗」定義，但在拉普拉斯公式中之計算關鍵為樣本空間的個數，因此引入計數原理工具得以解決。緊接著介紹 $\bar{A}$ 符號的表示意義，並透過先前教學中機率值相加為 1 之性質引導產生餘事件的概念。

8-5-3-2

表顯示投擲骰子 60 次的結果。

5 2 5 3 1 6 3 5 6 3　1 5 4 6 6 2 3 2 5 3　3 1 3 6 1 5 3 6 1 5
4 4 3 6 1 5 3 1 2 1　6 1 5 4 5 2 5 2 2 3　4 4 3 6 2 1 5 4 2 6

請問投擲到「質數」的絕對次數和相對次數為何？

解決方案：

首先，將所有投擲點數的絕對次數和相對次數以表格的形式顯示。

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	10	9	12	7	12	10
relative Häufigkeit	$\frac{10}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{10}{60}$

假設投擲到「質數」的絕對次數為 H， H=9+12+12=33

其相對次數為 h，$h \coloneqq \frac{9}{60}+\frac{12}{60}+\frac{12}{60}=\frac{33}{60}=\frac{11}{20}$

8-5-4-1

將鉛筆的六面標上數字 1 到 6，然後讓鉛筆滾動，記錄頂部（最上面）的點數。

Tim 假設每個點數出現的機率是$\frac{1}{6}$，通過試驗檢查，Tim 的猜測是對的嗎?

最後德國教科書在九年級的第五章中，藉由非對稱隨機事件的樹狀圖，讓學生對於每條樹枝的比例應有所不同產生了動機，因此在樹枝上填入相對應的數值是合理的解決方法。然後為了計算某一事件之機率值發展了兩種路徑規則：其一為橫向路徑，路徑規則為沿著相關路徑相乘以獲得機率值，即為獨立性概念；另一為直向路徑，路徑規則為將符合事件條件的機率值相加以獲得機率值，即所謂為互斥和事件。

在最後一節機率課程裡，因頻率機率相對於古典機率的概念更能被真實世界中廣泛的使用，所以教科書期望學生遇到各種問題情境時，能自行設計同構於情境的模擬試

驗，並利用電腦快速的計算，使問題有效的被解決。藉此也可以融會貫通所有六至九年級的機率觀念。

（二）「概念化」之質性分析結果

在此階段，研究者研讀德國教科書六至九年級的機率課程內容後，將其教材脈絡細緻的分析與解釋。然後利用編碼資料進行條列整理成表格，以利清楚呈現其教材內容摘要及提取關鍵概念亮點，並尋找課程內容及教學方法其中之關係。

1. 文字化資料分析

研究者先研讀前一步驟產生的文字化資料，並將機率課程內容賦予概念上的解釋。接著，將題目及穿插題目間的教材編寫方法進行表格化整理，以利找出德國教科書教材脈絡的安排模式和其中關係及特色。

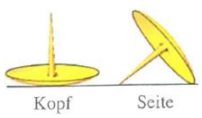
（1）教材脈絡分析及解釋

本研究依序從德國六至九年級教科書之機率課程安排方式，進行階段性的教材脈絡分析與解讀。

A. 六年級教材脈絡

教科書對於機率概念一開始的導入準備，就先以 6-2-1-1 投擲圖釘出現的結果引入，並分成（a）、（b）兩小題引導學生先利用自我經驗的直覺判斷，再經由試驗去驗證預估值。這種非典型的實例，促使學生產生不確定的感覺，進而刺激學生對於隨機事件和試驗結果出現次數的頻繁比例產生動機。

6-2-1-1



投擲一個圖釘，它會出現尖端朝上或尖端朝下的結果。

a）在 20 次試驗中，請預測會有機次出現尖端朝上的結果。

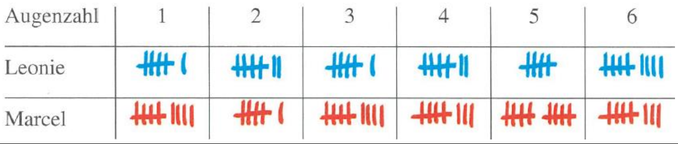
b）先進行 20 次試驗，並將結果與上題你的猜測，進行比較。

然後藉由 6-2-1-2 讓學生思考如何比較兩事件的頻率，進而利用學生先前已學過的比例概念，引導出機率值的意義是在隨機試驗下，事件頻繁出現的比例，因此定義絕

對次數和相對次數的運算方式。而後在 6-2-1-4 也故意舉出「絕對次數較大，但相對次數較小」的例子，以釐清絕對次數大不一定相對次數大的迷思，且頻繁性應更著重於相對次數的概念，以利後續發展機率值的雛形。

6-2-1-2
Markus 投擲公正的骰子 20 次，出現四次「6」；而 Lena 在 30 次試驗中，得到五次「6」。
Markus 聲稱他更頻繁擲到「6」，他的主張是否正確？

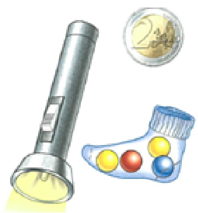
6-2-1-4



Leonie 和 Marcel 投擲一個公正的骰子，比較其結果。
誰擲出「4」的比例較大？

接著進入機率概念，而第一步是我們常常忽略檢驗的前提條件；這是相當的重要，但事實上很少跟學生清楚的交代過。那就是使用機率的前提必須是隨機的，換句話說試驗的結果只會有一個，並且是無法預測的。在這樣的前提下，機率值才是我們所要關心的，例如 6-2-1-3 為判斷隨機試驗的演練。

6-2-1-3



例 1
下列哪些試驗可以被視為隨機試驗？並說明你的答案。
a）擲硬幣。
b）手電筒關閉。
c）甕裡有紅球、黃球和藍球，閉眼從甕中抽球。

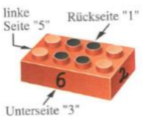
再來，透過學生調查全班喜好的顏色、動物、運動……等等你感興趣的問題，並藉由計算各個絕對次數和相對次數，以利陳述真實群體中的樣貌。例如 6-2-2-1 期望學生能熟練和整理感興趣的原始數據，並計算男生和女生喜歡綠色的絕對次數和相對次數，而後評估數據的背後意義，進而推論班上喜好的趨勢。但此問題因要處理的數據較於龐大複雜，且感興趣的問題不止於一兩個，教科書藉此引入列聯表工具，以系統化運算相對次數的過程。

6-2-2-1

在你的班上收集你感興趣的問題，並對以下問題進行評估。
f）男生比女生更喜歡綠色，這是真的嗎？
g）男生比女生更喜歡游泳，這是真的嗎？

之後，教科書藉由頻率機率的概念正式進入機率課程。首先舉例 6-2-3-1 非對稱隨機事件的問題，並期望培養學生先透過直覺的方式去估計每面的相對次數後，再藉由 6-2-3-2 實際操作 100 次的試驗結果去計算每面出現的相對次數，並再次自行估計每面出現的機率值。然後藉著利用 6-2-3-3 已知的 1300 次的試驗結果，要求學生再次估計每面出現的機率值，最後詢問學生：「這樣的估計有多好？」進而引導學生體認 6-2-3-2 比 6-2-3-1 的結果更能讓人相信接近事件機率值；而 6-2-3-3 又比 6-2-3-2 更能證實更接近真實的機率值，但我們永遠無法準確地給予隨機試驗的機率值，只能經過越來越大量的隨機試驗，相對次數的數值將會越穩定趨近真正的機率值。稱這樣的現象為大數法則。

6-2-3-1



不要使用公正的骰子投擲，拿一個「凸八點」的樂高積木，如左圖所示。每面和對面的數字和為七。請估計投擲「凸八點」的樂高積木時，每面出現的相對次數（百分比）為何?

6-2-3-2
Sebastian、Julia、Tobias 和 Rebecca，將「凸八點」的樂高積木各扔了 100 次，並把出現的數字記錄在表格上。
a）請計算丟出各面的相對次數。
b）你要如何估計每面出現的機率？

6-2-3-3
投擲「凸八點」的樂高積木 1300 次後，產生了下表。

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	151	17	585	403	15	129
relative Häufigkeit	$\frac{151}{1300}=11{,}6\%$	$\frac{17}{1300}=1{,}3\%$	$\frac{585}{1300}=45{,}0\%$	$\frac{403}{1300}=31{,}0\%$	$\frac{15}{1300}=1{,}2\%$	$\frac{129}{1300}=9{,}9\%$

請問你該如何用表去估計每面數字被擲到的機率？
而這樣的估計有多好？

最後，教科書利用報章雜誌的報導，對於生活情境中容易被混淆濫用「相對次數」的專有名詞，例如平均坡度、成長率、衰退率、投票率、離婚率……等等，進行數學

名詞的判斷，主要目的是期望學生能藉由了解名詞定義與數學意義的解釋，避免被報章雜誌中的術語或句構所誤導，而被媒體扭曲了。

6-8-5-1 閱讀下方剪報，找出錯誤在哪裡？你會在哪裡產生錯誤的印象？ 左上：在這個期間，個人電腦的價格下跌了 100%，甚至更進一步下跌。 左下：攀登路線的平均坡度約為 95%。地形幾乎是垂直的。 右上：在德國，每三對夫妻中有一對是離婚的。在大城市裡，這一比例已經高達 30%。 右下：在 4 年前 Friedrich Müller 獲得了 10%的選票，今年獲得了 15%的選票，他的選票提高了 5%

B. 七年級教材脈絡

七年級的教材內容皆著重於統計圖表和統計量的概念，從分析長條圖、圓餅圖、莖葉圖等數據圖表特質，到計算其中資料的平均值、中位數等統計量。特別的是在 7-6-1-4 問題中結合機率和統計，並也悄悄地埋下未來課程對於古典機率的伏筆。

7-6-1-4 投擲兩個骰子 50 次，並記下每次兩骰子的總和。 繪製適合的圖表，並找出最大的相對次數為何？

C. 八年級教材脈絡

八年級教科書從樣本空間的概念切入古典機率，在 8-5-1-1 中利用最直觀的方式說出有關數字或是顏色的樣本空間，藉此看出教材脈絡中隱藏著非對稱隨機事件的機率想法。延續這個觀念，教科書舉了一個因順序所影響的樣本空間型態例子 8-5-1-2。學生了解順序對於樣本空間的重要性後，引入介紹序對的表示方式，進而利用樹狀圖系統化地列出樣本空間的所有樣本，並在樹枝後方寫出序對以呈現樣本點形式樣貌。然後讓學生重複練習從各種樣本空間中，理解每一事件發生的數學意義，以達到將集合表示方式轉為真實意義的演練。

8-5-1-1

當轉動一個輪盤後，你覺得會有什麼樣的結果？

8-5-1-2

一個家庭中有兩個孩子的父母，接受了有關孩子性別的訪談。

在 a)、b）情況下，產生的結果為何？且差異在哪？

a） 孩子出生的順序加以考慮

b） 孩子出生的順序不加以考慮

然後介紹樣本空間之集合符號表示方式為$\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3\ldots\}$，並為了使學生熟悉集合的表達方式，另其演練 8-5-1-3 和 8-5-1-4。而後教科書介紹各種集合符號的表示定義，和其使用至實例的應用方法，例如Ω代表全部樣本空間、$\emptyset$代表空集合、事件 A 為Ω的子集、事件$\overline{A}$為事件 A 的餘事件。

8-5-1-3

自製「命運轉盤」，給出兩個感興趣特徵的結果集。

解決方案：

如果感興趣為顏色，那麼 Ω= {綠；黃；紅；藍}。

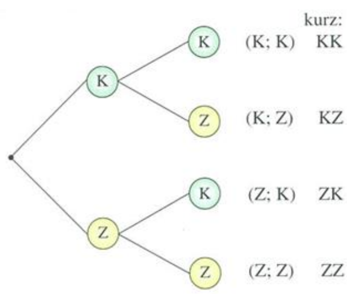
如果感興趣為號碼，那麼 Ω= {1；2；3；4；5；6；7；8}。

8-5-1-4

在 a、b 情況下，同時丟擲兩個硬幣後，請分別給出相對應的結果集。

a）兩硬幣是可區分大小的（一大一小）

b）兩硬幣是難以區分的（兩個同樣硬幣）



解法：

a）此試驗可以對應於“投擲硬幣兩次”，因為兩個可區分的硬幣總是可以被視為先後投擲。

Ω={（K;K）,（K;Z）,（Z;K）,（Z;Z）}

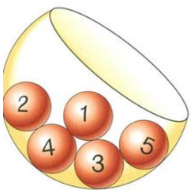
Ω 由四個元素組成

b）此試驗與投擲硬幣兩次忽略順序相同，因為它們的第一次投擲，硬幣都不能被區分。 Ω={兩次皆人頭、一次人頭，一次號碼兩次皆號碼}。Ω 由 3 個元素組成。

接著，透過 8-5-3-1 的問題複習六年級的相對次數觀念，並連結先前集合概念將其推廣為事件 A 的相對次數為$\frac{\text{A 的絕對次數}}{\text{n 次隨機試驗}}$，而後在演練 8-5-3-2 中順帶把絕對次數和相對

次數的長條圖繪製而成，以利看出相對次數為絕對次數的單位化結果。教科書從相對次數的定義推論事件發生的機率值介於 0 至 1 之間，且機率值總合為 1。而後在演練 8-5-3-3 的例子中，讓學生驗證和感受了大數法則的數學意義。

8-5-3-1



Mandy 從一個甕中將球抽出 50 次，每次抽完後放回甕中。

表顯示了 Mandy 抽球次數的結果。

球號	1	2	3	4	5
次數	9	12	11	10	8

請問偶數球被抽中的比例是多少？

8-5-3-2

表顯示投擲骰子 60 次的結果。

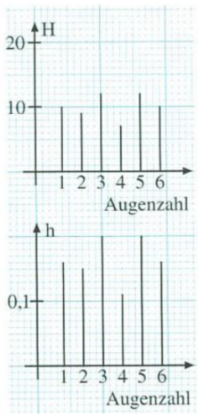
5 2 5 3 1 6 3 5 6 3　1 5 4 6 6 2 3 2 5 3　3 1 3 6 1 5 3 6 1 5
4 4 3 6 1 5 3 1 2 1　6 1 5 4 5 2 5 2 2 3　4 4 3 6 2 1 5 4 2 6

請問投擲到「質數」的絕對次數和相對次數為何？

解決方案：

首先，將所有投擲點數的絕對次數和相對次數以表格的形式顯示。

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	10	9	12	7	12	10
relative Häufigkeit	$\frac{10}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{10}{60}$



假設投擲到「質數」的絕對次數為 H， $H = 9 + 12 + 12 = 33$

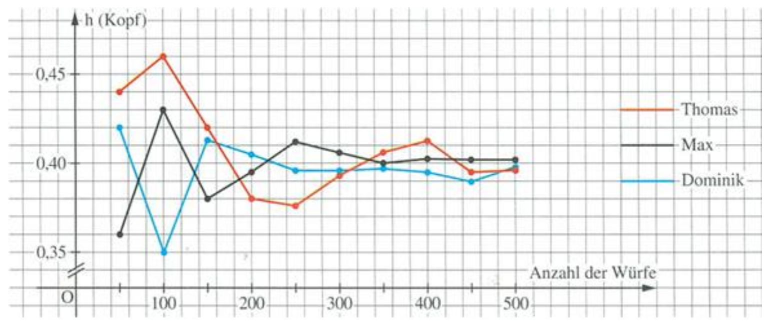
其相對次數為 h，$h := \frac{9}{60} + \frac{12}{60} + \frac{12}{60} = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}$

8-5-3-3

Anzahl der Würfe	Abs. Häufigkeit von „Kopf" bei Thomas	Max	Dominik
50	22	18	21
100	46	43	35
150	63	57	62
200	76	79	81
250	94	103	99
300	118	122	119
350	142	140	139
400	165	161	158
450	178	181	175
500	198	201	199

Tina 聲稱投擲圖釘時，出現「尖頭向上」的機率為 40%。Thomas、Max 和 Dominik 想要檢查這個機率是否正確，因此分別將圖釘扔擲 500 次，並將結果的絕對次數和相對次數記錄在左圖表中，分別在 50、100、......、500 次時，紀錄「尖頭向上」的次數。你有理由質疑 Tina 的說法嗎？

解決方案：



從圖表中得知相對次數將穩定在 0.40，因此 Tina 的聲明得到支持。

然後，教科書利用 8-5-4-1 滾動鉛筆的例子將頻率機率銜接至古典機率的概念，而古典機率在文本中稱為「拉普拉斯試驗」。而後，除了基本例子演練之外，教科書也順帶舉一些非對稱隨機事件的例子，如 8-5-4-3，提醒學生不要胡亂套用公式，而需小心檢測情境問題的隨機試驗是否符合拉普拉斯試驗的模型條件。而後在 8-5-4-4 中隱藏著計算樣本空間個數對於拉普拉斯公式的重要性，並埋下計數原理的教學動機。這是因為計數原理在 8-5-6 單元才出現，並將概念應用至直線排列，而在 8-5-4 單元的演練題中，學生遭遇一個典型的計數原理題目，$\mathrm{P}\big(\text{組成單詞「KO」的機率}\big) = 4 \times 3 = 12$。

8-5-4-1

將鉛筆的六面標上數字 1 到 6，然後讓鉛筆滾動，記錄頂部（最上面）的點數。

Tim 假設每個點數出現的機率是$\frac{1}{6}$，通過試驗檢查，Tim 的猜測是對的嗎?

