

國立中央大學

數學系

碩士論文

97 課綱機率課程

提前至八年級之可行性

The feasibility of moving up the probability
curriculum to grade eight in Taiwan

研究生：簡正倫

指導教授：單維彰

中華民國 108 年 6 月



國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(104 年 5 月最新修正版)

本授權書授權本人撰寫之碩/博士學位論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註 1 說明)，在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。(以下請擇一勾選)

同意 (立即開放)

同意 (請於西元 _____ 年 _____ 月 _____ 日開放)

不同意，原因是：_____

在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

同意 (立即開放)

同意 (請於西元 _____ 年 _____ 月 _____ 日開放)

不同意，原因是：_____

以非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統圖書館與國家圖書館，基於推動「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名：_____ 簡正倫 _____ 學號：_____ 102221009 _____

論文名稱：_____ 97 課綱機率課程提前至八年級之可行性 _____

指導教授姓名：_____ 單維彰 _____

系所：_____ 數學 _____ 所 博士班 碩士班

填單日期：_____ 民國 10 年 7 月 18 日 _____

備註：

1. 本授權書之授權範圍僅限**電子檔**，紙本論文部分依著作權法第 15 條第 3 款之規定，採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽，如您有申請專利或投稿等考量，不同意紙本上架陳列，須另行加填申請書，詳細說明與紙本申請書下載請至本館數位博碩論文網頁。
2. 本授權書請填寫並**親筆**簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應遵守著作權法規定。

國立中央大學碩士班研究生
論文指導教授推薦書

數學 學系/研究所 簡正倫 研究生所提之論文
97 課綱機率課程提前至八年級之可行性 係
由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 單維彰 (簽章)

108年6月26日

104.07.24

國立中央大學碩士班研究生
論文口試委員審定書

_____數學_____學系/研究所__簡正倫__研究生
所提之論文 97 課綱機率課程提前至八年級之可行性
經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人

王牧民

委

員

王牧民

吳裕振

單維朝

中華民國 108 年 7 月 10 日

101.06.13

97 課綱機率課程提前至八年級之可行性

摘要

數學教育裡，機率課程占了重要的一席之地，在我國九年一貫課程綱要中，機率課程一直都是被安排在九年級下學期，但機率問題遍佈於日常生活中，且在數學教育裡扮演著非常重要的角色，九年級才學習顯得太晚，研究者希望探究提前學習機率的可能性，使其自發性的概念與生活及學習作更完整的連結，以貫徹數學作為一種語言的真正意涵。

本研究先探究七年級學生在未接受正式機率課程之前，機率自發性概念的狀況，發現已形成直觀地機率概念。但因為操作機率所需之比例計算在七年級才完備，所以本研究藉由機率課程教學活動，探究機率課程在八年級的學習成效。因此欲探討：1)透過國中機率教學，八年級學生是否有能力可學習國中機率課程？2)若使用樹狀圖作為機率教學的唯一方法，機率學習成效是否提升？3)透過機率教學後，八年級與九年級的學習成效差異為何？

本研究之田野學校共有四所國中約三百五十名學生，且分為兩大部分，分別施以「機率學前診測」及國中機率後測與延後測。研究工具分為四部分，分別為機率學前診測、國中機率教學教案、國中機率後測以及國中機率延後測。研究方法使用獨立與成對樣本 t 檢定及單變異數分析 (ANOVA)，用來分析各項測驗的分數顯著性，及探討各試題的答對率。

根據研究結果顯示，第一，學生在尚未學習國中機率的課程之前，其實已具備一定的主觀機率與古典機率概念。第二，依照國民中小學九年一貫課程綱要教學，八、九年級學習機率課程之學習成效無差別。第三，八年級學生經過樹狀圖教學後，其機率學習有達到成效。最後再根據研究結果於未來機率課程提出若干建議。

關鍵字：數學、機率、樹狀圖、九年一貫課綱、八年級

The feasibility of moving up the probability curriculum to grade eight in Taiwan

Abstract

In mathematics education, the probability course takes an important place. In our national syllabus of Grade 1-9 Curriculum Guidelines, probability courses have always been scheduled for the second semester of the ninth grade. But the problems of probability is everywhere in daily life, and they play a very important role in mathematics education. It's too late to study in the ninth grade, and researchers hope to explore the possibility of learning ahead. We also wish to make the concept of spontaneity more complete with life and learning, and to show the true meaning of implementing mathematics as a language.

This study first explores the situation of the seventh grade students' chances of spontaneous conception before they have accepted the formal probability course. We found that the concept of intuitive probability has been formed. However, because the skills of proportion required for the probability of operation is not completed in the seventh grade, this study explores the effectiveness of the expedition course in the eighth grade by experimental teaching activities. Therefore, the three research questions are: 1) Through the probabilistic course teaching, do eighth grade students have the ability to learn the national probability course? 2) If the tree diagram is used as the only method of probability teaching, is the probability learning effect improved? 3) What is the difference in learning outcomes between the eighth grade and the ninth grade after the probability teaching?

The samples of this study has about 350 students from four schools and are investigated by three tests, namely, "Pre-experience Diagnosis of Probability" and posttest and retentive test of the probability. The research tools are divided into four parts, which are pre-experience diagnosis of probability, teaching plan of probability, posttest and retentive test of the probability. The study used independent and paired sample t-tests and single-variant analysis (ANOVA) to analyze the significance of the scores of each test and to explore the correct answer rate for each test.

According to the research results, first, students have a certain concept of subjective probability and classical probability before they have taken the course of the probability. Second, according to the Grade 1-9 Curriculum Guidelines of the national primary and secondary schools, there is no difference in the learning outcomes of the eighth and ninth grade students on probability materials. Third, after the eighth grade students have experienced the tree diagram teaching, their probability learning has achieved results. Finally, basing on the research results, some suggestions are made in the future probability course.

Key words : mathematics, probability, tree diagram, Grade 1-9 Curriculum Guidelines, grade eight

致謝

在中央數學所碩士班這六年期間，曾經數次想放棄學業，但每每在重要關頭總有貴人拉我一把，不論是數學所的課程、修習教育學程、中壢高商實習階段、國中代課甚至是在育達高中，都得到許多貴人的幫助。

首先要感謝我的指導教授—單維彰教授，在數學科教材教法、教學實習或者通識課程—文化脈絡中的數學，都讓我受益匪淺，在研究方向也給予自由發揮的空間，更在生活的態度、教育的思維，讓我有許多值得效法的地方，在休學期間，即使老師公務繁忙，也會撥空關心我的狀況，督促論文進度，更在論文完成後期給予相當多的協助及鼓勵，促使我有動力完成論文。

接著要感謝中原大學應用數學系的兩位教授，王牧民教授及吳裕振教授，在當時考研究所時期，不厭其煩地給予相當多的指導，幫助解決我在考試科目的各種問題，也鼓勵我努力考上國立研究所，更在論文完成之際，願意擔任論文口試委員，給予許多建議與指導，使得論文研究更加完整。

再來特別感謝學習所學長—許哲毓，在研究方面給了許多方向及建議，也在寫作論文部分給予指導，甚至當我寫一半想放棄時，給我許多鼓勵，在我的論文研究裡扮演著相當重要的角色。還有謝謝劉柏伸、謝一民、張吉逸、許芷雲、黃雅萱、康育綺，在研究所的各個階段，給我想當多的協助。

感謝中壢高商鄭雁云老師、建國國中蔡秀照老師以及育達高中數學科老師們，在教學的各個階段，分享許多教學經驗，使我的教學更多元更豐富。

最後感謝我的家人以及毓琪，在求學的過程中給予支持，讓我能順利完成學業。還有所有可愛的學生，你們的成長及回饋，讓我保有對教育的熱忱，期待將來能成為更出色的老師。

簡正倫 謹誌

民國 108 年 7 月 18 日

目錄

第一章 緒論	1
第一節 研究動機與背景.....	1
第二節 研究目的.....	3
第三節 研究問題.....	4
第四節 名詞釋意.....	4
第二章 文獻探討	7
第一節 機率概念研究.....	7
第二節 機率教學.....	14
第三章 研究方法	19
第一節 研究對象.....	19
第二節 研究流程.....	20
第三節 研究工具.....	23
第四節 資料蒐集.....	35
第五節 資料分析.....	38
第四章 研究結果	39
第一節 機率學前診測.....	39
第二節 機率後測.....	45
第三節 機率延後測.....	49
第四節 結果討論.....	51
第五章 結論與建議	63
第一節 結論.....	63
第二節 建議.....	64
參考文獻	66
一、中文部分.....	66
二、英文部分.....	67
附錄一、機率學前診測	69

附錄二、國中機率教案.....	71
附錄三、機率學習單.....	79
附錄四、國中機率測驗(後測).....	85
附錄五、國中機率測驗(延後測).....	87

表目錄

表 3-1 機率學前診測試題 P12 之原題與改題對照	24
表 3-2 機率學前診測之雙向類目表	25
表 3-3 機率後測試題各題出處與原題對照	28
表 3-4 機率延後測試題與後測試題各題對照	32
表 4-1 各校機率學前診測分數之敘述統計表	39
表 4-2 機率學前診測組內迴歸係數同質性表	40
表 4-3 七年級與九年級機率學前診測分數之敘述統計表	40
表 4-4 機率學前診測七年級與九年級獨立樣本 t 檢定表	41
表 4-5 男生與女生機率學前診測分數之敘述統計表	42
表 4-6 機率學前診測男生與女生獨立樣本 t 檢定表	42
表 4-7 七年級與九年級機率學前診測試題答對率表	43
表 4-8 八年級與九年級機率後測分數之敘述統計表	45
表 4-9 機率後測八年級與九年級獨立樣本 t 檢定表	46
表 4-10 男生與女生後測分數之敘述統計表	46
表 4-11 機率後測男生與女生獨立樣本 t 檢定表	47
表 4-12 八年級與九年級後測試題答對率表	48
表 4-13 八年級機率延後測分數之敘述統計表	49
表 4-14 八年級機率延後測分數之成對樣本相關性	49
表 4-15 機率後測與延後測成對樣本檢定表	50
表 4-16 八年級延後測試題答對率表	50