8-5-4-3

你扔擲一個火柴盒，感興趣的是哪一面會朝上。

這個試驗過程是一個拉普拉斯試驗嗎？

8-5-4-4

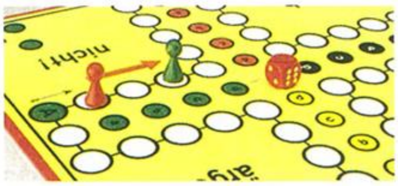
在一個襪子中，有四個球分別是字母 A、L、K、O。

依序抽出兩個球且不放回，將這兩個字母按照順序組合成一個「單詞」，則組成單詞「KO」的機率是多少？

研究者發現，教科書在各種情境問題上，期望學生能靈活運用古典機率的概念，找出解決問題的策略。例如 8-5-5-1 除了直接理解情境，利用古典機率得知機率值之外，

更提出另一面向資訊的問題，期望學生能反向思考其問題情境之機率值。而後 8-5-5-1-段-3 利用先前機率值相加為 1 的概念，引導出餘事件的教學。最後，利用生活中的實例 8-5-5-3 演練餘事件的操作運算。

8-5-5-1



Julia 在 Heinz 身後兩格，再來輪到她擲骰子前進，請問 Julia 超越 Heinz 的機率是多少？
那請問 Julia 該站在哪裡，使 Julia 超越 Heinz 的機率恰好是 50%？

8-5-5-1-段-3
備註：事件 A 的機率和相關計數器事件 $\bar{A}$ 的機率是互補的，因為每次執行隨機試驗時，A 或 $\bar{A}$ 其一定會發生。以下應用：$P(A)+P(\bar{A})=1 \Rightarrow P(A)=1-P(\bar{A})$

8-5-5-3
彩票的數字從 1000 到 9999 中，如果號碼中有三個零，表示獲得「大獎」；如果最後一個號碼為 3 或 7，則表示獲得「安慰獎」；其餘沒得獎。
請問下列事件發生的機率：
a）抽中「大獎」b）抽中「安慰獎」c）沒抽中獎品

最後藉由 8-5-6-1 啟發學生：即使樣本空間龐大冗長，學生基本上知道，只要他有耐心，必定可以藉由樹狀圖工具好好的列出樣本空間，而後得知樣本空間個數。但當學生列出部分樹狀圖後，將發現如果只需要知道樣本點個數，並不需要這樣反覆地做類似的事情。因此教科書緊接著介紹計數原理（乘法原理），並教導利用計算機中 x! 的按鍵功能，以快速解決計算樣本點個數的問題。

8-5-6-1

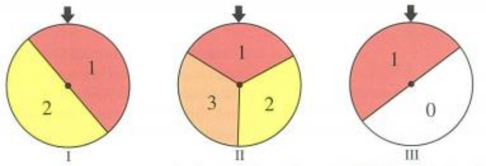
您可以從數字 1 到 9 中，選擇四個數字作為自行車的號碼鎖。
a）有多少可能的結果？
b）隨機轉到「正確」數字的機率是多少？

D. 九年級教材脈絡

首先 9-5-1-1 複習八年級利用樹狀圖呈現所有樣本空間的序對方式，再舉出非對稱隨機事件 9-5-1-2 的問題，讓學生發覺樹狀圖中的每條樹枝所發生的機率若不同時，應

在樹枝上填入相對應數值，以代表其比例。然後在 9-5-1-4 中透過部分樹狀圖的「數學教學三步驟」教學方法，使在具體概念和抽象運算中有著銜接性。

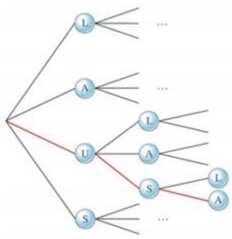
9-5-1-1



a）幸運輪盤以 I、II、III 的順序被轉動，以形成一組三位數。
請使用樹狀圖表示所有可能的結果集 Ω。
事件 A 為這三位數可被 3 整除的數字，確立此事件的機率為何？
b）現在只有第一個幸運輪盤被轉動了三次，以形成一組三位數。
請使用樹狀圖表示所有可能的結果集 Ω。
事件 A 為這三位數可被 3 整除的數字，確立此事件的機率為何？
c）如何改變第一個幸運輪盤，以便上述試驗不是拉普拉斯試驗？

9-5-1-2
從有 3 個藍球和 2 個紅球的甕中，同時抽出兩個球。
a）給出相對應的所有結果集。
b）這個隨機試驗是否可以繪製成樹形圖？說明理由。

9-5-1-4



描述一個屬於左側樹狀圖的試驗。
確定「USA」這個詞的機率有多少？

而後介紹藉由樹狀圖計算機率值的兩種路徑規則：

第一條路徑規則為在樹狀圖中沿著相關路徑的樹枝上數值相互相乘獲得其機率值，其為獨立性。教科書先透過 9-5-2-1 直觀思維，引導學生獨立事件若為加法，實為不合理。再利用 9-5-2-2 比例概念去感受乘法的數學意義，並透過 100 次隨機試驗回應 9-5-1-2 的問題，進而在真實問題中建構出獨立性。

隨後，教科書在 9-5-2-4 優化了 9-5-1-4 的方法，將樹狀圖簡化成只畫感興趣的部

分。藉由「數學教學三步驟」的方式引導學生做抽象數值的運算，最後教科書除了演練 9-5-2-5 問題之外，更在文中將其問題延伸成 9-5-2-5-段-1，透過給予不同的資訊方向回推情境所需的條件，以確保學生理解獨立性概念。

9-5-2-1

擲骰子時，你擲到一個 6 的機率為$\frac{1}{6}$，所以在 6 次投擲中你能擲到 6 的機率為

$\frac{6}{6} = 100\%$，你覺得呢？

9-5-2-2

在 50 名員工中，60%是女性，其中 20%教數學。請問這所學校有多少數學女教師？

9-5-2-4

畫出「USA」這個單字的機率是多少？

首先只畫出感興趣的路徑。

解決方案：

$$P（USA）=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

9-5-2-5

現在海關裡有 9 人，而其中 4 人為走私犯。一位海關官員要求對 9 人中的 3 人進行抽樣檢查。如果隨機選擇 3 人，請問這 3 人都是走私犯的機率為多少？

9-5-2-5-段-1

由於機率低於 5%，海關官員會對走私者有特別好的感覺。

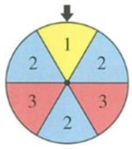
第二條路徑規則為在樹狀圖不同條樹枝中，若符合事件條件的樣本點之機率值相加之和而獲得的機率值，則為互斥和事件。這個概念對於教材脈絡是自然的，因為在 8-5-5-1-段-2 中已提過相似概念，所以在此並無過多的著墨，而是給予多個實際問題，強化概念，例如 9-5-3-3 結合獨立性和互斥和之概念。

8-5-5-1-段-2

對於拉普拉斯試驗：

事件 A 的機率 P(A)是通過將 A 有利結果的數量除以可能結果的總數而獲得的。

$$P(A)=\frac{\text{事件 A 有利的結果數量}}{\text{可能的結果數量}}=\frac{|A|}{|\Omega|}$$



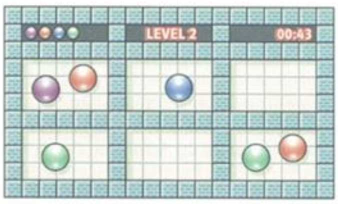
9-5-3-3

轉動命運輪盤兩次。請問出現相同數字的機率是多少？

在這一節中教科書總結機率最終核心概念：雖然古典機率可以直接計算機率值，但在真實世界中的問題，其實大多是不適用的。更多的時候我們無法得知真正的機率值，而是仰賴頻率機率的方式，因此大數法則對我們來說是相當地重要。但在大量試驗中，畢竟人為試驗是會有錯誤和限制的，因此得到準確又大量的結果是困難且費時的，所以模擬隨機試驗的方法是重要的解決策略。藉此課題，期望學生能融會貫通所有機率課程概念，並依不同問題情境自行設計合於目標問題的模擬模型，再透過電腦快速地執行試驗，以有效的解決問題；這是教科書的最終目標。

以下針對教科書九年級第五單元第四節「模擬隨機試驗」的教材內容做詳細介紹，包括方法的說明和分析解釋。此節包含四個例題，以及題與題之間的教學引導課程。

9-5-4-1



在電腦遊戲中，六個球隨機落入六個槽中。

如果每個槽中都恰好有一個球，你就會獲勝。

Jan 和 Heike 正在思考如何使用骰子進行類似的遊戲，以至勝算和他們在電腦遊戲中的機率相同。描述骰子遊戲。

此 9-5-4-1 開放式問題對於九年級學生是具有深度的，因此可藉由分組討論刺激學生靈活思考和精進解決問題策略。研究者給予此問題的骰子遊戲方式為「投擲六次骰子後，記錄每次點數，若每次出現點數皆不同，則獲勝。」然後學生可藉由操作頻率機率的方式求得此問題的勝率，以驗證古典機率計算出來的機率值。

對於「投擲六次骰子，每次出現的點數皆不同」同構於「六個球隨機落入六個槽，每個槽中恰好有一個球」的機率模型，原因如下說明。首先先將六個不同的球和六個

不同的槽分別進行編號 1 號至 6 號，再來我們可以把第一次隨機投擲骰子的點數想成第一顆球隨機落入某號槽中，例如紀錄某回投擲六次骰子的結果為（6,6,6,5,5,3），則表示對應至電腦遊戲的結果為第一顆球、第二顆球和第三顆球落入第六個槽，第四顆球和第五顆球落入第五個槽，第六顆球落入第三個槽，依此類推至其它事件結果，如此下來每回的骰子結果將一一對應至電腦遊戲結果，而「投擲六次骰子，每次出現的點數皆不同」的機率模型同構此問題情境，之後學生可操作頻率機率得知約略的勝率。

此問題也可透過古典機率的方式求得此勝率，如下說明。有六個不同的球可以隨機落入六個不同的槽中，相當於是球去選槽，所以會有6^6種樣本空間，其中要取勝的方式就是將六個槽固定下來，而第一個槽有六種球可以選擇，當第一槽選定球後，換第二個槽剩五種球可以選，當第二槽選定球後，換第三槽選擇……依此類推，因此透過乘法原理得知取勝的可能性有 $6!$ 種，所以此問題的勝率為 $\frac{6!}{6^6}$。

在 9-5-4-1 問題中，學生能藉由深入了解某一遊戲規則模式，並能將此一遊戲建模成另一熟悉工具的模擬，以求得機率值。但當問題情境的古典機率不易推論求得時，可透過頻率機率的大數法則求得問題約略的機率值，因此教科書接著在 9-5-4-1-段-2 舉例，使學生感受模擬的重要性。

9-5-4-1-段-2
Barbara 和 Thomas 對以下遊戲達成一致：
拋出一枚硬幣，直到第一次出現“KKK”或“KZK”的字樣。
在第一個案例中，Thomas 在第二次投擲後獲勝。(圖)
因為我們無法從數學上確定勝利的機率，所以我們玩玩看。

Barbara 獲勝
Thomas 獲勝

此問題勝率不易計算求得，學生只能依靠頻率機率的大數法則求得約略值，但複雜的遊戲規則恐在操作頻率機率的過程中，因有人為上的疏失或時間的限制，導致產生誤差。藉此刺激學生對於引入計算機工具的動機，接著在 9-5-4-1-段-3 介紹使用計算機工具的邏輯方式。

9-5-4-1-段-3
通常可以使用電子試算表在電腦上進行模擬。
這提供 0 和 1 之間的隨機數，例如 0.9123560112。
如果您只想生成隨機數 0 和 1，則必須使用適當的算術運算來完成此操作。
這就是你得到的
a）大於或等於 0 且小於 1 的隨機數：RANDOM_COUNT（）
b）隨機數 0 或 1：整數（RANDOM_COUNT（）* 2）
c）隨機數 1,2,3,4,5,6：INTEGER（RANDOM COUNT（）* 6）+1

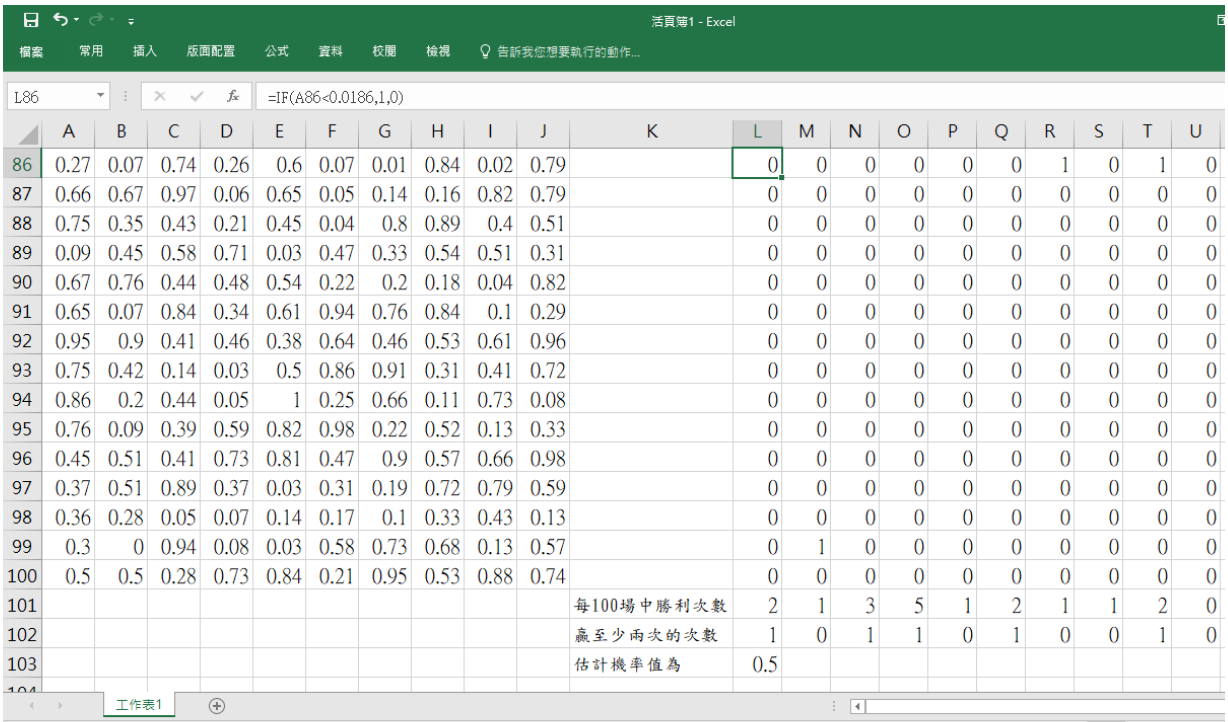
為了讓學生熟悉電腦邏輯運算的模式，緊接著演練實例 9-5-4-2 和 9-5-4-3，讓學生能實際操作模擬。

9-5-4-2
如果你至少有三個正確的號碼，則你可以知道在抽獎中獲勝的機率約為 1.86%。
描述如何使用電腦模擬的方式來估計，在 100 場比賽中贏得至少兩次的機率。
解決方案：
電腦先預設介於 0 和 1 之間的 100 個亂數表。
當亂數小於 0.0186 時，就表示勝利。
計算勝利次數。
將此過程重複十次。
您將收到每 100 場比賽獲勝的次數: 3, 0, 2, 2, 0, 2, 1, 2, 1, 0。
在 10 個案例中，至少有兩次獲勝的次數為 5 次，因此估計機率為 50%。

簡述 9-5-4-2 問題「已知每次勝率為 1.86%，則在 100 場比賽中贏得至少兩次的機率為何？」教科書提供的解題策略為利用電腦先產生 100 個 0 至 1 之間的亂數，以代表每場勝敗的結果，因勝率為 1.86%，意為當亂數小於 0.0186 時，則勝利，然後計算這 100 個亂數中小於 0.0186 的個數總和，以代表勝利次數。藉由大數法則的結論，重複此試驗越多回越好，因此教科書重複試驗 10 回，然後再去累計每場試驗勝利次數兩次（含）以上的場數除以重複 10 回試驗，以求得機率值。

研究者利用 Excel 展示此題電腦模擬，首先利用函數 RAND() 產生 10 回 100 個亂數，如圖 4-1 左半數值 A 行至 J 行，每行有 100 個介於 0 至 1 之間的亂數，共 10 行。再來利用函數IF(Ai < 0.0186,1,0) 判斷 Ai 行小於0.0186的結果，i 代表列號，1 代表符合條件（贏得比賽），0 代表不符合條件（沒有贏得比賽），並顯示結果在 Li 行，i 代表

列號，依此類推至判斷 Ji 行顯示結果至 Ui 行，例如 I86 為 0.02 因小於 0.0186，所以在 T86 顯示 1 以代表此隨機試驗贏得比賽。接著利用函數 SUM(L1: L100) 計算 Li 行中 1 的個數，並顯示在 L101 格中，依此類推至累加 Ui 行顯示在 U101 格。然後利用函數 IF(L101 >= 2,1,0) 判斷 L101 大於等於 2 的結果，並顯示在 L102，依此類推至判斷 U101 顯示在 U102，例如 O101 為 5 因大於等於 2，所以在 O102 顯示 1 以代表符合「在 100 場比賽中贏得至少兩次」的判斷結果。最後透過函數 SUM(L102: U102)/10 得知此模擬所估計的機率值，如圖 4-1 所示。