圖目錄

圖 3-1 國中機率教學與測驗研究流程	22
圖 4-1 七年級與九年級機率學前診測試題答對率長條圖	44
圖 4-2 八年級與九年級後測試題答對率長條圖	48
圖 4-3 八年級後測與延後測試題答對率長條圖	51
圖 4-4 九年級第十二題錯誤案例 1	53
圖 4-5 九年級第十二題錯誤案例 2	53
圖 4-6 七年級第十二題答題案例	53
圖 4-7 八年級第一題答題案例	55
圖 4-8 九年級第一題答題案例 1	55
圖 4-9 九年級第一題答題案例 2	55
圖 4-10 九年級第五、六題答題案例	56
圖 4-11 八年級第五、六題答題案例	57
圖 4-12 八年級第十題答題案例 1	58
圖 4-13 八年級第十題答題案例 2	58
圖 4-14 九年級第十題答題案例 1	59
圖 4-15 九年級第十題答題案例 2	59
圖 4-16 英國教科書 Pearson 版本 Tier6	59
圖 4-17 八年級 T3 第五題答題錯誤案例	60
圖 4-18 八年級 T3 第五題答題正確案例	60
圖 4-19 八年級 T3 第十一題答題案例 1	61
圖 4-20 八年級 T3 第十一題答題案例 2	61

第一章 緒論

在生活中處處充滿著不確定性，從出生直到死亡機率伴隨著我們一生。像是小嬰兒出生是男生或是女生的機率，明天下雨的機率，球類比賽獲勝的機率，樂透中獎的機率，猜中考試題目的機率，明天股票上漲的機率，這些都是你我日常生活常聽到的問題，那麼機率又是從何開始的呢？

其實機率的概念是起源於賭博遊戲，在十六世紀義大利數學家 Cardano 從賭博中發展出一些機率的研究。後來法國數學家 Pascal 和 Fermat 他們之間的信件討論，使荷蘭物理學家 Huygens 從中獲得發想，發表了第一篇機率的著作，在之後的一百多年間，Bernoulli 跟 Moivre 等多位數學家的共統研究，完成了初步的古典機率理論。在十九世紀時，Laplace 更是發展出近代機率論和統計學上重要理論基礎，而他更是說過：「這門源自考慮賭博中機運的科學，必將成為人類知識中最重要的一部分。生活中最重要的問題裡，大部分只是機率的問題」。

第一節 研究動機與背景

機率的重要性，除了可讓人們預測對生活中的不確定性，更是統計學重要的理論基礎，故在數學教育裡，機率課程占了重要的一席之地，有別於其他數學課

程，由公式或定理去做推導或證明，機率需要一些生活經驗，分析事件的能力，雖然我國國中機率課程所需的先備知識，大概只需要分數的四則運算，但學習機率所需的思維並不簡單，故部分學者認為機率課程不適合太早學習(翁秉仁，2016)。不過在國家教育研究院〈十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究〉報告(林福來、單維彰、李源順、鄭章華，2013)中提到一個建議，我國對比其他國家晚進入機率課程，那麼到底要在幾歲學習機率才適當呢?顯然這是一個值得探討的問題。

在九年一貫課程綱要中，機率課程一直都是被安排在九年級下學期，但是在七年級的生物課，甚至在更早的國小課程裡，都有提到了有關機率的內容，且其他歐美國家或者我們鄰近的中國，機率課程早已從七年級甚至更早就開始發展。再者，國際數學與科學教育成就調查(Trends in International Mathematics and Science Study，簡稱 TIMSS)，在民國 100 年度接受評量的我國八年級學生，以當時的九年一貫課綱，他們尚未接受機率課程的學習。但是，他們在所有數學主題(包括機率)皆表現優異，遠超過 TIMSS 量尺中心點的 500 分(林陳涌，2014)。從這些證據中可知，我國的國中學生在八年級就對機率已有相當程度的認知，但是否能在九年級前就做機率課程的教學，我們還需要一些證據。

根據 Bognar 與 Nemetz (1977) 不同年齡階段可進行的機率概念教學，其顯現的現象就是，兒童在未接受機率課程教學前，在不同階段已具有不同的機率概念。Piaget 和 Inhelder 在 1975 年提出的機率認知發展理論，指出兒童在不同的時期，有不同的機率認知概念可進行相對應的機率課程教學。而 TIMSS 機率與統計的調查也指出，台灣八年級學生雖然尚未學習機率課程，但對機率卻已有一定的認識，已具備了一定程度的機率概念 (TIMSS, 2016)。在科技部計畫「透過自由擬題活動提升數學學習的投入度」(計畫編號：104-2511-S-008-002-MY2)裡

有一項針對九年級為學習機率課程前做的「機率學前診測」，其結果顯示未正式學習機率課程的九年級學生，已經自行發展了主觀與古典類型的機率概念(單維彰、許哲毓、陳斐卿，2018)。因此，我國學童於國中階段的思維發展，不論是已具備的概念，或者是可教學機率課程的年齡，都值得探討。

研究者以各學者的理論，以及考慮國中機率課程所需之先備知識或計算方式，將前段提到的「機率學前診測」給七年級(十三歲)的學童測驗，欲探討出我國七年級的學童，是否就已具備了我國中學數學課程所需的機率概念，而其結果顯示，七年級學生已具有了與九年級相同的機率概念，然而是否於九年級前就適合做機率課程的教學，將是本研究欲探討的重要問題。

綜合以上所述，機率問題遍佈於日常生活中，且在數學教育裡扮演著非常重要的角色，依循這些想法，研究者希望能中找尋出真正適合學童學習機率的時間點，使其自發性的概念，與生活及學習作更完整的連結，使生活中的語言與數學的語言連貫，真正落實 Laplace 所說生活中的重要問題裡，讓學童有更多元的思考層次，使國家的數學教育更加貼近生活，以貫徹數學作為一種語言的真正意涵。

第二節 研究目的

本研究希望藉由機率課程教學活動，探究出機率課程在八年級的學習成效，並且使用樹狀圖作為機率教學的唯一工具，驗證其在列出樣本空間的能力。因此，根據上述的研究動機與背景，本研究的具體目的為藉由機率課程教學及測驗，探究九年級前，學生的機率思維發展程度，以及機率學習的成效，以樹狀圖作為教學工具，減少因自發性概念產生的迷思，使其真正用來解決生活中的問題，以提

升機率學習的意願，更為之後的機率學習預留更多彈性空間，與數學學習的多元化。

第三節 研究問題

因此，根據研究目的，並透過機率教學與測驗活動的執行，探究：

1. 國中學生在未接受正式機率課程之前，機率自發性概念的狀況為何？
2. 透過國中機率教學，八年級學生是否有能力可學習國中機率課程？
3. 若使用樹狀圖作為機率教學的唯一方法，機率學習成效是否提升？
4. 透過機率教學後，八年級與九年級的學習成效差異為何？

第四節 名詞釋意

為了使本研究討論的範圍與主題更加明確，本研究所涉及的相關重要名詞，界定如下。

一. 97 年國民中小學九年一貫課程綱要

97 年國民中小學九年一貫課程綱要簡稱 97 課綱或九年一貫課綱，為教育部民國 100 年實施之國民中小學課程，為了因應世界教改之脈動，政府致力於教育改革，以提升國民素質及競爭力。數學領域綱要基本理念有三項

- (1) 數學是人類最重要的資產之一
- (2) 數學是一種語言
- (3) 數學是人類天賦本能的延伸

九年一貫課程強調以學習者為主體，以知識的完整面為教育的主軸，以終身學習為教育的目標。在進入 21 世紀且處於高度文明化的世界中，數學知識及數學能力，已逐漸成為日常生活及職場裡應具備的基本能力。基於以上的認知，國民教育數學課程的目標，須能反映下列理念：(1)數學能力是國民素質的一個重要指標；(2)培養學生正向的數學態度，瞭解數學是推進人類文明的要素；(3)數學教學(含教材、課本及教學法)應配合學童不同階段的需求，協助學童數學智能的發展；(4)數學作為基礎科學的工具性特質。(教育部，民國 98 年，國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域)

本研究所述之課綱皆為 97 課綱數學領域，而根據其課程編排，從一年級至八年級，皆無機率相關課程，首次出現為九年級，課程內容皆以古典機率為主。

二. 自發性機率概念

所謂自發性機率概念，亦即未經正式機率教學就具備的機率概念，只能說是來自於直觀。心理學界在 1950 年代即開始研究直觀的機率思維，確認這種認知型態的存在 (Cohen & Hansel, 1956)：那是人們為了在不確定的環境中做出適當的決定，必須運用一種與生俱來或是從經驗中養成的認知型態，而如此的認知結果是不證自明的 (Konold, 1991)。(引自單維彰等人，2018)

三. 機率學前診測

所謂「機率學前診測」是指一份測驗目標為機率概念的學前診測。學前診測的目的並非測試學生的機率知識與能力，而是期望從中獲得學生自發性機率概念的資料。(單維彰等人，2018)