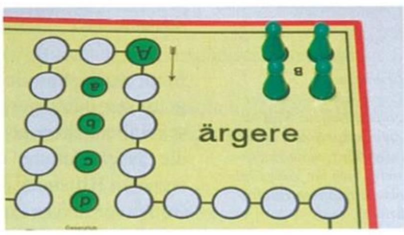


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
86	0.27	0.07	0.74	0.26	0.6	0.07	0.01	0.84	0.02	0.79		0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
87	0.66	0.67	0.97	0.06	0.65	0.05	0.14	0.16	0.82	0.79		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	0.75	0.35	0.43	0.21	0.45	0.04	0.8	0.89	0.4	0.51		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
89	0.09	0.45	0.58	0.71	0.03	0.47	0.33	0.54	0.51	0.31		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
90	0.67	0.76	0.44	0.48	0.54	0.22	0.2	0.18	0.04	0.82		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
91	0.65	0.07	0.84	0.34	0.61	0.94	0.76	0.84	0.1	0.29		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
92	0.95	0.9	0.41	0.46	0.38	0.64	0.46	0.53	0.61	0.96		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
93	0.75	0.42	0.14	0.03	0.5	0.86	0.91	0.31	0.41	0.72		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
94	0.86	0.2	0.44	0.05	1	0.25	0.66	0.11	0.73	0.08		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
95	0.76	0.09	0.39	0.59	0.82	0.98	0.22	0.52	0.13	0.33		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
96	0.45	0.51	0.41	0.73	0.81	0.47	0.9	0.57	0.66	0.98		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
97	0.37	0.51	0.89	0.37	0.03	0.31	0.19	0.72	0.79	0.59		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
98	0.36	0.28	0.05	0.07	0.14	0.17	0.1	0.33	0.43	0.13		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99	0.3	0	0.94	0.08	0.03	0.58	0.73	0.68	0.13	0.57		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0.5	0.5	0.28	0.73	0.84	0.21	0.95	0.53	0.88	0.74		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101											每100場中勝利次數	2	1	3	5	1	2	1	1	2	0
102											贏至少兩次的次數	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
103											估計機率值為	0.5									

圖 4-1 模擬 9-5-4-2 情境問題

以下說明另一演練計算機邏輯運算習題 9-5-4-3 的解決策略和教學目標。

9-5-4-3



在德國遊戲「人為煩人」中，規定進場條件為投擲一公正骰子三次，其結果若有一「6 點」時，即可進場。因此進場的機率為 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 42\%$，請執行模擬，並將結果與計算的機率進行比較。

解決方案：

在電子表格程序中，每個數字都從這組數字中生成 3 個隨機數字 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。然後檢查是否包含 6。

如果是，則測試輸出分配值 1，否則值為 0 該測試重複 1000 次。
測試結果的總和就是事件的絕對次數，而後計算機率值。

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster

D4 fx =WENN(ODER(A4=6;B4=6;C4=6);1;0)

	A	B	C	D	E
1	„In das Spiel kommen"				
2					
3	Zufallszahl 1	Zufallszahl 2	Zufallszahl 3	Wert des Experimentes	
4	3	2	5	0	
5	3	3	4	0	
6	6	3	6	1	
7	1	6	1	1	
1002	2	5	3	0	
1003	1	6	1	1	
1004			Summe	418	
1005			rel. Häufigkeit	0,418	

9-5-4-3 問題簡述「已知進場遊戲規則為投擲一公正骰子三次，如有一次投擲結果為「6 點」時，即可進場。請利用電腦模擬進場機率為$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=42\%$。」透過餘事件的推論得知不能進場的情況為投擲三次骰子沒有一次擲得到「6 點」，因此進場的機率為$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=42\%$。教科書提供電腦模擬策略為先利用電腦產生三個 1 到 6 之間的整數亂數，並顯示在 A 行到 C 行，以代表投擲三次骰子的結果，再來判斷這三數是否有「6」的結果顯示在 D 行，若其中有一次出現「6」，則輸出 1；若沒有，則輸出 0，以代表是否進場結果，1 代表進場；0 代表沒進場，然後藉由大數法則以重複越多次步驟越接近機率值，在此執行了 1000 次隨機試驗，接著加總 D 行中 1 的個數，以代表進場的絕對次數，最後將 418 次除以隨機試驗次數 1000 次，以得模擬機率值為 0.418。

9-5-4-4
例 3
有五個人在講台上坐下後，開始進行討論，但每個人都忘記班長希望大家坐在的特定位子順序上。
請問如何透過各種方式的模擬，去估計沒有人坐在他預期位置的可能性。
解決方案：
第一種方式：在一個甕中，有五個編號的球，它們被依序抽出，並照順序排放在一起。
如果球上的數字與球的位置數字不同，則此事件是我們感興趣的。
而在 50 項試驗中，我們獲得了 19 次感興趣的結果，因此此問題的機率為 38%。
第二種方式：用骰子試驗模擬。
丟擲一個公正的骰子，直到 1 到 5 中的每個數字至少出現一次。
由此產生的數列，先將相同的數字刪除和點數 6 刪除，因此得到一組 5 個數字的數

列。
而用此方式我們再次和位置序列（1,2,3,4,5）進行推論及評估。

此問題簡述為「五個人都坐在不是預期位置的機率值？」意為錯排問題，對於此階段的學生無法直接得到機率值，因此需先將問題重新建構成熟悉的隨機試驗，以利求出機率值。教科書給予兩種解決策略：其一為先準備一個甕，甕裡放置五顆球並編號 1 號到 5 號，再進行取後不放回的方式依序抽出五顆球，以得到一組隨機數列，接著判斷此數列是否和某一預先假設的固定數列相同，此時可將此固定數列設為（1,2,3,4,5）並進行試驗結果的判斷；另一方式為記錄投擲一個公正的骰子直到點數 1 至點數 5 皆出現過，然後將此數列中後來出現相同數字和點數 6 刪除，以得一組隨機數列包含 1 號到 5 號，接著判斷此數列是否和某一固定數列（1,2,3,4,5）相同，以求得機率值。

在兩種錯排問題的解決策略中，預先假設固定數列（1,2,3,4,5）意為預期五位不同人所應在的位置情況，之後所進行的甕中抽球或是投擲骰子的隨機試驗意為真實位置情況，因此若所進行的隨機試驗結果序列與固定數列（1,2,3,4,5）不一樣之時，視為此隨機試驗結果為成功，反之為失敗。此錯排問題的古典機率值計算如下所示。

$$\frac{D_5}{5!}=\frac{5!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)}{5!}=\frac{44}{120}\approx 0.3\overline{6}$$

學生可透過 Excel 軟體模擬頻率機率的方式得知機率值的估計值，在此也埋下未來高中排列組合課程的伏筆。

（2）德國機率教科書之教材脈絡表格化

研究者依據上述對於教材脈絡中教材內容、目標和方法之分析及解釋，進行提取其中重要概念之關鍵亮點，並利用編碼表格化整理在表 4-7，以利找出教材脈絡中各面向發展之間的關係。

表 4-7 德國機率教科書之教材脈絡表格化

編碼	教材脈絡之摘要	概念關鍵
6-2	**相對次數**	
6-2-1	**隨機試驗**	
6-2-1-1	先培養學生擁有主觀機率的直覺想法（a)，再藉由頻率機率的試驗驗證預估值的正確性（b）	引入機率、主觀直覺、非典型例子刺激學習動機
6-2-1-1-段-1	從現實生活中的實例（輪盤）得知「隨機試驗」的直觀特性為「他會顯示什麼數字，你無法預測」	直觀的數學感覺引至抽象定義
6-2-1-2	利用已學過的比例概念，讓學生了解機率值的雛形為不斷試驗下，事件出現的頻繁性	引入機率、承先啟後
6-2-1-2-段-1	隨機試驗的定義 1.只有一個結果 2.結果無法預測	6-2-1-1-段-1 之定義
6-2-1-2-段-2	試驗流程教學：記錄隨機試驗結果 → 對感興趣的問題進行計算（絕對和相對次數）	實例教學
6-2-1-2-段-3	定義絕對次數、相對次數，如下所示。 絕對次數：=特定結果出現的次數 相對次數：=在隨機試驗的執行總數中，絕對次數的比例有多大（相對次數= $\frac{\text{絕對次數}}{\text{總數}}$）	6-2-1-2-段-2 問題之定義
6-2-1-3	在隨機試驗前提下的事件，機率值才是我們所想要關心的	真實情境演練
6-2-1-3-段-1	隨機抽取的容器可以是甕、箱子、袋子、包、襪子、碗等等	真實生活情境教學
6-2-1-4	1.絕對次數大不一定相對次數大 2.引導機率值應著重於相對次數	反例釐清迷思概念

6-2-2	**記錄並評估數據**	
6-2-2-1	利用絕對次數與相對次數的概念，解決生活中的問題	演練 6-2-1-2-段-3 的概念、引出列聯表工具
6-2-2-1-段-1	利用 6-2-2-1 實例說明收集數據與評估的系統性方法，並引入列聯表使運算相對次數更加便利	真實問題之列聯表教學
6-2-2-1-段-2	列聯表運算規則之性質，而埋下對於未來機率課程伏筆，其一為列聯表總和 100%意如機率值總和為 1；其二為已知行或列兩個欄位的數字後，可計算第三個數字意如餘事件概念	定義教學、埋下未來機率課程概念
6-2-2-2	練習列聯表的運算規則	演練 6-2-2-1-段-2

6-2-3	**相對次數和機率**	
6-2-3-1	培養主觀機率的直覺想法，並估計不對稱隨機事件問題（凸八點的樂高）相對次數之值，在此也回應了 6-2-1-2 主觀估計的問題	主觀直覺、演練頻繁性問題、引入頻率機率
6-2-3-2	藉由試驗計算每面出現的相對次數（a），進而藉此自行預估機率值（b）	主觀直覺、頻率實作、自我判斷數感
6-2-3-2-段-1	公平公正的試驗可用古典機率的方式估計，而大數法則適用於所有的試驗，因此試驗條件影響估計的方式	引大數法則之動機
6-2-3-2-段-2	大數經驗法則：進行大量的隨機試驗，則每個結果的相對次數將會穩定下來在某個值附近，而此值將會接近實際機率	大數法則之形式化定義
6-2-3-3	在大量試驗下，利用大數法則使結果更逼近實際機率。而「估計有多好？」隱藏出 6-2-3-1、6-2-3-2、6-2-3-3 的估計越來越好	演練 6-2-3-2-段-2、6-2-3-1、6-2-3-2、6-2-3-3 為解題優化過程

6-8-5	**百分比與圖表的問題**	
6-8-5-1	考驗學生認識平均坡度、成長率、衰退率、投票率以及離婚率等相對次數專有名詞的了解程度，並藉由理解生活中的數學語言，避免被報章雜誌的術語所誤導	澄清迷思概念、生活情境用語
6-8-5-1-段-1	解釋平均坡度、成長率、衰退率、投票率以及離婚率等名詞，及通常被扭曲觀念的目的	刻意使學生掉入迷思概念陷阱

7-6	**百分比計算和圖表**	
7-6-1	**分析數據圖表**	
7-6-1-4	埋下頻率機率引至古典機率的伏筆	跨單元（統計）、埋下古典機率的伏筆

8-5	**拉普拉斯機率**	
8-5-1	**結果集（樣本空間）**	
8-5-1-1	利用直接觀察的方式，引出在古典機率中的初始步驟列出多種樣本空間（如：數字、顏色）	引入古典機率、直觀
8-5-1-2	考慮在不同情況下的樣本空間，順序成為重要的條件	引入序對動機

8-5-1-2-段-1	複習 6-2-1-2-段-1 隨機試驗定義，進而介紹樣本空間定義與集合符號表示，例如：Ω為全空間，而其中單個結果集被稱為$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots$	承先啟後的概念教學
8-5-1-2-段-2	樣本空間實例及序對定義，例如：擲骰子時，我們通常選擇$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$作為結果集	實例體驗定義 8-5-1-2-段-1 之數學意義
8-5-1-2-段-3	利用樹狀圖列出樣本空間，並在每條樹枝後方用序對寫出事件子結果	實例教學樹狀圖
8-5-1-3	演練利用集合列出多種樣本空間（數字、顏色）	連結 8-5-1-1 的問題
8-5-1-4	演練利用樹狀圖列出在不同情況下的樣本空間	連結 8-5-1-2 的問題

8-5-2	**活動**	
8-5-2-1	複習在不同情況下列出樣本空間	引入事件集合
8-5-2-1-段-1 8-5-2-1-段-2	利用德國傳統遊戲複習事件集合的表示定義，而後介紹「事件 A ⊂ 事件 Ω」的數學意義	利用生活遊戲刺激學習動機
8-5-2-1-段-3	介紹其他集合符號意義：Ω 為全空間（複習 8-5-1-2-段-1）、∅為空集合、事件 A 集合、事件 $\bar{A}$ 集合	承先啟後、定義符號之教學
8-5-2-2	判斷在該結果集下事件是否會發生	演練 8-5-2-1-段-1 和 8-5-2-1-段-2 概念

8-5-3	**相對次數與機率**	
8-5-3-1	藉由試驗計算偶數球出現的相對次數，複習 6-2-1-2-段-3 的比例問題	舊有概念引入
8-5-3-1-段-1	複習 8-5-2-1-段-1，並將 6-2-1-2-段-3 相對次數的概念加入	承先啟後
8-5-3-1-段-2	相對次數推廣至多次隨機試驗： 事件 A 的絕對次數 H（A）是與該事件相關結果的絕對次數總和。 事件 A 的相對次數 h（A）是與該事件相關結果的相對次數總和。 如果隨機試驗進行了 n 次，則 $h(A) = \frac{H(A)}{n}$，並簡單舉實例說明此概念，而在此也埋下事件可以相加關係 8-5-5-1-段-2	延伸先前 6-2-1-2-段-3 概念、實例說明定義
8-5-3-2	利用相對次數的觀念推廣古典機率的想法，並	演練 8-5-3-1-段-2、

	引導互斥和事件的相加概念，而後繪製絕對和相對次數之長條圖，以利發覺相對次數為單位化絕對次數之結果	引 8-5-3-2-段-2 概念
8-5-3-2-段-1	我們只能猜測事件發生的可能性，因此你可以根據經驗或是穩定的相對次數（大數法則）將一個數值分配給機率值	概念教學
8-5-3-2-段-2	介紹 P （A）相關定義，而後教學以下概念： $0 \leq P(A) \leq 1 \;, P(\Omega) = 1$	概念教學
8-5-3-3	利用推廣相對次數 8-5-3-1-段-2 演練計算頻率機率值 8-5-3-2-段-2 概念，以驗證先前大數法則 6-2-3-2-段-2 定義	演練 8-5-3-2-段-2、驗證大數法則

8-5-4	**拉普拉斯試驗**	
8-5-4-1	藉由複習 6-2-3-2-段-2 頻率機率試驗驗證預估值的正確性，進而引入古典機率的想法	複習頻率機率引入古典機率
8-5-4-1-段-1	舉許多日常生活情境中古典機率的實例	實例引入概念
8-5-4-1-段-2	拉普拉斯試驗定義：隨機試驗後，有 n 個結果，每個結果發生的機率值皆為$\frac{1}{n}$	定義教學
8-5-4-1-段-3	介紹拉普拉斯（1749-1827）生平	偉人傳記
8-5-4-2	演練熟悉拉普拉斯試驗，而在此也提醒學生隨機試驗前提條件的重要性	演練 8-5-4-1-段-2 概念
8-5-4-3	和 8-5-4-2 做為比較題型	演練 8-5-4-1-段-2 概念反例
8-5-4-4	複習 8-5-1-2-段-3 樹狀圖概念或列表方式呈現所有樣本空間，接著計算其樣本空間個數，再來透過 8-5-4-1-段-2 計算其機率值。在此計算樣本空間個數方法將埋下未來對於計數原則之教學	複習 8-5-1-2-段-3、演練 8-5-4-1-段-2 概念、埋下計數原則伏筆

8-5-5	**拉普拉斯試驗中事件的機率**	
8-5-5-1	利用德國傳統遊戲複習先前 8-5-4-1-段-2 古典機率概念，而在此問題情境下計算其機率值和給予固定機率值問在何種情境下發生的題目更具靈活有趣	複習舊概念、推論不同資訊情境
8-5-5-1-段-1	透過實例複習 8-5-2-1-段-1 和 8-5-4-1-段-2 概念，並介紹新符號$\lvert M \rvert$為 M 集合中的元素數目	承先啟後
8-5-5-1-段-2	推廣先前拉普拉斯試驗的公式：事件 A 機率 P	承先啟後

	（A）是通過將 A 有利的結果數量除以可能的結果總數而獲得的$P(A)=\frac{\text{事件 A 有利的結果數量}}{\text{可能的結果數量}}=\frac{\lvert\mathbf{A}\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$	
8-5-5-1-段-3	利用在此補上先前 8-5-2-1-段-3 餘事件的機率值，因全空間機率值和為 1，引導餘事件概念 $P(\Omega)=P(A)+P(\bar{A})=1\Rightarrow P(A)=1-P(\bar{A})$	承先啟後
8-5-5-1-段-4	選擇合適的樣本空間，使其符合拉普拉斯試驗前提條件，以利使用 8-5-5-1-段-2 公式求出古典機率值，而後舉出因選擇不好的樣本空間和違反拉普拉斯試驗（連結 8-5-4-3）的兩個實例	迷思概念釐清、反例、連結先前實例
8-5-5-2	演練 8-5-5-1-段-2 概念，但也可使用 8-5-5-1-段-3 餘事件解題	墊步演練、單一事件過渡餘事件
8-5-5-3	單一事件和餘事件的古典機率應用題	融會貫通演練

8-5-6	**數字和機率**	
8-5-6-1	利用生活實例（車鎖密碼）複習 8-5-1 列出樣本空間和 8-5-4 計算古典機率之機率值，再此因樣本數過於龐大，而引出接著的計數原理課程	承先啟後、乘法原理之學習動機
8-5-6-2	利用賽馬的生活實例，複習 8-5-1 樣本空間和 8-5-4 拉普拉斯公式，並埋下計數原理學習動機	承先啟後、引入乘法原理
8-5-6-2-段-1	為得知多階段隨機試驗的樣本空間數，除了直接繪製樹狀圖之外，也解釋計數原理（乘法原理x！）作切入的解決技巧	承先啟後教學概念
8-5-6-2-段-2	計數原理定義	定義教學
8-5-6-2-段-3	利用不盡相異物排列實例之部分樹狀圖，再次解釋計數原理使用方法，以熟悉其數學意義，並教學計算機x！的功能鍵	「數學教學三步驟」樹狀圖教學抽象定義、計算機工具引入
8-5-6-3	演練 8-5-6-2-段-2 乘法原則求出樣本空間個數	演練 8-5-6-2-段-2 概念
8-5-6-4	熟悉利用乘法原則得知樣本空間個數，也為未來排列組合的課程埋下伏筆	演練 8-5-6-2-段-1 之概念、埋下伏筆

9-5	**多階段隨機試驗的機率**	
9-5-1	**多階段隨機試驗**	
9-5-1-1	複習 8-5-1 樹狀圖概念和 8-5-4 計算古典機率值。最後利用開放式問題，期望學生能深入思	承先啟後、開放問題、引不對稱隨機

	考和互相討論，以埋下接著不對稱隨機事件的機率概念課程	事件
9-5-1-2	經不對稱隨機事件的樣本空間，讓學生發覺先前的樹狀圖畫法在此情形下有衝突的直覺	引入樹枝上寫數值之動機
9-5-1-2-段-1	雖兩硬幣同時擲與分次擲是相同試驗，但想成分次擲有利於繪製樹狀圖和計算機率值，而此也回應 8-5-1-4、8-5-5-1-段-4 提醒學生拉普拉斯前提條件的集合表示之重要性	新概念回應舊問題 8-5-5-1-段-4、釐清舊概念
9-5-1-3	演練利用多階段之樹狀圖與序對表示方式，列出隨機試驗樣本空間，並理解樣本空間子集合之數學意義	演練 9-5-1-2-段-1 概念
9-5-1-4	演練多階段之樹狀圖，並引導計數原理在計算多階段隨機試驗之樣本空間個數一樣可行	複習計數原理 8-5-6-2-段-2、演練 9-5-1-2-段-1 概念、「數學教學三步驟」

9-5-2	**機率的乘積（第一條路徑規則）**（獨立性）	
9-5-2-1	利用直觀思維引導學生獨立性事件應為乘法，不為加法，否則事件機率值不合理	誇張迷思概念、不確定性直覺
9-5-2-2	利用先前比例概念引導獨立事件的相乘性	承先啟後
9-5-2-2-段-1	透過回應 9-5-1-2 取後不放回問題的樹狀圖，引導在樹枝上寫下數值的解決策略，接著利用比例概念重新詮釋了獨立性的計算規則	回應 9-5-1-2、多方面觀點切入
9-5-2-2-段-2	定義獨立性計算規則	定義教學
9-5-2-2-段-3	藉由樹狀圖中只畫出某一條有興趣的樹枝，使其教學在具體概念和抽象數值運算之間得到緊密的過渡	「數學教學三步驟」的教學連結、優化 9-5-1-4
9-5-2-3	演練 9-5-2-2-段-2 獨立性概念，並和 9-5-2-2-段-1 中實例比較取後放不放回之間計算機率值差異	演練 9-5-2-2-段-2 概念、相近迷思概念比較釐清
9-5-2-4	利用部分樹狀圖演練 9-5-2-2-段-2 獨立性概念，並回應 9-5-1-4 優化解決策略	演練 9-5-2-2-段-2 概念、回應優化 9-5-1-4
9-5-2-5	實例演練 9-5-2-2-段-2 獨立性概念	演練 9-5-2-2-段-2 概念
9-5-2-5-段-1	藉由 9-5-2-5 的情境，考慮相反情況的資訊：當抽樣檢查機率低於 5%時，海關官員會對這批走私者有特別好的感覺，那走私者不能超過多少	反面回推情境條件、融會貫通

	人？此問題檢測學生能靈活運用機率概念	
9-5-2-6	演練 9-5-2-2-段-2 獨立性概念，其中也複習先前 8-5-5-1-段-3 餘事件、9-5-1-2-段-1 順序概念	演練 9-5-2-2-段-2 概念、複習先前概念

9-5-3	**機率之和 （第二路徑規則）**（互斥和事件）	
9-5-3-1	此時教材脈絡下，互斥和事件的運算規則對於學生而言已能自行解決，因此文本較無過多的著墨，而是直接拋出互斥和事件問題	引入互斥和事件
9-5-3-1-段-1	透過舉其他實例，使學生對互斥和事件有感覺，進而解決 9-5-3-1	實例引入教學
9-5-3-1-段-2	定義互斥和事件之計算規則，並解釋其數學意義	定義教學
9-5-3-2	利用兩種策略解決問題，使學生演練 9-5-3-1-段-2 互斥和事件運算規則及複習 8-5-5-1-段-3 餘事件	演練 9-5-3-1-段-2 概念、多種解題技巧
9-5-3-3	演練部分樹狀圖、獨立性、互斥和的概念解題，期望學生能考量自己的學習步驟選擇能接受的解題策略	演練 9-5-3-1-段-2 概念

9-5-4	**模擬隨機試驗**	
9-5-4-1	利用骰子遊戲模擬實際情境，期望學生能融會貫通所有機率概念，在遇到問題能自行設計試驗，使問題有效被解決。而此問題因具有深度及廣度，因此非常適合小組討論，以利激發學生靈活解決問題的策略	開放式問題、貫穿所有機率課程
9-5-4-1-段-1	隨機試驗能用古典機率解決的問題相當有限，但如果我們願意接受一點誤差利用頻率機率方式估計，也是一種解決策略，這樣說來如何將情境問題轉化成適當的隨機工具是相當重要，而其中電腦若作為「模擬」工具將是快速且有效的解決方式	模擬之概念教學
9-5-4-1-段-2	舉出很難利用古典機率計算機率值的實例，以增強電腦模擬頻率機率的動機。接著定義「模擬」估計的過程及概念	實例教學、定義教學
9-5-4-1-段-3	教學電腦模擬的邏輯運算	引入電腦工具
9-5-4-2	演練熟悉電腦模擬，使情境問題有效被解決	演練 9-5-4-1-段-2、開放式問題、融會

		貫通
9-5-4-3	演練透過電腦快速計算的模擬試驗，使其問題和古典機率之結果相互吻合	演練 9-5-4-1-段-2、開放式問題、融會貫通
9-5-4-4	期望學生能將實際情境問題同構成骰子遊戲，而後將骰子遊戲同構成電腦模擬，使問題被快速的解決，而在此也為未來排列組合課程中的錯排問題留下伏筆	演練 9-5-4-1-段-2、開放式問題、融會貫通、埋下伏筆

2. 適合教材脈絡的分類系統

本節找出教材脈絡分析概念經表格化後的關係，其中發現德國教科書對於編排模式大致可以分成三大流程，分別為：**引入、課程內容、演練**。在這三大步驟下，如何利用有效方法達到學習目標，呈現在表 4-8 中，並在以下說明解釋。

表 4-8 適合教材脈絡的分類系統

類別	細目		
編排流程	引入	課程內容	演練
編寫方法	承先啟後	真實情境	釐清迷思
	不確定性的直覺	清楚定義	多元解決策略

（1）編排流程

德國機率教科書的教材編排模式以分成三大流程，以成為教材脈絡合適的分類系統，以下依序介紹和舉例。

A. 引入

在剛進入新課程單元時，教科書對於導入準備的教學方法，可以就其目的而分成兩種引入法：其一為刺激學生學習動機，使學生知道為什麼要學，以及他能解決什麼樣的問題，如 8-5-6-1；其二為延續先前概念，確認學生已具備先備知識的起點，以利進行新課程的教學，如 6-2-1-2。

8-5-6-1

您可以從數字 1 到 9 中，選擇四個數字作為自行車的號碼鎖。

a）有多少可能的結果？

b）請問隨機轉到「正確」數字的機率是多少？

此題型首先利用列舉出所有的樣本空間，再計算樣本空間個數，即可得知隨機轉到「正確」號碼鎖的機率。但因樣本空間個數過於龐大且重複，引發出之後計數原理的課程目的。

6-2-1-2 Markus 投擲公正的骰子 20 次，出現四次「6」；而 Lena 在 30 次試驗中，得到五次「6」。Markus 聲稱他更頻繁擲到「6」，他的主張是否正確？

此題型利用複習比例概念的問題，進而延伸其概念至絕對次數和相對次數之定義和運算方式，最後將相對次數引導至頻繁性。

B. 課程內容

此為教科書的核心發展，也是教材所要交給學生的課程重要概念，最終目標期望學生能全面性地掌握數學理論的精神意義，並自身內化成為生活中的數學素養，如 8-5-1-2-段-1。

8-5-1-2-段-1 在進行隨機試驗時，會出現幾個可能結果中的一個結果。 你無法預測哪個結果會發生 隨機試驗的所有可能結果的集合稱為結果集。 它被稱為 omega。各個結果被定義為ω_1, ω_2，ω_3… 結果集也代表樣本空間。 Ω：叫做 omega，是希臘字母的最後一個字母。

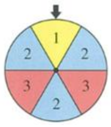
在 8-5-1-2-段-1 中，對於各種集合表示符號及數學關係進行概念上的介紹，其中含有隨機試驗的定義、全空間Ω、事件子集ω_i的課程單元內容。

C. 演練

在經過課程內容的編撰後，為確保學生能正確理解數學意義和熟練解決問題的策略操作，教科書給予合宜的評量演練，使學生能融會貫通單元概念的核心精神，如 9-5-3-

3。

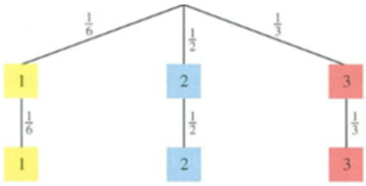
9-5-3-3



轉動命運輪盤兩次。請問出現相同數字的機率是多少？

解決方案：

樹形圖只畫出匹配的部分：



$$P(\text{「兩次相同的數字」}) = P\big((1;1)\big) + P\big((2;2)\big) + P\big((3;3)\big)$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{18}$$

教科書為了評量學生對於獨立性和互斥和概念上的理解，舉出 9-5-3-3 的例子。其解決策略中，期望學生在面對問題情境時，能想像樹狀圖的樣貌，以釐清加法和乘法的數學意義。

（2）編寫方法

德國機率教科書的教材編寫方法有六大特色，分別為延續課程、真實情境、釐清迷思、不確定性的直覺、清楚定義、多元解決策略。以下依序介紹以及舉例。

A. 延續課程

藉由承先啟後的方式，複習先前的知識概念，並為接下來的單元鋪敘，使課程具有連貫性。例如 9-5-2-2、9-5-1-2、9-5-4-1-段-1、8-5-3-3、9-5-4-1-段-3、8-5-6-2-段-3、9-5-2-2-段-3。

9-5-2-2

在 50 名員工中，60%是女性，其中 20%教數學。請問這所學校有多少數學女教師？

此題型除了複習比例概念問題之外，也使學生初步感受獨立性中乘法的數學意義，並透過此題引入接續的獨立性課程。

9-5-1-2
從有 3 個藍球和 2 個紅球的甕中，同時抽出兩個球。
a）給出相對應的所有結果集。
b）這個隨機試驗是否可以繪製成樹形圖？說明理由。

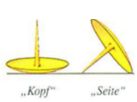
此題為非對稱隨機事件，因此在此情形下若依照先前概念繪製樹狀圖，會發生有資訊無法被呈現出來的現象，而為彌補先前的缺失，埋下對於在樹狀圖的樹枝上賦予數值的接續課程學習動機。

9-5-4-1-段-1
有時不可能計算機率，例如，使用路徑規則或熟練的計算。為了能夠說出關於機率的內容，我們進行了模擬。“模擬”是指通過使用硬幣、骰子、撲克牌或亂數等等適當的工具，對其進行等效隨機試驗的"模仿"，這些工具也可以由電腦提供。然後根據觀測到的相對次數估計未知的機率值。

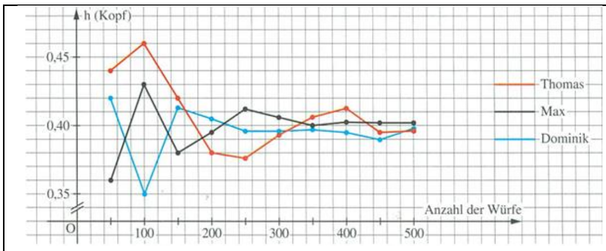
在 9-5-4-1-段-1 的敘述中，整合先前機率課程內容，其中「使用路徑規則」為 9-5-2 機率的乘積（獨立性）和 9-5-3 機率之和（互斥和事件），「熟練的計算」為古典機率運算規則（例如單一事件、餘事件……），「相對次數」為 6-2-1-2-段-3 相對次數的計算，如闡述故事般的方式告訴學生接下來「模擬」課程的數學意義、操作過程和重要性。

6-2-3-2-段-2
大數的經驗法則
如果經常進行隨機試驗，則每個結果的相對次數都穩定下來，它們會穩定在某個值附近。
我們預計這個值將接近此結果的實際機率。

8-5-3-3



Tina 聲稱投擲圖釘出現「尖頭向上」的機率是 40%。
Thomas、Max 和 Dominik 想要檢查這個機率是否正確，因此分別將圖釘扔擲 500 次，並將結果的絕對次數和相對次數記錄在圖表中，分別區分 50、100、......、500。
你有理由質疑 Tina 的說法嗎？
解決方案：



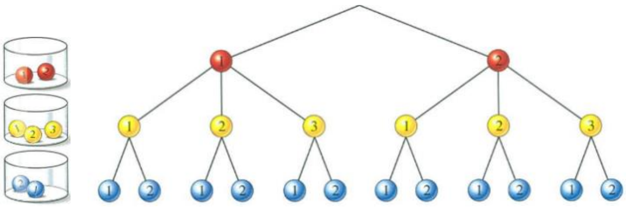
從圖表中得知相對次數將穩定在 0.40，因此 Tina 的聲明得到支持。

在 6-2-3 相對次數和機率單元中，教學目標著重在相對次數的介紹，接著舉了很多相對次數的例子，其中每次實例的隨機試驗次數越來越多，進而引導學生當試驗次數越來越大量時，就會越來越接近實際機率值，但此時很多機率的概念還沒進來，所以無法和學生清楚解釋大數法則的意義，因此留下伏筆到 8-5-3 相對次數和機率一樣的單元主題，延續了 6-2-3 相對次數的概念銜接著到 8-5-3 頻率機率，並在 8-5-3-3 驗證了大數法則的形式化數學定義。

9-5-4-1-段-3
通常可以使用電子試算表在電腦上進行模擬。
這提供 0 和 1 之間的隨機數，例如 0.9123560112。
如果您只想生成隨機數 0 和 1，則必須使用適當的算術運算來完成此操作。
這就是你得到的
a）大於或等於 0 且小於 1 的隨機數：RANDOM_COUNT（）
b）隨機數 0 或 1：整數（RANDOM_COUNT（）* 2）
c）隨機數 1,2,3,4,5,6：INTEGER（RANDOM COUNT（）* 6）+1

當學生經過先前的教學累積後，為確保學生融會貫通頻率機率的概念，利用電腦軟體模擬試驗，其一加深了學生對於頻率機率的概念；其二藉此增廣了學生對於電腦軟體的操作，以優化頻率機率的人工試驗，且更能貼近現今處理機率模型問題的策略方法。

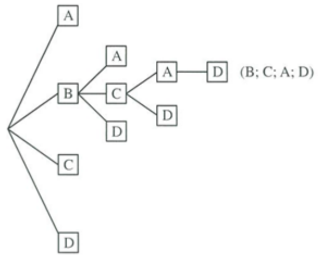
8-5-6-2-段-1
要計算事件的拉普拉斯機率，必須確定“可能”和“有利”結果的數量。
如果從左示的圓柱體 A，B 和 C 中抽球，那麼可以用樹狀圖來說明可能性的總數。