與科技部計畫不同於，本研究施行對象為七年級學生，其診測之問題所需之先備知識，包含百分比、分數的四則運算等概念，皆為七年級上學期或以前的課

程知識，故研究者使七年級下學期之學生接受此測驗。本研究除探究其自發性概念外，亦比較兩年級答題之狀況，探究各題之機率概念，作為能力之判定，以切合研究目的中八年級學生是否有學習國中機率課程之能力。

第二章 文獻探討

本章依研究主題進行相關文獻之探討，以作為本研究相關理論之基礎。本章共分二節，第一節探討機率概念研究，內容包含機率類型、國中學生的機率概念層次及台灣機率課程發展脈絡，第二節探討機率教學，從直觀機率的思維直到樹狀圖在機率上的應用。本研究的主要目的為，探究不同年級對於機率課程，教學前後的思維及發展，以樹狀圖作為機率教學重點，區分其學習後之機率概念的差異，更以延後測探究作為學習成效評估。本章節之文獻探討，大多引自「以學前診測與自由擬題探討九年級學生的自發性機率概念」(單維彰等人，2018)。

第一節 機率概念研究

本節將分為三個部分做討論，第一部分為探討機率類型，作為後續章節分析我國機率課程概念的基礎。第二部分為學童的機率概念層次，第三為台灣機率課程發展脈絡，這兩個部分為探討，我國機率課程的設計，及相對應的學生所需具備或已有的機率概念層次，從中建立出探討學生的能力及興趣的研究分析。

一. 機率類型

本研究將以機率類型，作為分析自發性機率概念及課程中可能遭遇的機率類型。本文採用 Shaughnessy (1992) 統整各家之言所做的四種類型：古典機率 (classical probability)，頻率機率 (frequentist probability)，主觀機率 (subjective probability)，和形式機率 (formal probability)。

(一) 古典機率(classical probability)

古典機率是根據理論假設及推理的規則所計算出來的機率值，最初為法國數學家拉普拉斯(Laplace) 於 1812 年在其機率的分析理論中所定義，故又稱拉普拉斯機率。而其定義為，假設在一個隨機性試驗中，其所有可能的結果(樣本空間 S)都能被列出來，且其中的每一個樣本點發生的可能性(機率)都相等，則事件 A 在樣本空間 S 中發生的機率為 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ，其中 $n(A)$ 為事件 A 的樣本數， $n(S)$ 為樣本空間 S 的個數。因為古典機率必須接受「可能性均等」的前提，所以也稱為理論機率或先驗機率。

(二) 頻率機率(frequentist probability)

頻率機率為執行一個隨機試驗無窮多次或實驗調查，觀察並記錄其相對次數(即頻率)極限而得來的機率值，故又稱為實驗機率(experimental probability)。其計算方式為 $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$ ，亦即在 n 次的試驗中，事件 A 出現的次數為 n_A ，當實驗的次數越接近無限多次時，相對次數 $\frac{n_A}{n}$ 就越趨近於實數 $P(A)$ 。當然我們無法執行無窮多次的實驗，故實際上乃是根據有限的執行結果，來決定機率的估計值。而頻率機率以實驗的結果作為依據，所以又稱之為實驗機率 (experimental probability)。

(三) 主觀機率(subjective probability)

主觀機率為近代 20 世紀發展的概念，是一種以直觀思維猜測機率的表現，以直觀地認知，主觀地評估事件的不確定性，其機率值以其背景文化、身長環境、個人信念及生活經驗而決定，是人們從成長中獲取資訊而轉化的機率值，此數值可隨著學習、獲得資訊或體驗活動而調整。例如某生認為某考試卷的答案選項 C 過少，因此猜想此題的答案極可能是選項 C。故主觀機

率數值的判斷，是隨著每個人價值觀、認知程度的不同，理性的轉換其信念等因素而改變(Borovcnik et al., 1991; Konold, 1991)，因此極可能因為資訊的獲得而修正其猜測的機率數值。相對於主觀機率，古典機率和頻率機率又統稱為客觀機率。

(四) 形式機率(formal probability)

形式機率是以公理的公設系統來定義機率，最初由蘇俄數學柯莫戈洛夫(Andrey Kolmogorov, 1903-1987)所提出，其理論架構為假設有一試驗的樣本空間為 S ，對於 S 中的每一事件 A 指定一個值 $P(A)$ ，並規定 $P(\bullet)$ 滿足下列三個公設：

1. 對任一事件 A 恆有 $P(A) \geq 0$
2. 樣本空間 S 之機率 $P(S) = 1$
3. 任二事件互斥時有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ ，我們稱 $P(\bullet)$ 為一機率測度，並記 $P(A)$ 為事件 A 之機率。(引自丁村成，2008)

因形式機率可處理連續性的隨機試驗，需要使用微積分計算，所以不在我國中學課程的規劃，後文也不再討論此類型。

機率的教學應以數學模型的觀點 (a modeling point of view)，讓學生能察覺與辨識適當的機率類型 (Shaughnessy, 1992)，教師若能在教學上，教導清楚地辨別機率類型，應該有助於學生減少學習機率的困難。在我國的數學課綱中，中學機率課程依然以古典機率為主，但許多國家已經開始重視提供主觀機率和頻率機率的學習經驗 (Watson, 2005)。若能培養學生準確地判斷機率類型且靈活運用，實為解決不確定性問題的重要能力。

二. 學童的機率概念層次

本研究將以機率概念層次作為分析自發性機率概念的另一個向度，而各層次的適學年齡亦將作為我國機率課程規劃的建議依據。

Piaget 和 Inhelder 提出學童認知發展理論，並以「機率」為主題，提出以下機率認知發展三階段：（引自劉秋木，1991）

1. 運思前期：此階段兒童沒有明確的因果觀念，無法區分事件的必然性與或然性，因此無法形成機會的概念。此時期的兒童也沒有隨機概念，他們不知道用手在不見內部情況的袋子裡拿東西，拿到的彈珠是靠機會的，他們會以為會拿到自己喜歡的顏色的彈珠。
2. 具體運思期：此階段兒童能分辨因果律以及純粹機會的事件。此時期的兒童對於不太複雜的機率問題可以算出成功事件與失敗事件的相對勝算誰屬。而若要算出一個實驗之所有可能結果很複雜時，因兒童沒有一系列的數學概念想法，所以無法掌握住複雜狀況的發生。
3. 形式運思期：此階段兒童能列舉依實驗的所有可結果，能有機率概念。比起前期，此階段的兒童更有能力列舉實驗的可能結果，以及了解相對次數的極限存在，即為大數法則。也由於他們具有比例概念，能以一個分數來代表成功事件的機率，已有機率概念的存在發生。

Bognar 和 Nemetz (1977) 列出兒童在不同年齡階段可進行的機率概念教學，其認為機率的教學應兒童的年齡而得到適當的教導，有四個階段如下：

1. 七至八歲的兒童，可以教導簡單的概念，像確定事(certain events)、不可能事件(impossible events)及互斥事件(mutually exclusive events)。
2. 九至十歲的兒童，可依據可能發生的事情教導較可能事件(more likely events)、較不可能事件(less likely events)及次序事件(orderevents)。
3. 十一至十二歲的兒童，可以教導相對次數(relative frequencies)及畫出可表示機率事件的圖表(diagrams)，如樹枝圖。
4. 十三至十四歲的兒童，可以教導獨立(independent)和相關(correlated)的實驗及事件。

(以上引自張吉逸，2018)

綜合回顧 Piaget 與 Inhelder (1975) 和 Bognár 與 Nemetz (1977) 兩組學者的研究結果：他們將兒童或青少年的生理發展階段，次第對應於各層次的機率概念。此兩組學者的研究，支持九年級學生具備自發性機率概念的可能性。(單維彰等人，2018)。根據上述兩組研究結果本研究者亦認為，至七年級應已具備學習本國機率課程之生理階段，且其自發性機率概念，已能夠連結國中課綱之機率課程內容。

三. 台灣機率課程發展脈絡(引自單維彰、陳斐卿、許哲毓，2017)

台灣的數學教育，自民國 50 年以來，經歷過五次重要的變革。呂溪木(2007) 指出，第一次改革為民國 53 年至民國 57 年，第二次改革為民國 60 年至民國 61 年，以及第三次改革為民國 64 年至民國 72 年。上述三者的差別在前二者為先修訂高中，再至國中小的修訂，其為由上到下的變革；後第三者則為相反，其為下到上的變革，而在民國 74 年再進行國中課程標準的

微調。第四次改革為民國 82 年至民國 84 年。先修訂國小課程標準，再至國高中的修訂，為下到上的變革。民國 82 年公布的國小課程標準，其數學教育目標揭示了「建構」一詞，成為新課程較具爭議的課題（周祝瑛，2003a）。第五次變革為民國 89 年公布「國民中小學九年一貫課程暫行綱要」，並在民國 92 年公布「國民中小學九年一貫課程暫行綱要數學學習領域」及民國 97 年再次微調。

台灣數學機率的主題於民國 53 年進入高中數學課程（教育部，1964），而同時期的國中小並沒有機率課程。在當時的學生不管是自然組或社會組，學習機率的內容之教材皆為相同。在課程上的編排，等同於學完 Jones 等人（1999）提出的機率思考層次，內容從「樣本空間」至「條件機率」與「獨立事件」。注意的是，民國 53 年的高中機率課程有兩項特點影響至今，一為以嚴謹的「集合」形式來處理樣本空間與事件，二為將機率作為排列組合的後續課題。

民國 60 年，這段時期的高中數學課程（教育部，1971）將機率安排在高三，除了延續民國 53 年的全部課程內容外，在機率概念上增加了貝氏定理，在機率類型上涵蓋了古典、頻率與形式機率（以隨機變數的形式呈現）。在當時市面上流通的教科書共有數理本、實驗本與東華本三種，而范傳坡教授主編的數理本、黃武雄教授主編的實驗本，都講解了主觀機率類型（稱為直觀的機率）。同時期的國中數學課程不含機率，反而是國民小學的數學課程在民國 64 年加入了「簡單的機率」（教育部，1975），安排於六年級學習，涵蓋頻率與古典兩種類型，而概念層次皆為單一事件。另外，第二次改革的主要重點為減少教材中「集合論」的份量，以凸顯對數學知識「質」與「方法」的重視（陳玟樺，2017）。

民國 64 年，「國民小學數學課程標準」完成修訂，而為銜接民國 64 年版國小課程的國中和高中數學課程標準，於民國 72 年完成國中數學課程標準修訂並頒布，由民國 73 學年度起開始實施（呂溪木，1986）。同時，民國 74 年版的國中數學課程，在國三選修數學加入了機率主題，包含頻率機率與古典機率兩種，其中古典機率特別強調不涉及樣本空間與排列組合，並且首次引進樹狀圖作為計算機率的工具。

民國 80 年代為第四次的課程變革年代，民國 82 年的國小課程標準裡，機率的課程以「機率的初步概念」認識為主，包含「部分與全體的關係」以及「大數法則」。另外注意的是，國小課程標準的數學目標揭示「建構」一詞，關注於希望老師能引導學生有不同的解題思考方向，進而培養出解決問題的建構能力。因建構主義教學需較多的時間讓學生自行探究，導致部分學習內容需刪減或延後，但在機率課程內容上的影響差異不大。接著在民國 92 年及 97 年的數學領域課程綱要中，沒有了小學機率的課程，使得機率課程全落於九年一貫的九年級第二學期實施。但九年一貫公布的機率課程「能力指標」為「能在具體情境中認識機率的觀念」，又在細目裡提到「由於機率概念的掌握並不容易，因此應先從最清楚、易學習的機率觀—古典機率開始學習」（教育部，2008）。然而實際考察各版本的教科書，對於其他類型的機率很少詮釋，而是專注在古典機率類型的教學。

回顧台灣的機率課程，主觀機率於民國 60 年代的短暫出現，民國 70 與 80 年代頻率機率的出現，兩者機率類型皆在近幾年課程上開始消失。談及機率的教學，主觀機率是一個很好的出發點，透過自我經驗與機率理論的連結，可培養良好的直覺。教師應鼓勵學生做合理的猜錯，學習每個人都有可能猜錯的產生（Li, 2000；丁村成，2008）。而頻率機率能將概念性機率與

統計做出連結，在教學上從實驗中歸納出法則，在從古典理論的比較中，形成學生心中的對比。最後，從我國近年來的機率課程，都九年級下學期才開始實施。在機率類型上談及古典機率最多，而在概念層次上，以單一事件為主，且主要的技術工具為樹狀圖的使用，窮舉可能性與初步認識獨立性。

然而在現今的十二年國教數學課綱中，機率課程依然被安排於九年級，跟過去的不同點在於，六年級又再次出現「可能性」，其內容有關機率的不確定性，雖以主觀機率觀點出發，連結學童之自發性概念，但是七與八年級的數學課程，卻又中斷了機率課程的學習，是否會在銜接九年級古典機率課程時發生問題，還值得探討。

第二節 機率教學

一. 直觀機率的思維與迷思(引自單維彰等人，2018)

所謂自發性機率概念，亦即未經正式機率教學就具備的機率概念，不同文化背景，以及不同生活經驗所造就之直觀概念。心理學界在 1950 年代即開始研究直觀的機率思維，確認這種認知型態的存在 (Cohen & Hansel, 1956)：那是人們為了在不確定的環境中做出適當的決定，必須運用一種與生俱來或是從經驗中 養成的認知型態，而如此的認知結果是不證自明的 (Konold, 1991)。在數學教育領域，直觀機率思維的專門化研究，一般認為始於 1975 年 Fischbein 的專書 (Fischbein, 1975)，他表明直觀思維是機率概念的最初雛形，不論機率概念的對與錯，都將成為學童面對問題時，最自然產生的想法。後續的研究表明，生活中所經歷之態度、信念、經驗、語言，都會影響自身機率思維的發展 (Amir & Williams, 1999; Bognár &

Nemetz, 1977)。本研究認為自發性機率概念之存在，乃以前述文獻作為基礎。許多關於直觀思維的研究偏向機率迷思概念的產生，及其對於教學產生的干擾(例如 Shaughnessy, 1977)，而引伸至教學的因應設計(例如 Fischbein, 1987)。本研究除了關注直觀導致的迷思概念，且試圖發掘直觀思維對於課程設計的可能助益。

二. 樹狀圖與樣本空間

國中機率課程的主要以古典機率為主，而古典機率裡最重要的就是要本空間，樣本空間在課本裡的解釋為「事件發生的所有可能」，只要能規律且正確的列出樣本空間，那麼就能輕易的解決國中所遇到的機率問題，Jones (1999a) 也表示學生在機率概念的成長來自於了解「樣本空間中沒有考慮到的樣本點」、「部分—部分，部分—整體概念的應用」、「描述機率的表示法」三個能力的培養。但是，許多機率的錯誤概念來自於學生不能正確地列舉出問題中的樣本空間(Batanero, Godino, 1997)，而未學習過如何使用樹狀圖的學童們，會以自身的經驗來列出樣本空間，Konold (1983) 也指出學生會傾向個人喜好來預言樣本空間，即使學習過機率概念，Green (1983, 1988) 指出學生較薄弱的機率概念在於樹狀圖的使用、所求區域的繪製、隨機與不隨機事件的分布。最後，Nisbett (1983) 也揭露機率的最好理解透過學習「可重複的過程和有限對稱的結果」、「理論機率所產生的結果」、「不可預測的辨識」三方面的學習。由以上可知樣本空間在機率教學裡的重要性，且列出樣本空間的重點就在於樹狀圖的使用。

樹狀圖 (Tree Diagram) 這個名詞首次出現在諾姆·杭士基 1965 年的著作 (Chomsky, 1965) 中。它是一個有方向性且無循環的圖形，能系統化地細分主題、區分階層、觀看整體，做邏輯性的列舉，並運用樹的象徵來表現

出構造之間的關係(引自許哲毓等人,2016),在九年一貫數學課綱 9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念裡提到,可引入樹狀圖的工具,來協助計算所有可能的事件,其中所有可能的事件亦即機率裡的樣本空間。又美國數學教師協會(NCTM)於2000年的課程標準裡提到,六至八年級的學生要能有系統地列出簡單的合成事件,例如使用樹狀圖。英國教育部(DCSF)的課程綱要裡也說道,學生在十年級要能使用樹狀圖來表示複合式件的樣本空間。要克服這些迷思,學生需要藉由教育來了解更多比例、機率共通語言、系統化的概念來處理機率。(林以專,2009)

過去許多學者也曾提到有關樹狀圖在機率學習的重要性,趙文敏(民68)談到為求集合之積而不致於將元素遺漏,一個有效的方法是作一個樹狀圖,徐正梅(民76)亦表示樹狀圖如同一顆樹,由主幹分出莖、枝、桠...等等,它的好處是「脈絡清晰、不會遺漏、不會重複」,Batenero, Godino (1997)也表示樹狀圖的使用是決定樣本空間最基本的過程, Sinchez、English、Polaki 等人也紛紛表示使用樹狀圖可以幫助了解組合的結構和複合隨機實驗。

總和以上所述,錯誤的古典機率將來自於錯誤的樣本空間(Kolmogorov, 1933/1950),也就是說,要培育學生在機率上的想法,就要克服樣本空間所產生的迷思(Jones, Langrall, Thornton, and Mogill's, 1999),而研究者認為,國中機率課程以古典機率為主,故在教學中以使用樹狀圖做為列出樣本空間的方法,不同於課綱沒有強制性的敘述,本研究者在教學中強烈要求學生使用樹狀圖,且在樹狀圖的教學上相較過去花了較多的時間。想要把古典機率學好,就要準確地列出樣本空間,想要有規律的列出樣本空間,樹狀圖是最好的方法之一。

綜合以上機率概念研究相關文獻，學童對於機率概念的學習，在不同的年齡層，都有被教導與思考的適切性存在，如最早兒童是以主觀意識與喜好來處理機率問題。隨著兒童的年齡增加，處理機率問題的思考層次也不一樣，因此教師能夠針對學生的機率思考架構，了解學生的機率推理，給予適當的課程教導。然而台灣機率課程的發展，隨著數學課程的改革，過去課綱內容有的機率概念，如今至現在則無，逐漸忽略學生基本的機率思考層次，進而影響教師於課堂中，機率教學的正確脈絡性。因此，本研究將藉由機率概念的相關研究，對學生機率學習之間的思想層次，配合課程發展的研究，架構出基本的理論基礎。

第三章 研究方法

本章共分五節，分別針對本研究之研究對象、研究流程、研究工具、資料蒐集與資料分析，詳細說明。

第一節 研究對象

本研究之田野學校共有四所且分為兩大部分，分別為「機率學前診測」以及國中機率後測與延後測（後稱後測與延後測），而進行機率學前診測的九年級學生為九年級上學期，七年級學生為下學期，此期間皆未接受正式的機率課程教學，其中實施機率學前診測共三所學校。