甕 A 有 2 個選項，甕 B 有 3 個選項，甕 C 有 2 個選項，可供選擇。

總體而言，產品結果會給出可能的結果為$2 \times 3 \times 2 = 12$
這種確定可能性數量的方法稱為產品規則或計數原則。

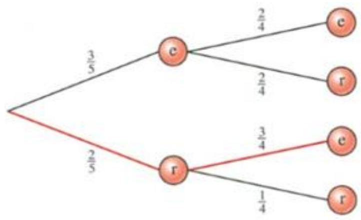
8-5-6-2-段-3



如果一個接一個地依次從一個具有可區分對象的甕中抽取一個，則同樣可以應用計數原則。
例如，A，B，C，D 四個學生將被抽籤。
為有四個沒有人的位置，學生們伸手到一個甕裡，每人抽出一個。
第一個學生有 4 個選項，第二個仍有 3 個選項，第三個 2 個選項和第四個 1 個選項。
總共有 4×3×2×1=24 種可能性。
在結果（B；C；A；D）中，第一個學生在位置 B，第二個在位置 C，第三個在位置 A 和第四個在位置 D。
每個可能的結果都是四個字母的排列。

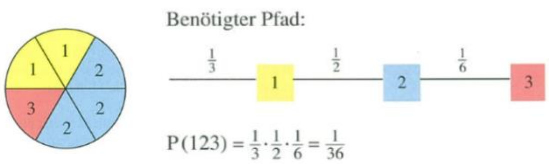
在 8-5-6-2-段-3 的解決策略本應從學生逐一地繪製出樣本空間才能得知有 24 種可能的結果（如 8-5-6-2-段-1 完整的樹狀圖），但教科書期望學生能自我想像樹狀圖的樣貌，並只繪製感興趣的其中一條樹枝途徑就可得知此樣本空間個數為 24 個，此題為非重複選取的問題，但若學生能清楚理解此問題情境之解決策略的發展過程，將能有效的理解之後的計數原理概念。

9-5-2-2-段-1



從甕中抽出兩個球而不更換。
兩階段隨機試驗的結果集為 Ω ={ee，er，re，rr}。
在所示的樹形圖中，為各個分支輸入相應的機率。
為了計算路徑的機率，例如，屬於結果"re" 的路徑機率我們考慮了預期的相對次數。
如果我們要進行 100 次隨機試驗，我們預計在第一次抽出約$\frac{2}{5}$的情況下，即 40 次，被送到 r 的分支。
在這四種情況下，從 r 到 e 的分支在這些情況的$\frac{3}{4}$中被採取第三次抽出，即 30 次。
總體而言，100 次重複的比例$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$，即 30 次重複採取的路徑。
所以我們得到：P（re）=$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

9-5-2-2-段-3



通常你只會將一部分興趣畫在樹狀圖上。
例如，如果您連續旋轉三次命運之盤，並對事件 123 的機率感興趣，則繪製相鄰路徑就足夠了。

9-5-2-2-段-3 從具體樹狀圖的樹枝上寫上數值（如繪製成 9-5-2-2-段-1）到能抽象想像樹狀圖樣貌後，選取題意所需的樹枝路徑進行獨立性概念的操作。此有階段性步驟化的學習鷹架是德國教材編寫方法特色之一。

B. 真實情境

藉由對於真實生活情境的機率問題，進行實作、探討以及反思，使學生和真實世界產生連結，例如 6-2-1-1-段-1、8-5-2-1-段-1、9-5-2-2-段-1。

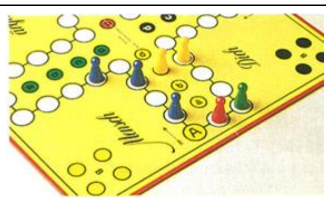
真實生活情境包括有投擲圖釘（6-2-1-1）、積木（6-2-3-1）、骰子（7-6-1-4）、硬幣（8-5-2-1）、籃球（9-5-2-6）、抽取球（8-5-3-1）、彩票（8-5-4-2）、卡片（8-5-5-2）、襪子（9-5-3-1）、生熟雞蛋（9-5-3-2）、報章雜誌（6-8-5-1）、解鎖密碼（8-5-6-1）、賽馬（8-5-6-2）、旋轉輪盤（8-5-6-3）、座位安置（8-5-6-4）、彈珠檯（9-5-1-3）、海關抽檢（9-5-2-5）、班級喜好（6-2-2-1）、居住地（6-2-2-2）……等等。

6-2-1-1-段-1

當你轉動幸運輪盤之後，指針將會停止在 12 個數字中的其中一個上面。
結果會顯示什麼數字，你是無法預測。
這種試驗被稱為隨機試驗。

隨機試驗的定義相對於學生較於枯燥乏味且深奧抽象，因此若能在介紹定義之前給學生一個曾經體驗過的實例感受其數學意義，讓學生對於陌生的數學名詞有著初步的想像。

8-5-2-1-段-1



在滾動骰子的情況下，結果集 Ω= {1;2;3;4;5; 6}。
在「德國傳統遊戲」中，當投擲至“偶數”時，在下一次紅色將跳過藍色。就是當投擲至 2，4 或 6 的這種情況。我們將寫這個事件 A ={2;4;6}。
A 是結果集 Ω 的子集，因為 A 的每個元素都包含在 Ω 中。
可以寫成：A ⊂ Ω（讀：A 是 Ω 的子集）。

如果投擲的結果是 2，4 或 6，你會說：事件 A 發生。
如果結果是 3，則 A 不會發生。

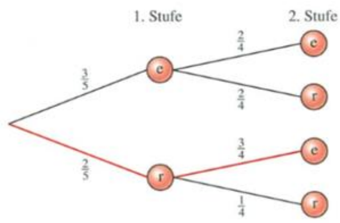
樣本空間的符號表示對於學生來說是第一次看到的東西，它包含著

$$事件集合的名稱 = \{事件元素；事件元素；...\}$$

其中概念又含有全空間表示為 Ω 和事件子集合的包含關係，因此若能直接舉例說明其中的關聯，對於學生會更加有概念上的連結。

9-5-1-2
從有 3 個藍球和 2 個紅球的甕中，同時抽出兩個球。
a）給出相對應的所有結果集。
b）這個隨機試驗是否可以繪製成樹形圖？說明理由。

9-5-2-2-段-1
從甕中抽出兩個球而不更換。
兩階段隨機試驗的結果集為 Ω ={ee，er，re，rr}。
在所示的樹形圖中，為各個分支輸入相應的機率。
為了計算路徑的機率，例如，屬於結果"re" 的路徑機率
我們考慮了預期的相對次數。



如果我們要進行 100 次隨機試驗，我們預計在第一次抽出約$\frac{2}{5}$的情況下，即 40 次，被送到 r 的分支。
在這四種情況下，從 r 到 e 的分支在這些情況的$\frac{3}{4}$中被採取第三次抽出，即 30 次。
總體而言，100 次重複的比例$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$，即 30 次重複採取的路徑。
所以我們得到：P（re）$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

對於剛起步教學獨立性概念時，教科書在 9-5-1-2 留下一個伏筆表示當非對稱隨機事件發生時，不能利用先前習得的樹狀圖去表現問題情境；又或者說是，這樣的樹狀圖表示得很繁複：首先把所有球都標上不同的編碼，以符合拉普拉斯的隨機試驗條件，然後就可以依然利用先前的概念繪製成樹狀圖，如圖 4-2 所簡示。

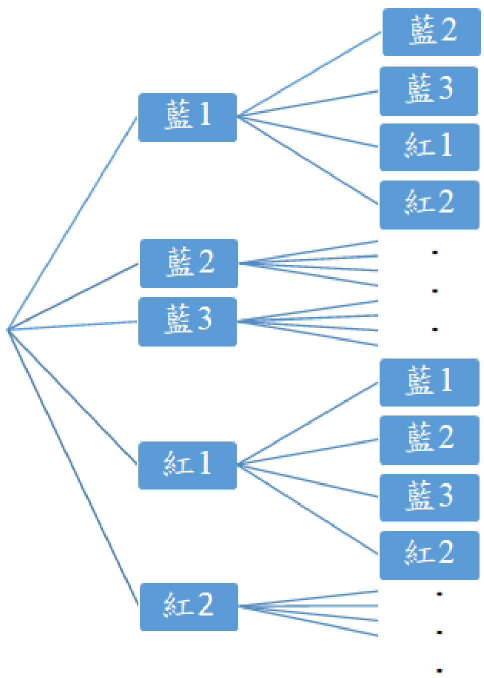


圖 4-2 德國教科書 9-5-1-2 之樹狀圖 1

而接著發現圖中所省略的是一個不斷重複的部分，這會使樹狀圖變得很龐大繁瑣，因此若在此時引入將樹狀圖的樹枝上寫上數值是可以節省很多時間。教科書也使用 100 次隨機試驗中，預計所抽取籃球與紅球出現的比例來解釋為何在樹枝上寫上數值是有道理的，而此道理換句話說，只是把圖 4-2 同構成圖 4-3，其中不同樹枝的粗細代表此路徑的機率值不同。

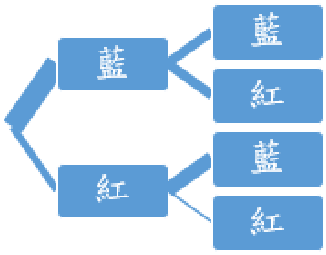


圖 4-3 德國教科書 9-5-1-2 之樹狀圖 2

而因數學計算方便不可能每次都用粗細代表機率值大小勢必需要賦予一個精確的數值，再加上每個分支點都是發生一個事件，因此藉由先前的教學得知所有隨機事件的子集機率值總和為 1，所以把其數值單位化，進而繪製如圖 4-4 所示之樹狀圖。

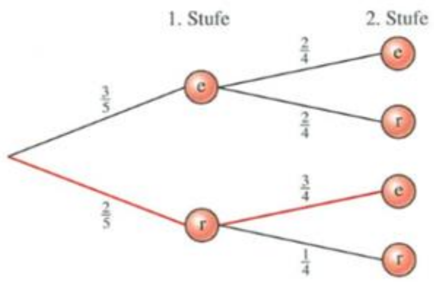


圖 4-4 德國教科書 9-5-2-2-段-1 圖示

此教學過程讓學生真實感受樹狀圖的樹枝上寫上數值和獨立性的運算概念，以利之後不易被刁鑽題型所混淆運算規則。

C. 釐清迷思

為了讓學生釐清相似或者容易迷思的重要概念，故意設下陷阱使學生掉入邏輯的漩渦後，再經由解釋告訴學生其中矛盾點，例如 6-8-5-1-段-1、8-5-5-1-段-4、6-2-1-4、9-5-2-3、9-5-2-1。

6-8-5-1-段-1（擷取部分訊息）

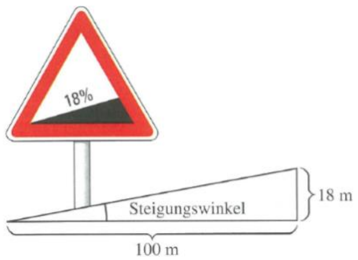
百分比和圖表被廣泛使用，特別是在廣告或報紙上的事實陳述。

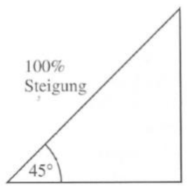
你可以找到一次又一次的錯誤或不完整的陳述歪曲事實例子，通常為故意選擇給予錯誤印象的表示形式。

或是可以找到使用百分比時，不參考基本值，甚至基於錯誤的基本值。

例如；銷售量增長 50%可能意味著，不是兩輛車賣出而是三輛車被賣出，或是銷售數量也從 200 輛大幅增加到 300 輛。

如果據報導價格下跌了 100%，那很可能意味著降價 50%。例如：從 1000 歐元降至 500 歐元的含義。 舊價格比新價格高出 100%。





Steigungswinkel 坡度角　100%Steigung　100%的梯度

交通標誌上的“18%坡度”是指在水平距離 100m 處的高度差為 18m，因此 100%的坡度對應於 45 度的坡度角，而不是經常被錯誤地假設為 90 度的坡度角。

此題故意先在 6-8-5-1 中考驗學生平時對於平均坡度、成長率、衰退率、投票率以及離婚率等相對次數名詞的認識程度，並藉由這些專有名詞的敘述看看學生是否被報章雜誌的術語所誤導，進而期望學生能釐清迷思概念，並加強記憶的效果。

8-5-5-1-段-4

拉普拉斯假設是否有意義取決於結果集的選擇。例如，如果您對投擲兩個理想硬幣發生的頻率感興趣，則可以設想以下結果集：

Ω_1 ={無數字：正好一次數字：兩次數字}或者當區分硬幣時（例如，透過顏色）

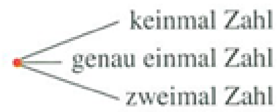
Ω_2 ={頭頭；頭數；數頭；數數}。

對於事件 A 的機率：“恰好一次數字”，

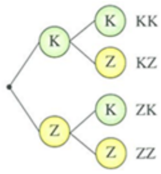
根據結果集的選擇使用公式得出不同的值：$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{2}$。

這是因為拉普拉斯假設只對Ω_2有意義，但對於Ω_1不適用。

對於Ω_2，認為事件“恰好一次數字”的發生有兩種不同的可能性。因此公式只對Ω_2有用，並導致機率為$\frac{1}{2}$。



無數字
正好一次數字
兩次數字

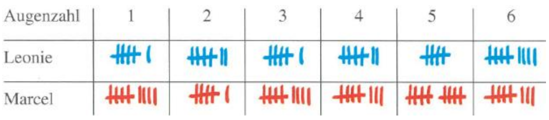


對於一些隨機的試驗，例如：“投擲圖釘”的結果。Ω={尖端朝上、尖端朝下}

拉普拉斯假設也似乎不合理，所以公式$\frac{|A|}{|\Omega|}$是不適用的。

此階段的教學藉由投擲硬幣後，因樣本空間關注的特點不同，導致列出不同的結果集，因此有著不同的機率值，但此違反機率的定義，勢必其一是有問題的，然後再解釋為何樣本空間Ω_1是有誤的，藉此告訴學生反例，避免再次犯同一錯誤。

6-2-1-4



Leonie 和 Marcel 投擲一個公正的骰子，比較其結果。

誰擲出「4」的比例較大？

解決方案：

結果顯示 Leonie 擲了 40 次，Marcel 擲了 50 次。

Leonie 擲出「4」的絕對次數是 7，Marcel 擲出「4」的絕對次數是 8。

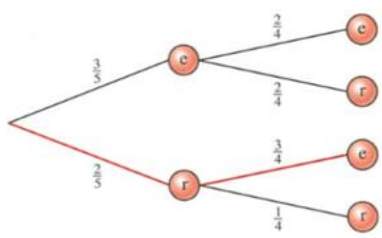
而 Leonie 擲出「4」的相對次數是$\frac{7}{40}$= 0.175= 17.5%，

Marcel 擲出「4」的相對次數是$\frac{8}{50}$ = 0.16= 16%。

雖然 Marcel 擲出「4」的絕對次數較大，但 Leonie 擲出「4」的相對次數比例更高。

此題除了演練絕對次數和相對次數的運算規則之外，也提醒學生絕對次數大不一定相對次數大的迷思概念反例，而根據數學的意義機率值應著重於相對次數的概念。

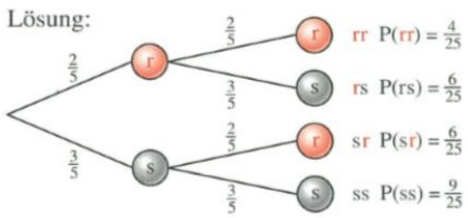
9-5-2-2-段-1



從甕中抽出兩個球而不更換。
兩階段隨機試驗的結果集為 Ω ={ee，er，re，rr}。
在所示的樹形圖中，為各個分支輸入相應的機率。
為了計算路徑的機率，例如，屬於結果"re" 的路徑機率
我們考慮了預期的相對次數。
如果我們要進行 100 次隨機試驗，我們預計在第一次抽出約$\frac{2}{5}$的情況下，即 40 次，被送到 r 的分支。
在這四種情況下，從 r 到 e 的分支在這些情況的$\frac{3}{4}$中被採取第三次抽出，即 30 次。
總體而言，100 次重複的比例$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$，即 30 次重複採取的路徑。
所以我們得到：P（re）$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$

9-5-2-3

從甕中依序抽出兩個球，每次抽完放回甕中。
繪製樹形圖，並指定分支和所有結果的機率。



研究者將 9-5-2-2-段-1 和 9-5-2-3 演練題中實例作為比較，若假設某情境問題如下「甕中有 2 顆紅球和 3 顆黑球，若依序抽取兩次先取到紅球而後黑球，則機率值為何？」9-5-2-2-段-1 為取後不放回，則機率值為$\frac{3}{10}$，9-5-2-3 為取後放回，則機率值為$\frac{6}{25}$。若學生能清楚兩者之間計算機率值的差異，則對於獨立性概念將得以清晰明瞭。

9-5-2-1

擲骰子時，你擲到一個 6 的機率為$\frac{1}{6}$，所以在 6 次投擲中你能擲到 6 的機率為

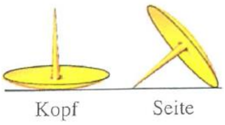
$\frac{6}{6}=100\%$，你覺得呢？

利用誇張的迷思概念，讓學生直觀感受獨立性事件絕對不可能為加法運算規則，否則事件的機率值不合理乎定義，在此也釐清加法原理和乘法原理之間的數學義意。

D. 不確定性的直覺

學生能利用主觀直覺的想法解決問題，而判斷依據可能來自平時生活經驗的累積，或是對於數感的直覺，形成解決問題的策略，例如 6-2-1-1（a）、6-2-3-1、9-5-2-1。

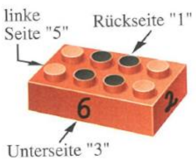
6-2-1-1



投擲一個圖釘，它會出現的結果為尖端朝上或尖端朝下。
a）請預測在 20 次試驗中會有幾次出現尖端朝上的結果。

此題藉由投擲圖釘的結果，引入頻繁性課程，其中隱藏著絕對次數的數學概念，刺激學生對於頻繁性的學習動機，再加上此情境問題會因圖釘構造不同而造成影響，因此並無準確的機率值，所以只要學生的答案合情合理即可，此不確定性概念將埋入學生的心中。

6-2-3-1



不要使用公正的骰子投擲，拿一個「凸八點」的樂高積木，如左圖所示。每面和對面的數字和為七。
請估計投擲「凸八點」的樂高積木時，每面出現的相對次數（百分比）為何？

此題引入方式為投擲「凸八點」的樂高積木結果，和 6-2-1-1 比較發現差異為二，其一為從直觀的詢問絕對次數到探討相對次數值，藉此除了複習相對次數的概念教學外，更隱藏著相對次數具有代表頻繁性的數學意義；其二為從固定次數的試驗結果轉為無限制次數的試驗結果，在此埋下對於接下來的大數法則的概念。

9-5-2-1

擲骰子時，你擲到一個 6 的機率為$\frac{1}{6}$，所以在 6 次投擲中你能擲到 6 的機率為

$\frac{6}{6}=100\%$，你覺得呢？

此題為獨立性單元的第一道引入題目，透過對於已知機率值概念的衝擊，提醒學生獨立性事件的運算絕非加法，若利用加法方式計算將和先備知識產生矛盾。此題作為獨立性的引入具有警告的意味，防止學生對於獨立性的運算為加法或乘法產生混淆。

E. 清楚定義

教科書透過多加外框、粗體字的表現和條列式的方式，清楚明瞭地總結教材內容的重要數學概念，使得學生對於課程內容有著系統化的處理，並能更使記憶力加深的效果，例如 6-2-1-2-段-1、9-5-2-2-段-2。

6-2-1-2-段-1

Erkennungsmerkmale eines Zufallsexperimentes
Bei der Durchführung des Experimentes gilt:
1. Es wird genau ein Ergebnis von mehreren möglichen Ergebnissen eintreten.
2. Welches Ergebnis auftreten wird, lässt sich nicht vorhersagen.

隨機試驗的特徵
在進行試驗時：
1.可能的結果有好幾種，但只會有一個結果。
2.哪個結果將會發生是無法預測的。

在此清楚說明隨機試驗的兩大特徵，因此若執行某試驗不符合其中任一條件的話，將不能視此為隨機試驗。

9-5-2-2-段-2

1. Pfadregel:
Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses**, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert.

第一條路徑規則：
在多階段隨機試驗中，結果的機率是通過在樹狀圖中沿著相關路徑乘以機率獲得的。

9-5-2-2-段-2 總結先前對於獨立性的概念教學，並清楚地讓學生知道獨立性的運算規則。

F. 多元解決策略

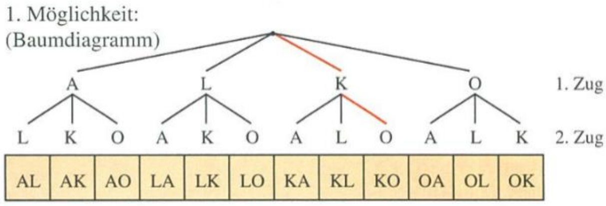
多元的解題方式，例如 8-5-4-4、9-5-3-2。透過反向思考的逆推方式，使學生靈活地解決情境問題，例如 8-5-5-1、9-5-2-5-段-1。透過開放式問題，使解決策略不受限制，例如 9-5-4-1。

8-5-4-4

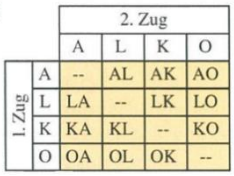
在一個襪子中，有四個球分別是字母 A、L、K、O。
依序抽出兩個球且不放回，將這兩個字母按照順序組合成一個「單詞」，則組成單詞「KO」的機率是多少？

解決方案：

第一種可能性:
（樹狀圖）



第二種可能性:
（表）

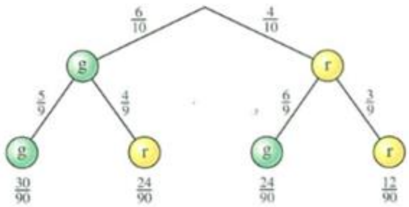

2. Möglichkeit:
(Tabelle)

1. Zug \ 2. Zug	A	L	K	O
A	--	AL	AK	AO
L	LA	--	LK	LO
K	KA	KL	--	KO
O	OA	OL	OK	--

從樹狀圖中可以看到共有$4 \times 3 = 12$個單詞，但「KO」只能以一種方式出現，因此機率為$\frac{1}{12} \approx 8.3\%$。

此階段為練習列出所有樣本空間的元素，因此教科書提供另一種非樹狀圖也能有系統解決問題的方式，當然在此的教學比例沒有占很大，但是隱藏著告訴學生只要合情合理，解決策略可有自由發揮想像的空間。

9-5-3-2



籃子裡有 6 個熟雞蛋和 4 個生雞蛋。
事件 A 為克里斯汀拿出 2 個雞蛋，則至少選到一個為生雞蛋的機率是多少？
解決方案：
在樹形圖中，「g」代表熟雞蛋和「r」代表生雞蛋。
方法一：
至少有一個「r」的所有路徑的機率：

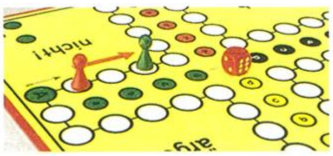
$$P(A) = P(\{gr; rg; rr\}) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

方法二：
考慮事件：兩個雞蛋都是熟的

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(gg) = 1 - \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

此題透過多元解題策略，讓學生除了演練到獨立性、互斥和事件的運算規則之外，也複習先前餘事件概念的計算方式，使得學生更加全面地掌握機率概念。

8-5-5-1



Julia 在 Heinz 身後兩格，再來輪到她擲骰子前進，請問 Julia 超越 Heinz 的機率是多少？
那請問 Julia 該站在哪裡，使 Julia 超越 Heinz 的機率恰好

是 50%？

此演練題型比起傳統典型問題，如「投擲一公正骰子，其點數為偶數機率為何？」的問法這一題組靈活許多，其中第一個問題是固定情境問 Julia 會超過 Heinz 的機率，另一題是固定機率值問學生在什麼情境下吻合。

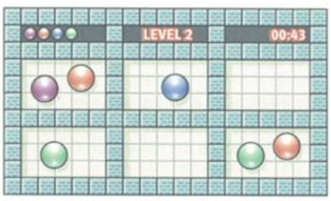
9-5-2-5
現在海關裡有 9 人，而其中 4 人為走私犯。一位海關官員要求對 9 人中的 3 人進行抽樣檢查。
解決方案：
這 9 人只分走私者或非走私者。
感興趣的路徑為：

P（sss）$=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{21}$

9-5-2-5-段-1
由於機率低於 5%，海關官員會對走私者有特別好的感覺。

此 9-5-2-5-段-1 問題延續 9-5-2-5 的提問，學生可以從觀察 9-5-2-5 的結果中發現 $\frac{1}{21}\approx 0.0476$，其實已經相當接近 5%，所以只需檢查若走私販為 5 人時是否還符合低於 5%的條件，但$P(sss)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\approx 0.1190$，顯然已超過 5%，此情境問題刺激學生對於獨立性的機率概念有著多元面向的認識。但若將解決策略想成$\frac{C_3^n}{C_3^9}\leq 5\%$，其 n 表示為走私人數，那在此將埋下未來對於排列組合選取問題的課程連結。

9-5-4-1



在電腦遊戲中，六個球隨機落入六個槽中。
如果每個槽中都恰好有一個球，你就會獲勝。
Jan 和 Heike 正在思考如何使用骰子進行類似的遊戲，以至勝算和他們在電腦遊戲中的機率相同。
描述骰子遊戲。

所有 9-5-4 模擬隨機試驗的演練題都是適合拿來作為小組討論的任務專題，因為這四題都沒有絕對的解答方式，所有解題概念都是建立在先前的機率概念和平時創意邏輯的思維。而本研究也在此節的（二）概念化之質性分析結果中的「1.文字化資料分析

（1）教材脈絡分析及解釋 D.九年級教材脈絡之敘述」（頁 68），提供這四題的參考解法策略。

（三）「命題化」之質性分析結果

本節探究「概念化」資料中的關係，並抽絲剝繭找出其中主旨與趨勢，而後巧妙的抓住研究樣本的亮點關鍵，進而形成命題。

針對本研究質性分析結果給予如下兩個命題：

- 命題一：德國機率教科書有著一定關係的課程編排模式
- 命題二：德國教科書機率課程內容的編寫方法豐富多變

（四）「圖表化」之質性分析結果

此「圖表化」步驟為驗證「命題化」之質性分析結果。以下利用兩大命題作為呈現「圖表化」之質性分析結果。

1. 命題一：德國機率教科書有著一定關係的教材編排模式

本節發現德國機率教科書的教材內容編排上分為四大主線，其中教材主題包括圖 4-5 隨機試驗、圖 4-6 機率概念、圖 4-7 多階段機率概念、圖 4-8 模擬隨機試驗。其中框框顏色為橘色代表「引入」、藍色代表「課程內容」、綠色代表「演練」，而有雙色代表兩者皆有，例如 6-2-2-1 由綠色轉為橘色，意為本身為頻繁性的演練題，但也是列聯表工具教學的引入動機。