因樣本複雜故在此先進行資料編碼，以下皆以代碼稱之。

資料編碼

研究者將分為四碼說明：

第一碼：T1 表示機率學前診測，T2 表示後測，T3 表示延後測

第二碼：S1、S2、S3、S4 分別表示

S1:台北市郊學校，S2 台北市中心學校，S3 桃園市八德區學校，S4 桃園市桃園區學校。

第三碼：G7、G8、G9 分別表示七、八、九年級

舉例說明：T1-S1-G9 表示機率學前診測之 S1 學校九年級學生之成績。

第四碼：P1、P2、P3 . . . 分別表示各測驗試題編號。

舉例說明：T1-P1 表示機率學前診測之第一題。

(1) 台北市一所中型的國中，全校共計 24 個班級，本研究採九年級的兩個班級，

其中 A 班 32 人，B 班 30 人，共 62 人，其中男生 28 人，女生 34 人。此資料後稱 S1-G9。

(2) 台北市一所大型國中，全校共計 85 個班級，本研究採七年級的兩個班級，其中 A 班 34 人，B 班 26 人，共 60 人，其中男生 32 人，女生 28 人。此資料後稱 S2-G7。

(3) 桃園市一所大型國中，全校共計 72 個班級，本研究採七年級的三個班級，其中 A 班 28 人，B 班 30 人，C 班 29 人，共 87 人，其中男生 44，女生 43 人。此資料後稱 S3-G7

後測與延後測則同為桃園市一所大型國中後稱 S4，全校共計 72 個班級，本研究採九年的三個班級分別進行後測預試與後測，以及八年級的兩個班級進行後測與延後測；九年級施測時間為國中教育會考後兩週，約 6 月初；八年級教學時間為五月底共三堂課，後測施測時間為六月初，延後測時間為 8 月初，八年級後測與延後測之時間差為兩個月。接受測驗學生如下

(1) 後測預試採九年級的一個班級，共 29 人，其中男生 15 人，女生 14 人。

(2) 後測採九年級的兩個班級，其中 A 班 29 人，B 班 24 人，共 53 人，其中男生 27 人，女生 26 人。此資料後稱 S4-G9。

後測採八年級的兩個班級，其中 A 班 30 人，B 班 28 人，共 58 人，其中男生 31 人，女生 27 人。此資料後稱 S4-G8。

第二節 研究流程

研究者繼科技部研究計畫（NSC-104-2511-S-008-002-MY2）對 S1-G9 進行機率學前診測後，對 S2-G7、S3G7 進行機率學前診測，接而對其進行答題分析。

分析後依國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域有關機率部分，進行教學活動設計，再以翰林版課本、習作以及基測會考歷屆試題為主，設計後測試題。後隨機抽取 S4 的一個九年級班級進行預試並對試題進行信度分析，再隨機抽取 S4 另外兩班進行後測，同時隨機抽取 S4 八年級兩個班，實施國中機率課程教學與後測，最後在暑假輔導課期間，對八年級相同兩班之學生進行延後測。流程表如圖 3-1。以下說明圖 3-1 中各項程序。

一. 「S2、S3 機率學前診測」與「S2、S3 答題分析」

繼研究計畫對 S1-G9 進行機率學前診測後，研究者以台北市及桃園市兩所國中(S2、S3)共五個班級之七年級學生進行機率學前診測，測驗時間為七年級下學期第二次段考後，學生對於國中機率課程所需之先備知識，例如分數的四則運算、比例式等，已經有相當程度的概念，與進行測驗之九年級學生條件相同，測驗試題即研究計畫之機率學前診測試題，施測後，對其進行分析。

二. 教學活動設計

研究者依國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域有關機率部分，以及機率學前診測分析學生欠缺的概念，以翰林版課本、習作為主，進行國中機率課程設計與教案(見附錄二)、學習單製作(見附錄三)，教學內容與九年級學習之機率課程相同。

三. 後測試題設計

後測試題是以課本、習作及基測、會考歷屆試題的題目為主，擬出十一題試題，其中第十一題為日本教科書中的題目，在測驗中沒有列入計分，最後隨機抽取九年級的一個班級做預試並進行試題信度分析。

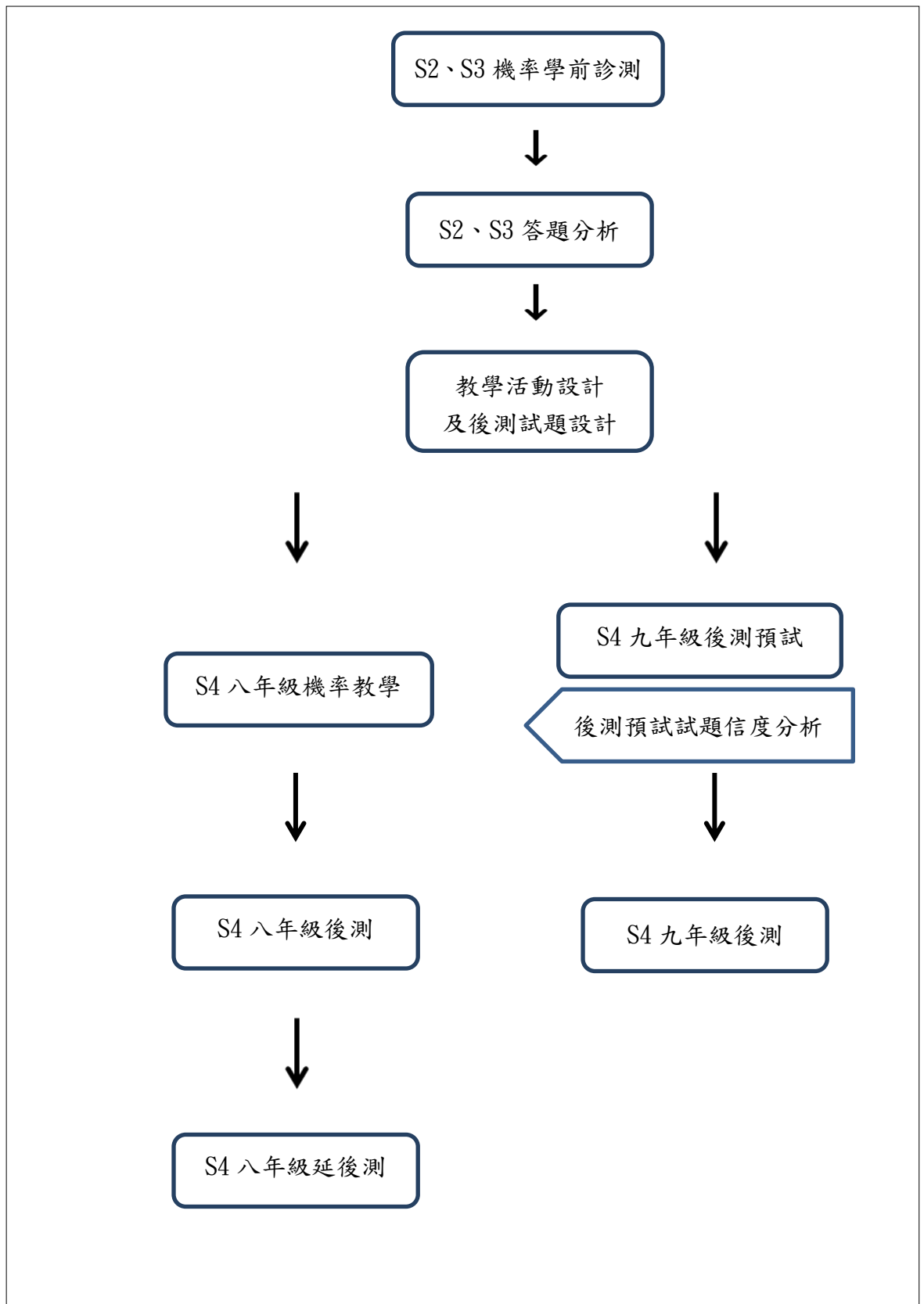


圖 3-1 國中機率教學與測驗研究流程

四. 八年級教學與兩個年級後測

雖機率學前診測學生為七年級，但考量七年級學生於機率課程的先備知識尚未充足，以及機率課程設計的完整性，故選擇八年級學生做機率課程教學。機率課程教學採桃園市某國中之隨機抽取的兩個八年級班級，教學內容以課本、習作搭配學習單為主，依課程設計之教案由本研究者進行三堂課的教學，本研究者具八年國中數學教學經驗，已完成我國法定之中等學校教育學程課程並完成教師實習，於桃園有兩年國中代課教學經驗，教學內容皆與九年級所接受之課綱規定國中數學科機率課程相同。

課程完成後隔一天與同校九年級扣除預試班級之隨機抽取的兩個班級的學生，同時進行後測試題測驗。

五. 八年級延後測

在後測後兩個月的暑期輔導課期間，對相同兩個班級之八年級學生進行延後測，樣本數因某班一位學生其不可抗拒之因素請假缺少一位，延後測試題以後測試題為主，僅做物件與數字上的更動，其餘部分例如題目類型、題目敘述、題目難度與測驗方式、測驗時間皆無差異，故不另做信度分析。

第三節 研究工具

本研究工具分為四部分，分別為機率學前診測、國中機率教學教案、國中機率後測以及國中機率延後測，利用這些試題來評估學生的機率概念，包括七年級未學習國中正式機率課程前之機率概念，以及八年級接受正式國中機率課程教學後的機率概念，最後為過一段時間後八年級學生的機率概念學習成就，而這些試題的出處皆為課本、習作或是基測會考歷屆試題，所以試題品質皆具國家考試的

水準，或經由教科書審查通過，在此僅對後測試題進行信度分析。

一. 機率學前診測

測驗題目(見附錄一)皆來自近年基測、會考或課本例題，所以試題品質受到國家考試驗證，或經由教科書審查通過。若題目類型以大考中選出，則以國中機率中頻率機率與古典機率為主，但若從課本選出，則包含主觀機率與獨立性概念。測驗題目共計 15 題，前 4 題為是非題，後 11 題為計算題，每題 1 分，滿分為 15 分，測驗時間為 45 分鐘，而計算題須寫出計算過程。

根據本研究之機率學前診測共有 15 題，依序記作 P1 至 P15。其中 P1—P4 為概念性的是非題，不需要計算；接著 2 題為概念性的填充題，不需要寫出過程；後面 P7—P15 是 9 道計算題，須寫出過程。測驗卷每題 1 分，滿分為 15 分。測驗題目的出處，包括近年基測、會考或符合 97 課綱之課本例題。為了利於分析學生的概念，針對少數題目，有題型上的更動，像是將選擇題轉換成是非題或計算題，或是將測驗目標較為多元的非選題轉換成簡答題，但是絕未變更題幹。僅有 P12 為了簡化問題使其聚焦於獨立性概念而修訂了題幹，如表 3-1。

表 3-1 機率學前診測試題 P12 之原題與改題對照

原題	改題
一袋子中有 4 顆球，分別標記號碼 1、2、3、4。已知每顆球被取出的機會相同，若第一次從袋中取出一球後放回，第二次從袋中再取出一球，則第二次取出球的號碼比第一次大的機率為何？【96 年基測一】	一袋子中有 4 個圓球，球上分別標記號碼 A、B、C、D。已知每一個球被取到的機會相等，若自袋中任取兩次球(一次一球，取後放回)，則取出的兩球號碼依序是 A、B 的機率為何？

為了從機率學前診測試卷的各題答對率，分析學生在解題活動表現的自發性概念，在此將試題按照前述規準分類至內容分析雙向類目表，如表 3-2。結果顯示機率學前診測的試題以單一事件的古典機率為主，這固然是選題來源的限制所致，但也符合本研究之目的所需。

表 3-2 機率學前診測之雙向類目表

	單一事件	複合事件	獨立性	條件機率	總計
主觀機率	P1	-	-	-	1
古典機率	P2、P3、P4、P5、 P6、P7、P8、P9、 P10、P11、P13、P14	-	P12	-	13
頻率機率	P15	-	-	-	1
總計	14	0	1	0	15

屬於主觀機率與頻率機率的機率學前診測試題，分別出自依據 83 年課程標準和 89 年暫行綱要的試題，它們不在現行課程綱要的範圍內。因為民國 94 年是接受九年一貫一綱多本課程學生之第一次參與基測，所以特別審慎地提前公佈了參考題本(教育部，2005)，以下是這兩題的題目。

(P1)投擲一枚圖釘，釘尖朝上、朝下的機率一樣。(是非題)【92 年學測一】

(P15)某工廠連續五天、每天生產 100 件玩具，該工廠品管部對當天生產的每件玩具做不良品測試，下圖為五天內所測試的結果[圖略]。以後該工廠每天正式生產 1000 件玩具，試問依此測試結果，預估此工廠生產不良玩具的機率為何?(計算題)【94 年學測參考題本】

以上引自(單維彰等人，2018，以學前診測與自由擬題探討九年級學生的自發性機率概念)中之機率學前診測試題研究工具。

二. 國中機率教學教案

研究者依國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域進行國中機率課程教案設計，以翰林版課本、習作為主，教學內容與九年級學習之機率課程相同，惟在課程中有兩個部分研究者有特別的強調，詳細教案見附錄二。

(1) 主觀機率

在國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域中，在 9-d-05 的說明中僅提到古典機率的每一事件機率要相同，最後才說若教學時數充足再說明簡單的統計機率概念。可先介紹丟擲時有兩態(如圖釘、圓錐、爻杯)的物體，並讓學生理解，由於物體不對稱性，因此各態出現的機率通常並不相同。此說明缺少主觀機率的觀念，且在課本中僅以小篇幅的舉例帶過，發現課綱對於主觀機率的不重視，影響老師在課程中的教學，最後造成學生對於主觀機率概念的迷思。

(2) 樹狀圖

課綱中雖有提到樹狀圖，但是以”可引入”一詞，並無強制性，且機率課程的教學接近會考的考試時間，在教學的時間限制，授課老師多簡單的帶過此方法，甚至直接教授乘法原理；而研究者在國外的教科書中發現，皆以樹狀圖作為列樣本空間的方式，對於機率的獨立性與餘事件有相當大的幫助，且對之後的條件機率或是樹枝上的機率有延續的觀念，故研究者特別強調以樹狀圖作為樣本空間教學的唯一方式。

在主觀機率與樹狀圖中有特別強調，研究者在教學中，特以生活中的例子強調主觀機率的部分，對事件的機率不同有多項舉例，並配合課綱以具體情境作為說明，強調不同事件的機率有何差異，以主觀機率與生活中常見的機率作為引起動機，再接續古典機率事件的機率要相同之概念，進而連接樣

本空間，在樣本空間的教學，研究者以畫樹狀圖作為唯一方法，發展列出樣本空間的技術以及計算事件的機率，並帶領學生以課本題目做了多次的樹狀圖練習，在古典機率的題目中，不管單一事件或是複合事件，皆以繪製樹狀圖計算事件的機率，並強調在事件機率相同的條件下使用，此情境之樹狀圖的每一樹支機率皆相同，學生只要能畫出樹狀圖且依要求數出樣本空間及事件的數量，就能計算機率。

本研究欲探討之內容，與教學風格無關，差異在於教學方式與教材內容的強調，故授課教師並非本研究之影響因素。且不論是在授課前後或是測驗前後，皆無問卷調查，不討論學生之學習感受，而研究目的欲探討之學習成效，皆為測驗結果取向。

三. 國中機率後測

(一) 測驗目的


了解學生在國中機率教學課程實施之後的學習成效。

(二) 測驗內容

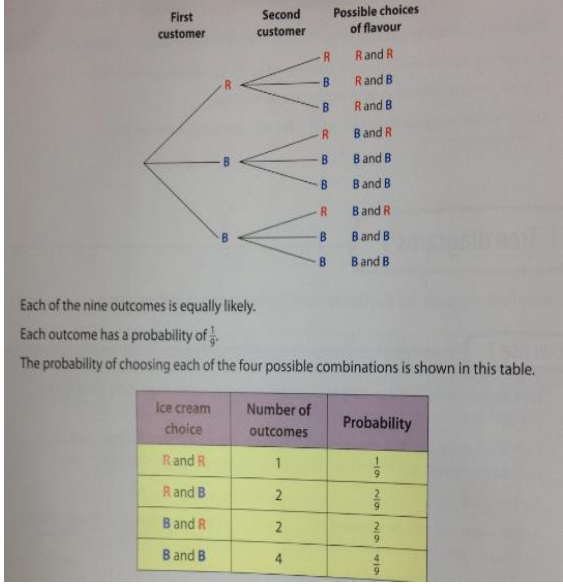
本研究之機率後測試題共有十一題，依序記作 P1 至 P11。其中 P1 為主觀機率的觀念，不需要計算，但是須說明理由；接著 P2~P4 題為古典機率單一事件的機率計算，需寫出完整的計算過程或以畫圖敘述表示；P5~P11 是複合事件的機率計算，需寫出完整的計算過程或以畫圖敘述表示。測驗卷每大題 10 分，其中 P1、P6 與 P9 各有兩小題，每小題為 4 分或 6 分，P11 為研究者欲研究學生答題方式此題不計分，滿分為 100 分。測驗題目的出處，包括近年基測、會考或符合 97 課綱之課本、習作習題，各題出處如表 2 所示，詳細試題見附錄四。

表 3-3 機率後測試題各題出處與原題對照

S2-P1	【92 基本學測(一)】第二題
<p>統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率是否為 $\frac{1}{2}$？請說明理由。</p>	<p>下列有關機率的敘述，何者正確？</p> <p>(A) 投擲一枚圖釘，針尖朝上、朝下的機率一樣</p> <p>(B) 投擲一枚公正硬幣，正面朝上的機率是 $\frac{1}{2}$</p> <p>(C) 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率是 $\frac{1}{2}$</p> <p>(D) 投擲一粒均勻骰子，每一種點數出現的機率都是 $\frac{1}{6}$，所以每投六次，必出現一次「1 點」</p>
S2-P2	【105 翰林 P.161】例題一
<p>投擲一顆公正六面的骰子，出現 3 點的機率是？</p>	<p>投擲一顆公正的骰子，回答下列問題：</p> <p>(1) 出現 3 點的機率是多少？</p> <p>(2) 出現奇數點的機率是多少？</p> <p>(3) 出現 7 點的機率是多少？</p>
S2-P3	【105 翰林 P.162】例題二
<p>一副撲克牌有 52 張（不含鬼牌），分為黑桃（♠）、紅心（♥）、方塊（♦）及梅花（♣）4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、...、K。試問：從撲克牌中任取 1 張，抽到花色是黑桃的機率是多少？</p>	<p>一副撲克牌有 52 張（不含鬼牌），分為黑桃（♠）、紅心（♥）、方塊（♦）及梅花（♣）4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K，從撲克牌中任取 1 張，回答下列問題：</p>