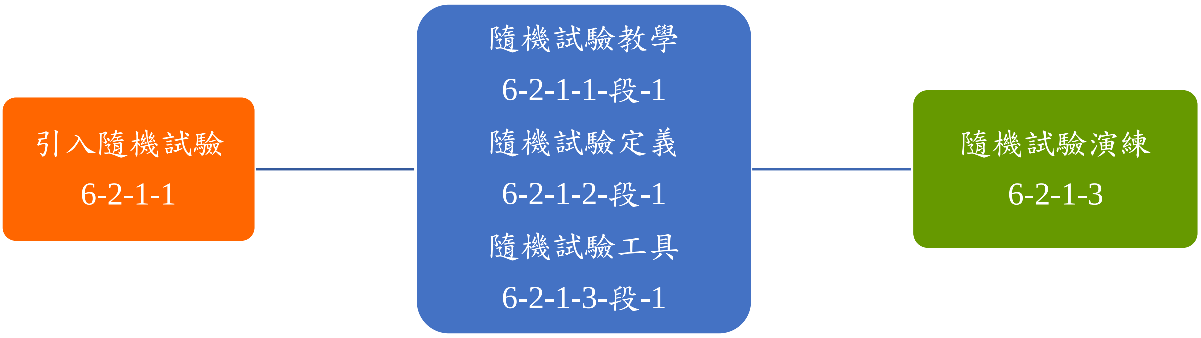


圖 4-5 「圖表化」之隨機試驗主題

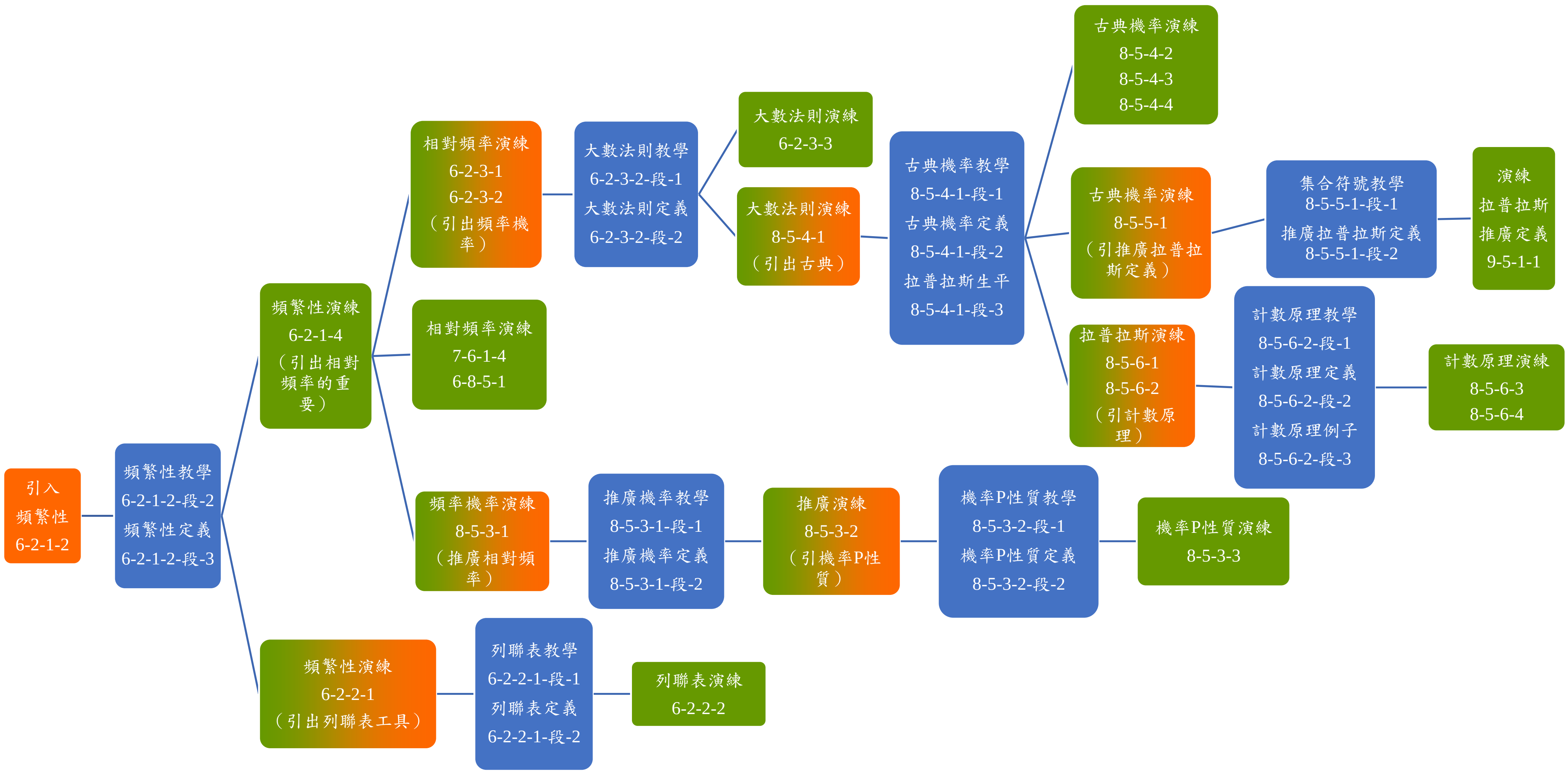


圖 4-6 「圖表化」之機率概念主題

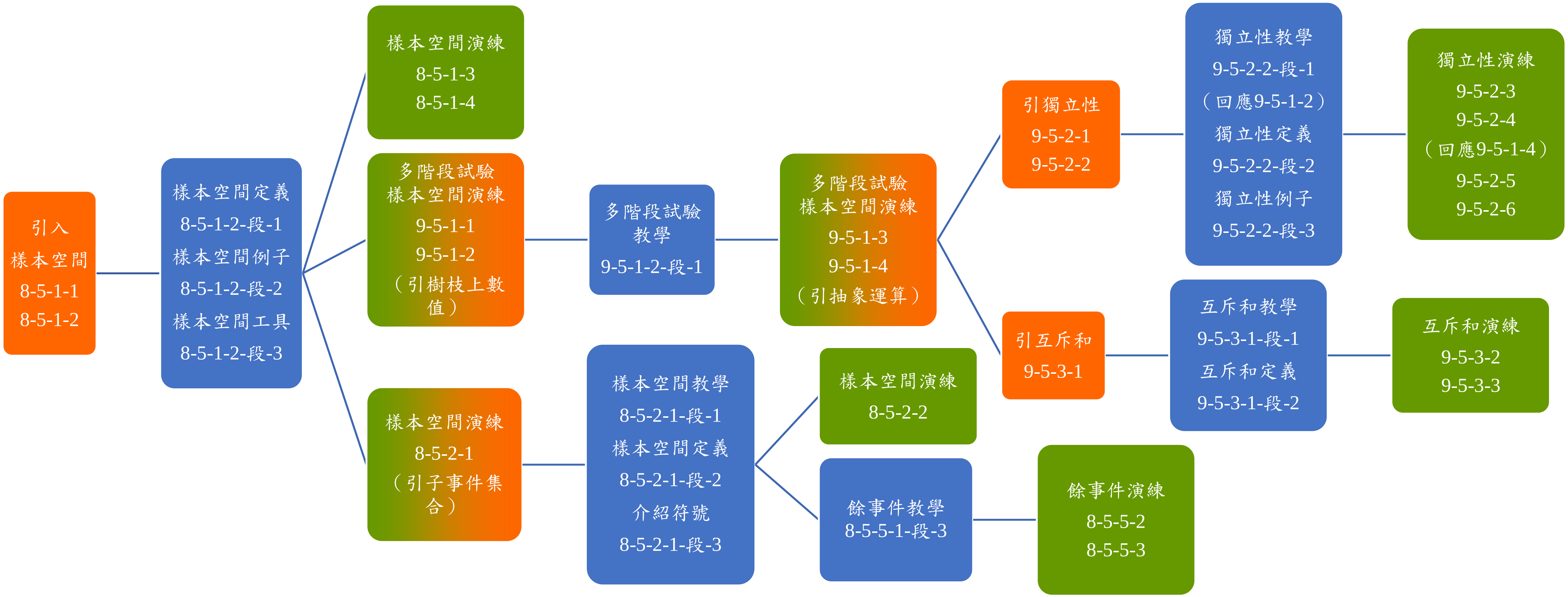


圖 4-7 「圖表化」之多階段機率概念主題

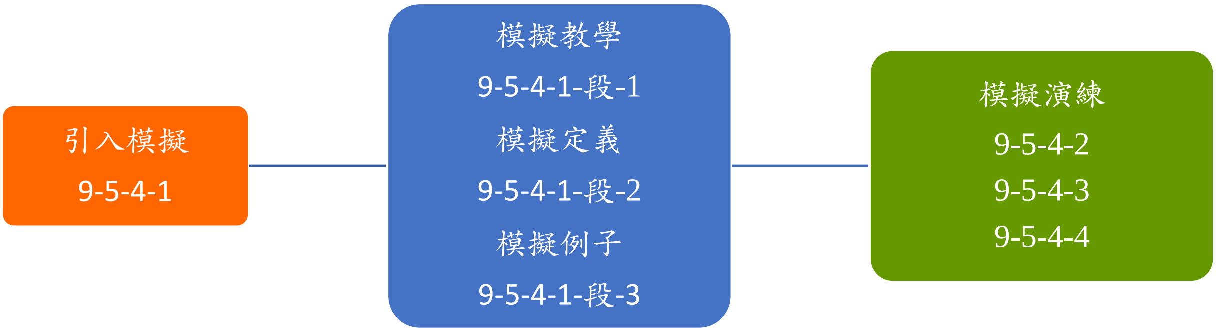


圖 4-8 「圖表化」之模擬隨機試驗主題

在德國教科書「引入」的教學方式皆為題目、「課程內容」以文字敘述為主，其中將舉實例串聯、「演練」皆為題目，整個機率課程的教學模式離不開以「引入」、「課程內容」、「演練」的教學編排進行。其中四大主線之教材主題也是依序此教學模式，分別為以「隨機試驗」作為「引入」機率課程的前提條件，而後介紹「機率概念」和「多階段機率概念」作為機率單元核心「課程內容」，最後藉由「演練」「模擬隨機試驗」作為機率課程的總結。

在圖 4-6 和圖 4-7 中，「機率概念」和「多階段機率概念」的關係圖是無法分得清清楚楚的，例如：9-5-1-1 應和 8-5-1、8-5-4 相關聯，但因論文版面和關係階層圖繪製的限制，只好捨棄旁枝末節的關係，著重要關鍵繪製圖 4-5、圖 4-6、圖 4-7、圖 4-8。

2. 命題二：德國教科書機率課程內容的編寫方法豐富多變

本節重頭審視德國機率教材編寫方法的特色，使完整概念化之教材脈絡分類系統的項目，以利驗證命題二的假設。並呈現至表 4-9。

表 4-9 「圖表化」之教材編寫模式

編碼	**引入**	**課程內容**	**演練**	**編寫方法**
6-2				
6-2-1				
6-2-1-1	●			不確定性的直覺
6-2-1-1-段-1		●		延續課程（直觀感覺引至抽象定義）
6-2-1-2	●			延續課程
6-2-1-2-段-1		●		清楚定義
6-2-1-2-段-2		●		實例感受數學意義

6-2-1-2-段-3		●		清楚定義
6-2-1-3			●	真實情境
6-2-1-3-段-1		●		實例感受數學意義
6-2-1-4			●	釐清迷思

6-2-2				
6-2-2-1	●		●	延續課程（引出列聯表工具）、(6-2-1-2-段-3 概念）
6-2-2-1-段-1		●		實例感受數學意義
6-2-2-1-段-2		●		清楚定義
6-2-2-2			●	延續課程（6-2-2-1-段-2）

6-2-3				
6-2-3-1	●		●	不確定性的直覺、延續課程（頻繁性）
6-2-3-2	●		●	不確定性的直覺、真實情境（實作）
6-2-3-2-段-1		●		延續課程（引大數法則之動機）
6-2-3-2-段-2		●		清楚定義
6-2-3-3			●	多元面向（優化解題策略）

6-8-5				
6-8-5-1			●	釐清迷思、真實情境（生活情境用語）
6-8-5-1-段-1		●		釐清迷思

7-6				
7-6-1				
7-6-1-4			●	延續課程（統計單元結合機率）

8-5				
8-5-1				
8-5-1-1	●			不確定性的直覺
8-5-1-2	●			延續課程（引入序對）
8-5-1-2-段-1		●		延續課程
8-5-1-2-段-2		●		實例感受數學意義（8-5-1-2-段-1）
8-5-1-2-段-3		●		實例感受數學意義（樹狀圖）
8-5-1-3			●	延續課程（8-5-1-1）
8-5-1-4			●	延續課程（8-5-1-2）

8-5-2				
8-5-2-1	●		●	延續課程（事件集合）
8-5-2-1-段-1 8-5-2-1-段-2		●		實例感受數學意義（遊戲規則）
8-5-2-1-段-3		●		延續課程、清楚定義
8-5-2-2			●	延續課程（8-5-2-1-段-1、8-5-2-1-段-2）

8-5-3				
8-5-3-1	●		●	延續課程
8-5-3-1-段-1		●		延續課程
8-5-3-1-段-2		●		延續課程（6-2-1-2-段-3）、實例感受數學意義
8-5-3-2	●		●	延續課程（8-5-3-2-段-2）、（8-5-3-1-段-2）
8-5-3-2-段-1		●		延續課程
8-5-3-2-段-2		●		延續課程
8-5-3-3			●	延續課程（8-5-3-2-段-2、驗證大數法則）

8-5-4				
8-5-4-1	●		●	延續課程（頻率機率引入古典機率）
8-5-4-1-段-1		●		實例感受數學意義
8-5-4-1-段-2		●		清楚定義
8-5-4-1-段-3		●		延續課程
8-5-4-2			●	延續課程（8-5-4-1-段-2）
8-5-4-3			●	演練 8-5-4-1-段-2 概念反例
8-5-4-4			●	延續課程（8-5-1-2-段-3、8-5-4-1-段-2）

8-5-5				
8-5-5-1	●		●	延續課程
8-5-5-1-段-1		●		延續課程
8-5-5-1-段-2		●		延續課程
8-5-5-1-段-3		●		延續課程
8-5-5-1-段-4		●		釐清迷思、延續課程
8-5-5-2			●	延續課程（單一事件過渡餘事件）
8-5-5-3			●	延續課程

8-5-6				
8-5-6-1	●		●	延續課程（引入乘法原理）

8-5-6-2	●		●	延續課程（引入乘法原理）
8-5-6-2-段-1		●		延續課程
8-5-6-2-段-2		●		清楚定義
8-5-6-2-段-3		●		加深加廣（「數學教學三步驟」）
8-5-6-3			●	延續課程（8-5-6-2-段-2）
8-5-6-4			●	延續課程（8-5-6-2-段-1）

9-5				
9-5-1				
9-5-1-1	●		●	延續課程（非對稱隨機事件）、開放式問題
9-5-1-2	●		●	延續課程（樹枝上寫數值）、開放式問題
9-5-1-2-段-1		●		延續課程（8-5-5-1-段-4）、釐清迷思
9-5-1-3	●		●	延續課程（9-5-1-2-段-1）
9-5-1-4	●		●	延續課程（計數原理 8-5-6-2-段-2）、（9-5-1-2-段-1）

9-5-2				
9-5-2-1	●			不確定性直覺
9-5-2-2	●			延續課程
9-5-2-2-段-1		●		延續課程（9-5-1-2）
9-5-2-2-段-2		●		清楚定義
9-5-2-2-段-3		●		加深加廣（「數學教學三步驟」、優化 9-5-1-4）
9-5-2-3			●	延續概念（9-5-2-2-段-2）、釐清迷思
9-5-2-4			●	延續概念（9-5-2-2-段-2、優化 9-5-1-4）
9-5-2-5			●	延續概念（9-5-2-2-段-2）
9-5-2-5-段-1		●		延續課程
9-5-2-6			●	延續概念（9-5-2-2-段-2）

9-5-3				
9-5-3-1	●			延續課程（引入互斥和事件）
9-5-3-1-段-1		●		實例感受數學意義
9-5-3-1-段-2		●		清楚定義
9-5-3-2			●	延續概念（9-5-3-1-段-2）、多元面向
9-5-3-3			●	延續概念（9-5-3-1-段-2）

9-5-4	

9-5-4-1	●			延續課程（9-5-4-1-段-2）
9-5-4-1-段-1		●		延續課程
9-5-4-1-段-2		●		清楚定義、實例感受數學意義
9-5-4-1-段-3		●		延續課程
9-5-4-2			●	延續概念（9-5-4-1-段-2）、多元面向
9-5-4-3			●	延續概念（9-5-4-1-段-2）、多元面向
9-5-4-4			●	延續概念（9-5-4-1-段-2）、多元面向

（五）「理論化」之質性分析結果

本節藉由鄭章華（2018）對於「脈絡數學」所依據現實數學教育（Heuvel-Panhuizen and Drijvers，2014）列出的六大原則作為評鑑德國機率教科書之數學素養導向根據，以整合德國機率教科書之質性分析研究結果。以下具體說明六大原則及相對應的德國機率教科書的適合教材脈絡分類系統中的編寫方法。

1. 活動原則

學生為積極主動的參與者，並且「做數學」為最好學習數學的方式。

相對應在此研究中適合教材脈絡分類系統的 B.真實情境、D.不確定直覺，有此原則。因不確定直覺的猜測、在真實情境中，操作、觀察、感受、反思數學意義，皆為「做數學」的行為表現，期望學生能成為自發的探索者，使接著的教學更具深刻。

2. 真實原則

分為兩種方式達成此原則，其一為學生在解決「真實生活」問題時，運用到數學的能力；其二為從對學生「有意義」的問題情境切入數學問題。

在本研究中適合教材脈絡分類系統的 B.真實情境，可藉由上述定義分類至此原則之中，並在本文中對於編寫方法 B.真實情境找到實例。

3. 層次原則

學生從一開始處理非正式、非形式化或較具體化的相關解決方案，到逐漸建立出各

式解題捷徑與模型，在了解策略的背後意義和抽象概念的數學精神後，將經歷不同層次的數學理解。

在本研究中，對於從學生最有感覺的具體教學到抽象化概念的數學公式，中間的過渡方式稱為「數學教學三步驟」，因此在本節之適合教材脈絡分類系統中 A.延續課程找到此原則。

4. 纏繞原則

各個課程章節不被視為孤立的。其中方法可以分成三種層次：延續課程、埋線伏筆、高度課程整合，而為達成此原則的教材應為學生提供多元豐富的問題，使學生靈活利用各種數學工具和知識解決問題。

此原則為本研究教科書中之教材特色，不管是在引入、課程內容、演練都可以找到此原則的編寫方式，而在適合教材脈絡分類系統的 A.延續課程有此原則性質，並在本研究之第二節質性分析結果 一、德國教科書之質性分析結果（四）「圖表化」之質性分析結果的 1.命題一：德國機率教科書有著一定關係的課程編排模式中，呈現德國機率課程整體安排關係圖，其為高度整合機率課程樣貌。

5. 互動原則

透過小組任務和全班討論，提供學生與他人分享戰略和發明的機會，促使學生反思、批判、改進策略的想法，以利學生達到更高的理解水平。

雖然從教科書中較難看出學生是否和他人分享策略，以達自我反思、批判、改進的行為表現，但教師可藉由此研究之適合教材脈絡分類系統的 F.多元解決策略的素材發揮至現場教學，以達到互動原則的效果。

6. 引導原則

教師應在學生學習中發揮積極引導和催化作用，使教育計畫目標「引導再發明」如槓桿般地轉變學生的知識。

在相對應此研究中適合教材脈絡分類系統的 F.多元解決策略有此原則。因學生在解決多元推論和開放式問題時，教師的角色扮演顯得相當的重要，如何利用學生已融會貫通之機率概念，及與生俱來的靈活創意思考策略，以達到「引導再發明」是一個良好的契機。

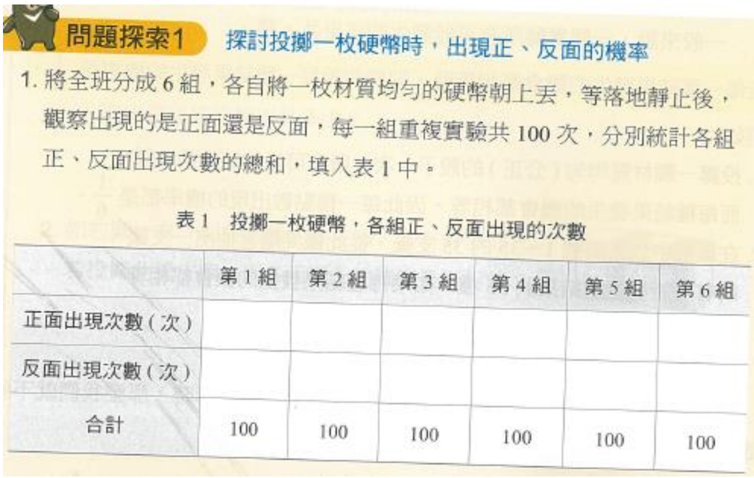
二、臺灣教科書之質性分析結果

本研究因著重於德國機率教科書分析，而上述的教材脈絡分析系統為適合德國機率教科書，因次研究者採取經質性分析之理論化所驗證的系統架構，進行對於臺灣機率教科書之數學素養導向教科書的根據。以下說明利用鄭章華（2018）中六大原則作為臺灣機率教科書之質性分析結果。

（一）活動原則

臺灣教科書在剛進入機率課程之時，透過實例 3-3-1-段投擲硬幣之隨機試驗的小組任務，作為以頻率機率驗證古典機率的試驗，以利之後教學引導至古典機率的學習動機。

3-3-1-段



問題探索1　探討投擲一枚硬幣時，出現正、反面的機率

1. 將全班分成 6 組，各自將一枚材質均勻的硬幣朝上丟，等落地靜止後，觀察出現的是正面還是反面，每一組重複實驗共 100 次，分別統計各組正、反面出現次數的總和，填入表 1 中。

表 1　投擲一枚硬幣，各組正、反面出現的次數

	第 1 組	第 2 組	第 3 組	第 4 組	第 5 組	第 6 組
正面出現次數（次）						
反面出現次數（次）						
合計	100	100	100	100	100	100

2. 根據表 1 將實驗結果填入表 2，並計算正面、反面出現次數與投擲總次數的比值，填入表 2。

表 2　各組累積的正、反面出現次數與投擲總次數的比值

	第 1 組	1～2 組合計	1～3 組合計	1～4 組合計	1～5 組合計	1～6 組合計
正面出現次數（次）						
反面出現次數（次）						
合計	100	200	300	400	500	600
$\frac{\text{正面出現次數}}{\text{投擲總次數}}$（%）						
$\frac{\text{反面出現次數}}{\text{投擲總次數}}$（%）						

（二）真實原則

教科書在小組任務 3-3-1-段試驗結束後，利用醒目顏色對於古典機率公式定義標記，緊接著透過真實情境問題 3-3-1-1 抽取袋中球作為演練古典機率概念習題。

3-3-1-1

隨堂練習

1. 袋中有 5 顆材質完全一樣的彩球，顏色分別為紅、黃、綠、藍、紫。
若從袋中任取一球，則：
(1) 此球的顏色，共有幾種可能的情況？

(2) 取出紫色球的機率是多少？

（三）層次原則

因臺灣六至九年級機率教科書機率課程內容只包含古典機率的概念和樹狀圖的樣本空間教學，因此並無發現層次原則的教材編寫方式。

（四）纏繞原則

臺灣六至九年級機率教科書課程因只在九年級下學期進行課程教學，因此並無發現纏繞原則的課程編排方式。

（五）互動原則

因臺灣六至九年級機率課程中之小組活動只有 3-3-1-段，但在此教學過程中並無法

分享多元解決策略，促使學生達到更高的理解程度，因此此教學歷程只屬於活動原則，並無互動原則的教學特色。

（六）引導原則

在臺灣六至九年級機率課程中情境問題皆有正確解答，若依教科書所給予的教材，教師並無法有發揮引導和催化的空間，因此在此階段中的教材內容，並無發現引導原則。

第五章 結論與建議

本章利用第四章研究結果分為量化分析和質性分析，兩大層面撰寫結論。並將此結論建議給未來對於撰寫機率教科書的作者和研究教科書的教育研究者作為參考。

第一節 結論

本節從兩大研究工具量化和質性之分析結果撰寫結論，以回應對於本研究問題與目的之研究結果。

一、量化分析結論

本研究先呈現機率題數在各年級的分布情形，以利說明機率題目之題型分布趨勢。圖 5-1 為德國機率教科書總題數 74 題和臺灣機率教科書總題數 37 題之分布在各年級的情形。