	<p>(1) 抽到方塊 2 的機率是多少？</p> <p>(2) 抽到 J、Q、K 的機率是多少？</p>
S2-P4	【105 翰林 P.163】例題三
一個袋子裡有 10 顆相同大小的球，分別是 7 顆紅球、3 顆白球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球是紅球的機率是多少？	一個袋子裡有 10 顆相同大小的球，分別是 7 顆紅球、3 顆白球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球是紅球的機率是多少？
S2-P5	【105 翰林 P.164】課文敘述問題
正倫投擲一枚公正硬幣和一顆公正六面骰子，則：硬幣出現反面，而骰子點數小於 5 的機率是多少？	同時投擲 1 枚公正的硬幣與 1 顆公正的骰子，請問硬幣出現正面且骰子出現點數為 3 的機率是多少？
S2-P6	【105 翰林 P.169】例題七
老師以抽籤的方式決定到甲、乙、丙三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則：	用  三張撲克牌，任意排成一個三位數，則：
(1) 共有多少種可能的順序？	(1) 排出的三位數是偶數的機率是多少？
(2) 甲是第一個家庭訪問的機率為多少？	(2) 排出的三位數大於 400 的機率是多少？
S2-P7	【105 翰林 P.166】例題五
甲箱內有 4 顆球，顏色分別為紅、黃、綠、	博欵有紅、黃、藍、綠四件不同顏色的

<p>藍；乙箱內有 3 顆球，顏色分別為紅、黃、黑。<u>小倫</u>打算同時從甲、乙兩個箱子中各抽出一顆球，若同一箱中每球被抽出的機會相等，則<u>小倫</u>抽出的兩顆球顏色相同的機率為何？</p>	<p>上衣，A、B、C 三條不同品牌的牛仔褲，任一件上衣都可以和任一條牛仔褲搭配，回答下列問題：</p> <p>(1) 今天<u>博欽</u>要外出，想從四件上衣中任意選出一件、從三條牛仔褲中任意選出一條，則共有多少種選擇方式？</p> <p>(2) 若每一件上衣被選到的機會均等，每一條牛仔褲被選到的機會也均等，則選到紅色上衣搭配 A 牌牛仔褲的機率是多少？</p>
<p>S2-P8</p>	<p>【98 基本學測(一)】第十九題</p>
<p>甲、乙各丟一次公正六面骰子比大小。若某人的點數較大時，算他獲勝；若兩人的點數相同時，算兩人平手。求甲獲勝的機率是多少？</p>	<p>甲、乙各丟一次公正骰子比大小。若甲、乙的點數相同時，算兩人平手；若甲的點數大於乙時，算甲獲勝；若乙的點數大於甲時，算乙獲勝。求甲獲勝的機率是多少？</p> <p>(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{12}$</p>
<p>S2-P9</p>	<p>【105 翰林 P.165】例題四</p>
<p>若生男和生女的機會相等，一個家庭有三個小孩時，請回答下列問題。</p> <p>(1)請列出所有的可能。</p>	<p>投擲一枚公正的硬幣 3 次，求出現 2 次正面 1 次反面的機率。</p>

(2)只有一個男孩的機率是多少？																
S2-P10	【英國 Pearson 版本 Tier6】															
<p>在袋子裡有相同大小兩紅一藍的球，取兩次球每次取後放回，請問兩次取到相同顏色的機率為何？</p>	<p>覆盆子冰淇淋和藍莓冰淇淋都銷售比為1:2。每一個結果的機率都相同，都是1/9，樹狀圖中呈現所有可能之結果。</p> <p>a. 兩名顧客挑選不同口味之機率為何？</p> <p>b.</p> <p>b. 至少挑選一次藍莓冰淇淋之機率為何？</p>  <p>Each of the nine outcomes is equally likely. Each outcome has a probability of $\frac{1}{9}$. The probability of choosing each of the four possible combinations is shown in this table.</p> <table border="1" data-bbox="1013 1258 1307 1444"> <thead> <tr> <th>Ice cream choice</th> <th>Number of outcomes</th> <th>Probability</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>R and R</td> <td>1</td> <td>$\frac{1}{9}$</td> </tr> <tr> <td>R and B</td> <td>2</td> <td>$\frac{2}{9}$</td> </tr> <tr> <td>B and R</td> <td>2</td> <td>$\frac{2}{9}$</td> </tr> <tr> <td>B and B</td> <td>4</td> <td>$\frac{4}{9}$</td> </tr> </tbody> </table>	Ice cream choice	Number of outcomes	Probability	R and R	1	$\frac{1}{9}$	R and B	2	$\frac{2}{9}$	B and R	2	$\frac{2}{9}$	B and B	4	$\frac{4}{9}$
Ice cream choice	Number of outcomes	Probability														
R and R	1	$\frac{1}{9}$														
R and B	2	$\frac{2}{9}$														
B and R	2	$\frac{2}{9}$														
B and B	4	$\frac{4}{9}$														
S2-P11	【105 翰林 P.166】隨堂練習 【日本教科書】															
<p>甲、乙、丙三人玩猜拳遊戲，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？</p>	<p>甲、乙二人進行猜拳遊戲，如果兩人出剪刀、石頭或布的機會均等，則猜拳一次甲贏乙的機率是多少？（遊戲規則為：剪刀贏布、布贏石頭、石頭贏剪刀）</p>															

(三) 預試與信度分析

後測預試採 S4 九年級隨機抽取的一個班級，共 29 人。測驗試題共 11 題，其中第 11 題不計分，其餘每題各 10 分，惟第 1、6、9 題有兩小題各 4 分與 6 分。測驗結束後由研究者親自批改，並以 Cronbach α 信度分析試題間的一致性，得到整份試卷的信度值為 0.785(大於 0.7)，因此，試題的內部一致性尚可接受。

四. 國中機率延後測

(一) 測驗目的

了解學生在國中機率後測之後的兩個月，機率學習成就的差異。

(二) 測驗內容

本研究之機率延後測試題共有十一題，依序記作 P1 至 P11。其中 P1 為主觀機率的觀念，不需要計算，但是須說明理由；接著 P2~P4 題為古典機率單一事件的機率計算，需寫出完整的計算過程或以畫圖敘述表示；後面 P5~P11 是複合事件的機率計算，需寫出完整的計算過程或以畫圖敘述表示。測驗卷每大題 10 分，其中 P1、P6 與 P9 各有兩小題，每小題為 4 分或 6 分，P11 為研究者欲研究學生答題方式此題不計分，滿分為 100 分。測驗題目的出處，包括近年基測、會考或符合 97 課綱之課本、習作習題。延後測試題以後測試題為主，僅做物件與數字上的更動，其餘部分例如題目類型、題目敘述、題目難度與測驗方式、測驗時間皆無差異，詳細試題見附錄五。

表 3-4 機率延後測試題與後測試題各題對照

T3-P1	T2-P1
買樂透彩卷有「中獎」與「不中獎」二種情	統一發票有「中獎」與「不中獎」二種

<p>形，所以中獎機率是否為 $\frac{1}{2}$?請說明理由。</p>	<p>情形，所以中獎機率是否為 $\frac{1}{2}$?請說明理由。</p>
<p>T3-P2</p>	<p>T2-P2</p>
<p>投擲一顆公正六面的骰子，出現 5 點的機率是?</p>	<p>投擲一顆公正六面的骰子，出現 3 點的機率是?</p>
<p>T3-P3</p>	<p>T2-P3</p>
<p>一副撲克牌有 52 張 (不含鬼牌)，分為黑桃 (♠)、紅心 (♥)、方塊 (♦) 及梅花 (♣) 4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、...、K。試問：從撲克牌中任取 1 張，抽到 A 的機率是多少?</p>	<p>一副撲克牌有 52 張 (不含鬼牌)，分為黑桃 (♠)、紅心 (♥)、方塊 (♦) 及梅花 (♣) 4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、...、K。試問：從撲克牌中任取 1 張，抽到花色是黑桃的機率是多少?</p>
<p>T3-P4</p>	<p>T2-P4</p>
<p>一個袋子裡有 15 張相同大小的卡片，分別是 12 張紅卡、3 張白卡，每張卡被取出的機會都相等，從袋中任意取出一張卡，則此卡是紅卡的機率是多少</p>	<p>一個袋子裡有 10 顆相同大小的球，分別是 7 顆紅球、3 顆白球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球是紅球的機率是多少?</p>
<p>T3-P5</p>	<p>T2-P5</p>
<p>正倫投擲一枚公正硬幣和一顆公正六面骰子，則：硬幣出現正面，而骰子點數大於 4 的機率是多少?</p>	<p>正倫投擲一枚公正硬幣和一顆公正六面骰子，則：硬幣出現反面，而骰子點數小於 5 的機率是多少?</p>

T3-P6	T2-P6
<p>簡老師決定用抽籤的方式決定改考卷的順序，分別有 A、B、C 三位學生的考卷要改，則：</p> <p>(1) 共有多少種可能的順序？</p> <p>(2) (2)B 是第一個被改到的機率為多少？</p>	<p>老師以抽籤的方式決定到甲、乙、丙三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則：</p> <p>(1) 共有多少種可能的順序？</p> <p>(2) 甲是第一個家庭訪問的機率為多少？</p>
T3-P7	T2-P7
<p>甲箱內有 5 顆球，顏色分別為紅、黃、綠、藍、黑；乙箱內有 3 顆球，顏色分別為白、黃、黑。<u>小倫</u>打算同時從甲、乙兩個箱子中各抽出一顆球，若同一箱中每球被抽出的機會相等，則<u>小倫</u>抽出的兩顆球顏色相同的機率為何？</p>	<p>甲箱內有 4 顆球，顏色分別為紅、黃、綠、藍；乙箱內有 3 顆球，顏色分別為紅、黃、黑。<u>小倫</u>打算同時從甲、乙兩個箱子中各抽出一顆球，若同一箱中每球被抽出的機會相等，則<u>小倫</u>抽出的兩顆球顏色相同的機率為何？</p>
T3-P8	T2-P8
<p>甲、乙各丟一次公正六面骰子比大小。若某人的點數較大時，算他獲勝；若兩人的點數相同時，算兩人平手。求平手的機率是多少？</p>	<p>甲、乙各丟一次公正六面骰子比大小。若某人的點數較大時，算他獲勝；若兩人的點數相同時，算兩人平手。求甲獲勝的機率是多少？</p>
T3-P9	T2-P9
<p>投擲一枚公硬幣 3 次，求以下的機率。</p> <p>(1) 請列出所有的可能。</p> <p>(2) 只有一次正面的機率是多少？</p>	<p>若生男和生女的機會相等，一個家庭有三個小孩時，請回答下列問題。</p> <p>(1) 請列出所有的可能。</p>

	(2)只有一個男孩的機率是多少?
T3-P10	T2-P10
在袋子裡有相同大小三紅二藍的球，取兩次球每次取後放回，請問兩次取到相同顏色的機率為何?	在袋子裡有相同大小兩紅一藍的球，取兩次球每次取後放回，請問兩次取到相同顏色的機率為何?
T3-P11	T2-P11
甲、乙、丙三人玩猜拳遊戲，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳甲獨贏的機率是多少?	甲、乙、丙三人玩猜拳遊戲，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少?