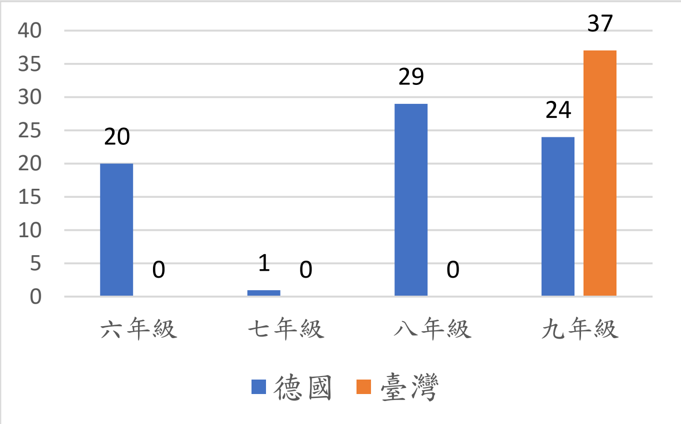


圖 5-1 德臺機率教科書之各年級分布題數

從圖 5-1 中得知德國機率分布在六至九年級，其中七年級較少被提及；而臺灣機率教材只發生在九年級。

接著，本研究利用量化分析細目表作為機率題目之題型分布情形。在量化分析細目表中有兩個向度，其一為機率類型向度，其中分為三個細項：主觀機率、古典機率、頻率機率；另一向度為機率概念層次，其中分為四個細項：單一事件、餘事件、獨立性、互斥和事件。圖 5-2 和圖 5-3 利用長條圖呈現兩向度的兩國機率題型之題數分布狀

況。

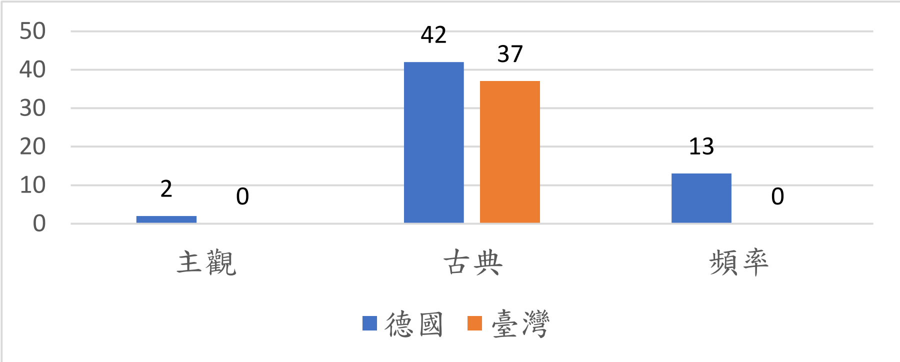


圖 5-2 機率題型分布之機率類型向度

德國教科書機率總題數有 74 題，其中有 17 題被分類至「前機率」的引導性題目，因此只有 57 道題目呈現在圖 5-2 中，從圖 5-2 呈現的結果得知德國機率題型分布在機率類型向度的有主觀機率、古典機率、頻率機率，其中以古典機率占大多數。

在臺灣教科書機率總題數有 37 題，當中並無分類至「前機率」的引導性題目，因此全部 37 道題目皆在圖 5-2 呈現出來，並得知臺灣機率題型只發生古典機率的機率類型。

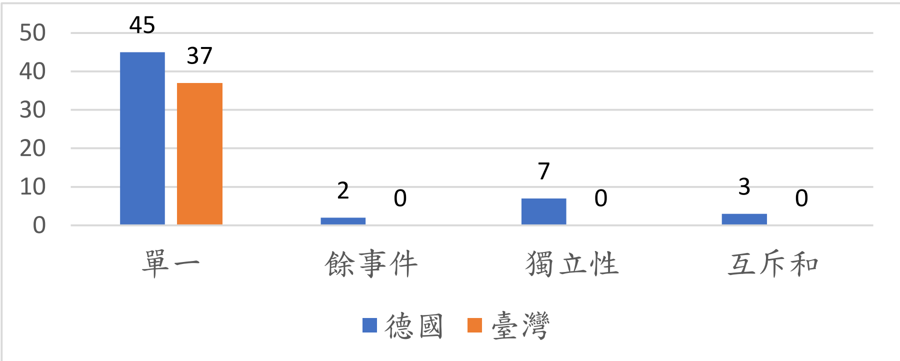


圖 5-3 機率題型分布之機率概念層次向度

從圖 5-3 得知德國教科書機率題型中，在機率概念層次向度上發生了單一事件、餘事件、獨立性事件、互斥和事件。在臺灣教科書 37 道機率題目中只發生了單一事件的機率題型。

整體而言，兩國在初中階段的確都著重發展古典單一事件的機率題型。雖說如此，但德國除了在機率總題數和各機率類型題數多於臺灣之外，更不排斥於發展其他面向

的機率概念，刺激學生多元切入問題的思考習慣，避免同類型的問題僵化了解題策略步驟。

二、質性分析結論

本研究質性分析經張芬芬（2010）五步驟後，得到圖 5-4 呈現德國機率教科書之課程編排模式，以及六大特色的編寫方法，最後利用鄭章華（2018）進而解釋德國機率教科書之數學素養導向的教材。

圖 5-4 德國機率教材脈絡之發展系統

本研究透過分析教科書的教材脈絡後，發現課程安排模式可分成三大部分「引入」課程、「課程內容」教材、「演練」習題，其中教科書細緻的編排方式可參閱第四章第二節質性分析結果（四）「圖表化」之質性分析結果中的命題一。

德國教科書在每次進入新單元時，皆以題目作為引入動機，緊接著以試驗或實例的文字敘述作為課程內容教學，最後再舉些例子以作為演練教學概念的習題。而後學生也可回顧先前引入例子的情境問題，以熟練解決方法的演練程序。而臺灣教科書引入課程和內容教學為同步進行，而皆以文字敘述為主，敘述過程為利用生活中的問題或先前鋪述作為開頭後，接著教學某一定義或性質再舉例予以證實，最後教科書舉些實例以作為學生隨堂的演練。

而在編寫方法上有六大特色，分別為：延續課程、真實情境、釐清迷思、不確定性的直覺、清楚定義、多元解決策略，其中詳細的編寫方式說明可參閱第四章第二節質性分析結果（二）「概念化」之質性分析結果 2.適合教材脈絡的分析系統中的（2）編寫方法。

最後，本研究利用鄭章華（2018）對於兩國機率教科書之數學素養導向的六大原則呈現在表 5-1。

表 5-1 德臺機率教科書之數學素養導向的六大原則

	德國	臺灣
活動	投擲圖釘（6-2-1-1）、紀錄班級喜好（6-2-2-1）、投擲樂高骰子（6-2-3-1、6-2-3-2）、投擲骰子（7-6-1-4）、滾動鉛筆（8-5-4-1）、自製命運轉盤（8-5-1-3）、模擬遊戲（9-5-4-1、9-5-4-2、9-5-4-3、9-5-4-4）	投擲硬幣（3-3-1-段）
真實	投擲圖釘（6-2-1-1）、積木（6-2-3-1）、骰子（7-6-1-4）、硬幣（8-5-2-1）、籃球（9-5-2-6）、抽取球（8-5-3-1）、彩票（8-5-4-2）、卡片（8-5-5-2）、襪子（9-5-3-1）、生熟雞蛋（9-5-3-2）、滾動鉛筆（8-5-4-1）、報章雜誌（6-8-5-1）、解鎖密碼（8-5-6-1）、賽馬（8-5-6-2）、旋轉輪盤（8-5-6-3）、彈珠檯（9-5-1-3）、電腦遊戲（9-5-4-1）、傳統十字遊戲（8-5-5-1）、海關抽檢（9-5-2-5）、班級喜好（6-2-2-1）、居住地（6-2-2-2）、座位安置（8-5-6-4）、出生順序（8-5-1-2）	投擲橡皮擦（3-3-1-2）、投擲骰子（3-3-1-8）、投擲硬幣（3-3-2-1）、抽球（3-3-1-1）、抽糖果（3-3-1-5）、抽籤（3-3-1-6）、抽牌（3-3-1-10）、抽人（3-3-2-3）
層次	從樣本空間到互斥和事件的有層次的階段性教學 樣本空間（8-5-1-1、8-5-1-2-段-2） →樹狀圖（8-5-1-2-段-3、8-5-1-4） →部分樹狀圖（8-5-6-2-段-3、9-5-1-4） →樹狀圖樹枝數值化（9-5-2-2-段-1、9-5-2-3） →獨立性（9-5-2-2-段-3、9-5-2-4） →互斥和事件（9-5-3-1-段-1、9-5-3-3）	因臺灣六至九年級機率教科書機率課程內容只包含古典機率的概念和樹狀圖的樣本空間教學，因此並無發現層次原則的教材編寫方式。
纏繞	呈現至本研究第四章第二節質性分析結果（四）「圖表化」之質性分析結果中的命題一，而以下舉其一例子。 比例問題（6-2-1-2） →相對次數（6-2-1-4）→頻率機率之大數法則（6-2-3-2-段-2、8-5-3-3、8-5-4-1）→古典機率（8-5-4-1-段-2、8-5-4-4）	臺灣六至九年級機率教科書課程因只在九年級下學期進行課程教學，因此並無發現纏繞原則的課程編排方式。

互動	分為兩種方式，以下說明為例。 分享策略：紀錄數據 6-2-2-1（k）、估計機率 6-2-3-2（b）、改變現況 9-5-1-1（c） 小組任務：模擬隨機試驗（9-5-4-1~9-5-4-4）	因臺灣六至九年級機率課程中之小組活動只有3-3-1-段，但在此教學過程中並無法分享多元解決策略，促使學生達到更高的理解程度，因此此教學歷程只屬於活動原則，並無互動原則的教學特色。
引導	模擬隨機試驗（9-5-4-1~9-5-4-4）	在臺灣六至九年級機率課程中情境問題皆有正確解答，若依教科書所給予的教材，教師並無法有發揮引導和催化的空間，因此在此階段中的教材內容，並無發現引導原則。

德國教科書機率課程靈活多元、問題情境真實生活化、且涵蓋教材內容範圍廣泛，再加上緊密連貫合理的課程編排，使教材脈絡如說故事般環環相扣由淺入深的交代劇情發展始末。而臺灣機率教科書課程較於單一且教材內容塊狀，使得學生容易掌握教材內容，對於低程度學習者因和先前課程並無關聯且可速成此技能的發展，因此易於建立學習成就，但相對於高程度學習者可能會對於課程教學顯得無挑戰性。

第二節 建議

本節利用研究結果對於如何實踐於臺灣教學現場的編寫教科書之出版社工作者、制定數學課綱委員、教育現場教師和未來對於教科書研究有興趣之研究者將給予研究者之建議參考。

一、臺灣數學教學現場

本研究利於發展臺灣機率素養教學，其中顯示德國教科書除了將機率課程內容進行螺旋式的編排方式之外，還有豐富的情境問題素材可供教材內容使用，更可能對於計

算機（x!）的工具運用和電腦邏輯運算（模擬）的語言之科技資訊融入教學有著教材模型之參考貢獻。

研究者建議對於未來數學課綱的安排應將機率課程的教學時間拉長，使教學編排為螺旋式，且教材內容更具豐富多元面向的發展。針對拉長教學時間和增加教材內容範圍後，勢必有些課程將被壓縮需進行刪減，而如何在此做出取捨還須請教育背景專業研究人員好好考量。

對於編寫教科書之出版社作者和教育現場的教師而言，德國教科書中有許多多元且靈活的機率情境問題素材，不妨為差異化教學的豐富取材資源，但期望教師能在德國和臺灣教科書中找到良好的平衡點，不應追求廣泛的教材內容和緊湊深入的課程安排，造成學生學習的負擔，以致學習成就低落的反效果。

二、教科書研究者

研究者期望未來能有更多人能利用此附錄一德國機率教科書進行其他面向的量化分析和更加多元角度切入的質性分析，並能研究更多國家的機率教科書，以利歸納其中機率教學核心精神，進而解決前述中對於機率課程的制定課綱及教材編排方式得以更多資料佐證參考，以致臺灣機率教科書更能朝向適應現今社會問題及面對未來未知的挑戰，所應具備的知識、能力與態度的素養教學指南方向前進。

對於本研究因時間上的限制，造成研究者對此論文留下兩點遺憾。其一為因德國巴伐利亞邦中學分為五年級至十二年級，但本研究因研究背景與目的只著重於六至九年級，因此對於其中五年級、十年級、十一年級、十二年級的課程內容未在研究範圍中感到遺憾；其二為對於德國機率教科書中的課後練習題目任務（Aufgaben）、專題研討（Projekt）、延伸閱讀文本（Lesetext）、主題式延伸任務（Thema）和網路延伸任務（Vernetzende Aufgaben）這些有趣又具有豐富機率素養的題材尚未進行研究分析，也感到相當的惋惜。

參考文獻

中文部分

尤欣涵、楊德清（2010）。台灣教研院教材與美國 MiC 教材於機率課程設計上之差異性比較。**臺灣數學教師電子期刊**，22，34-57。取自 https://www.airitilibrary.com/Publication/alDetailedMesh?DocID=18156355-201006-201311010012-201311010012-34-57

王馨梅（2011）。**九年一貫數學教科書之順序性、繼續性及嫌階性分析：以統計與機率主題為例**。國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文。取自 https://hdl.handle.net/11296/4z362a

吳永冬（2017）。**臺灣與大陸中、小學統計與機率教科書內容之比較**。國立嘉義大學師範學院數理教育研究所碩士論文。取自 https://hdl.handle.net/11296/uqt746

張芬芬（2010）。質性資料分析的五步驟：在抽象階梯上爬升。**初等教育學刊**，35，87-120。取自 http://www.airitilibrary.com/Publication/alDetailedMesh?DocID=16816714-201004-201102120018-201102120018-87-120

張芬芬譯（2006），**質性研究資料分析（修定版）**。臺北：雙葉。Miles, M. B. & Huberman,A. M. （1994）. *Qualitative Data Analysis*（2nd ed.）. New York: Sage.

張炳煌（2018）。德國二軌並立學校制度之發展與評析。**當代教育研究季刊**，26（1），1-43。取自 http://contemporary.cere.ntnu.edu.tw/node/857

張嘉育、黃亞君（2019）。德國中等職業學校群科設置及其國家層級課程發展。**教科書研究**，12（3），31-58。取自 https://ej.naer.edu.tw/JTR/v12.3/2019-12-jtr-v12n3-031.pdf

許哲毓、單維彰、劉柏伸（2016）。**樹狀圖在機率教學的應用-臺灣與英國教科書之比較**。國立臺灣大學第四屆師資培育國際學術研討會。取自 https://shann.idv.tw/article/paper2016c.pdf

單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）。以學前診測與自由擬題探討九年級學生的自發性機率概念。**臺灣數學教育期刊**，5（2），39-64。取自 https://www.airitilibrary.com/Publication/alDetailedMesh?docid=P20140415004-201810-201810260001-201810260001-39-64

單維彰（2018）。**建構下一代國中階段數學課綱：機率新課程**。科技部研究計畫，MOST 107-2511-H-008-001。

楊德清、鄭婷芸（2015）。臺灣、美國與新加坡國中階段幾何教材內容之分析比較之效度檢定。**教育科學研究期刊**，60（1），33-72。

劉秋木（1996）。**國小數學科教學研究**。台北市：五南。

劉峻丞（2013）。**台灣與新加坡國中階段教科書統計與機率題目之分析比較**。國立嘉義大學師範學院數理教育研究所碩士論文。取自 https://hdl.handle.net/11296/mdyx2u

鄭章華（2018）。評介素養導向的數學教科書——脈絡數學。**教科書研究**，12（3），87-99。取自 https://www.airitilibrary.com/Publication/alDetailedMesh?DocID=19958856-201812-201901110015-201901110015-87-99

英文部分

Bognár, K.,& Nemetz, T.（1977）. On the teaching of probability at secondary level. *Educational Studies in Mathematics*,*8*(4), 399-404.doi: 10.1007/BF00310944

Carney, T. F. (1990). *Collaborative inquiry methodology*. Windsor,Ontario,Canada:University of Windsor, Division for Instructional Development.

Jones, G.A., Langgrall, C. W.,Thornton, C. A., & Mogill, A. T.(1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 101-125.doi: 10.1023/A:1002981520728

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., & Tarr, J. E. (1999). Understanding students' probabilistic reasoning. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in gradesK-12: 1999 Yearbook* (pp.146-155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Heuvel-Panhuizen, M. van den & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.) (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Science. Retrieved from https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007%2F978-94-007-4978-8_170.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*(pp. 465-494). New York, NY: MacMillan.

附錄

附錄一 德國教科書

因附錄內容過於龐大，共 72 頁，因此資料置於雲端。網址如下。

http://shann.idv.tw/Teach/mathedu/yaxuan/appx-1.pdf

附錄二 臺灣教科書

因附錄內容過於龐大，共 14 頁，因此資料置於雲端。網址如下。

http://shann.idv.tw/Teach/mathedu/yaxuan/appx-2.pdf