第四節 資料蒐集

一. 機率學前診測試卷

甲、九年級

本研究活動實施的機率學前診測，其實施時間為九年級上學期，此期間九年級學生尚未學習國中機率課程，事先學生皆不知此測驗資訊，兩班學生全員參與測驗，共回收 62 份試卷。測驗時間為一節課共 45 分鐘，由兩班學生的班級導師（同時也是數學老師）說明測驗，實際測驗時間約為 30 分鐘。測驗結束後由老師蒐集後交由研究者及專家批改，並由研究者做資料登錄與整理。

乙、七年級

研究者以 S2 及 S3 共五個班級之七年級學生進行機率學前診測，測驗日期為七年級下學期第二次段考後，兩校分別回收 60 份、87 份共 147 份試卷。測驗時間為一節課共 45 分鐘，前五分鐘由研究者說明測驗，並由研究者與該班導師(數學老師)進行監考，實際測驗時間約為 30 分鐘，測驗結束後由研究者親自批改與資料整理。

二. 國中機率後測試卷

甲、九年級

研究者以 S4，屏除預試班級之兩個班級的九年級學生，進行機率後測，後測時間為九年級下學期國中教育會考後，此時學生已完成國中所有課程的學習，事先並不知此次測驗之事。測驗時間為一節課共 45 分鐘，前五分鐘由研究者說明測驗，並由研究者與該班數學老師(該國中數學科正式教師)進行監考，實際測驗時間約為 30 分鐘，測驗結束後由研究者親自批改與資料整理，共回收 53 份試卷。

乙、八年級

S4 兩個班級的八年級學生，繼國中機率課程教學後，於課程結束後一天進行國中機率後測，後測時間為六月初，測驗前之教學課程並未提及此次測驗。測驗時間為一節課共 45 分鐘，前五分鐘由研究者說明測驗，並由研究者進行監考，實際測驗時間約為 30 分鐘，測驗結束後由研究者親自批改與資料整理，共回收 58 份試卷。

三. 國中機率延後測試卷

與國中機率後測之相同兩個班級 S4-G8 之學生，於暑假輔導課期間，約 8

月初，進行國中機率延後測，與後測時間相差兩個月，測驗前學生並不知此次測驗之事。測驗時間為一節課共 45 分鐘，前五分鐘由研究者說明測驗，並由研究者進行監考，實際測驗時間約為 30 分鐘，測驗結束後由研究者親自批改與資料整理。因一名學生請假，所以共回收 57 份試卷，與後測之數量相差一份。

第五節 資料分析

本研究將蒐集「機率學前診測試卷」、「國中機率後測試卷」、「國中機率延後測試卷」之答題結果，進行資料的統計與分析，其中設定 0.05 為顯著水準，藉以討論研究問題。

機率學前診測，將統計九年級與七年級之平均分數、標準差，來呈現學生於未學習機率課程之表現，以獨立樣本 t 檢定探討其兩年級分數顯著性，男、女的顯著性，再以單變異數分析（ANOVA）各班級之間的表現，最後分析各題的答對率。

機率後測，統計八、九年級各班的平均分數、標準差，來呈現兩年級學習機率課程之後的機率概念，以獨立樣本 t 檢定探討其顯著性，以及各班表現，包括九年級與八年級的差別，男女生之間的差別，最後分析各題的答對率。

機率延後測則以成對樣本 t 檢定探討其顯著性，來檢驗其是否因為時間的關係，造成學習成就的差距。

第四章 研究結果

本章欲探討研究結果對於學生在學習國中機率課程前，S1-G9 與 S2-G7、S3-G7 的學生的機率概念有何差異？以及 S4-G9 與 S4-G8，分別經過國中機率課程的學習，其機率學習表現為何？分別以七年級的機率學前診測分析、八年級與九年級的後測分析、八年級的延後測分析，根據研究結果進行分析與簡單歸納結論。

第一節 機率學前診測

本測驗採用單變異數分析（ANOVA）各區域之間分數的表現差異，再採用獨立樣本 t 檢定，來探討九年級與七年級與男生、女生之間的分數差異，最後分析各題的答對率。其中選定的樣本以進行機率學前診測的 S1、S2、S3 三所學校，其中 S1 男生 28 人、女生 34 人，共 62 人；S2 男生 32 人、女生 28 人，共 60 人；S3 男生 44 人、女生 43 人，共 87 人；以下為各校機率學前診測分數之敘述統計表，如表 4-1 所示。

表 4-1 各校機率學前診測分數之敘述統計表

樣本	N	總分	平均數	標準差
S1-G9	62	592	9.55	2.77
S2-G7	60	589	9.82	2.82
S3-G7	87	842	9.68	3.09

(一) 學校組內同質性檢定

由表 4-1 發現七年級學生的成績皆略高於九年級的學生，而標準差皆落在 2.7 至 3.10 之間，各校都標準差也都相當接近，在進行獨立樣本 t 檢定之前，我們進行 S2 與 S3 間之同質性檢定，主要檢定各地區之間的分數是否有顯著差異，由表 4-2 機率學前診測組內迴歸係數同質性考驗結果發現，F 值為 .127，p 值為 .881 > .05，並未達顯著水準，所以應接受虛無假設，亦即各組迴歸線之斜率相同，符合共變數組內迴歸係數同質性假定，表示不同地區學校的分數並無差異。

表 4-2 機率學前診測組內迴歸係數同質性表

來源	第 III 類平方和	df	平均值平方	F	顯著性
修正的模型	2.195 ^a	2	1.097	.127	.881
學校	2.19	2	1.09	.127	.881
誤差	1785.32	206	8.66		

a. R 平方 = .001 (調整的 R 平方 = -.008)

(二) 七年級與九年級獨立樣本 t 檢定

由上述分析得知，不同地區之學校並無差異；接著將樣本分組為七年級與九年級，各敘述統計資料如表 4-3。

表 4-3 七年級與九年級機率學前診測分數之敘述統計表

	年級	N	平均數	標準偏差
分數	T1-S(2, 3)-G7	147	9.73	2.994
	T1-S1-G9	62	9.55	2.797

由表 4-3 我們可看出兩年級分數的平均數與標準差都相當接近，接著我們將對其分組作獨立樣本 t 檢定，其分析資料如表 4-4。

表 4-4 機率學前診測七年級與九年級獨立樣本 t 檢定表

		Levene 的變異數相等測試		針對平均值是否相等的 t 測試		
		F	顯著性	T	df	顯著性 (雙尾)
分數	採用相等變異數	0.153	.697	-.419	207	.676
	不採用相等變異數			-.431	122.253	.668

以年級做分組，因為變異數相等檢定的顯著性 $P=.697 > .05$ ，所以採用相等變異數來解讀，檢定統計量 $t = -.419$ ，顯著性 $P=.676 > .05$ ，接受虛無假設，在 $\alpha=.05$ 水準下，兩年級之測驗分數沒有顯著的差異。

(三) 男生與女生獨立樣本 t 檢定

在此我們跨年級將男女生進行分組，將探討性別在機率學前診測分數上是否有顯著差異，各敘述統計資料如表 4-5。

表 4-5 男生與女生機率學前診測分數之敘述統計表

性別	N	平均數	標準差
男	104	9.64	3.708
女	105	9.71	2.793

由表 4-5 我們可看出男女生分數的平均數相當接近，接著我們將對其分組作獨立樣本 t 檢定，其分析資料如表 4-4。

表 4-6 機率學前診測男生與女生獨立樣本 t 檢定表

		Levene 的變異數相等測試		針對平均值是否相等的 t 測試		
		F	顯著性	T	df	顯著性 (雙尾)
分數	採用相等變異數	1.308	.254	-.172	207	.863
	不採用相等變異數			-.172	204.685	.863

以性別做分組，因為變異數相等檢定的顯著性 $P=.254 > .05$ ，以採用相等變異數來解讀，檢定統計量 $t = -.172$ ，顯著性 $P = .863 > .05$ ，接受虛無假設，在 $\alpha = .05$ 水準下，兩性別之測驗分數沒有差異。

(四) 機率學前診測試題各題答題分析

機率學前診測試題共十五題，以年級做分組，分別計算九年級與七年級各題的答對率來做比較，如表 4-7 與圖 4-1。

表 4-7 七年級與九年級機率學前診測試題答對率表

題號	1	2	3	4	5	6	7
S(2, 3)-G7	0.76	0.91	0.82	0.90	0.80	0.86	0.80
S1-G9	0.60	0.90	0.85	0.94	0.77	0.84	0.76

8	9	10	11	12	13	14	15
0.73	0.73	0.70	0.41	0.29	0.10	0.50	0.41
0.76	0.76	0.71	0.47	0.11	0.11	0.53	0.42

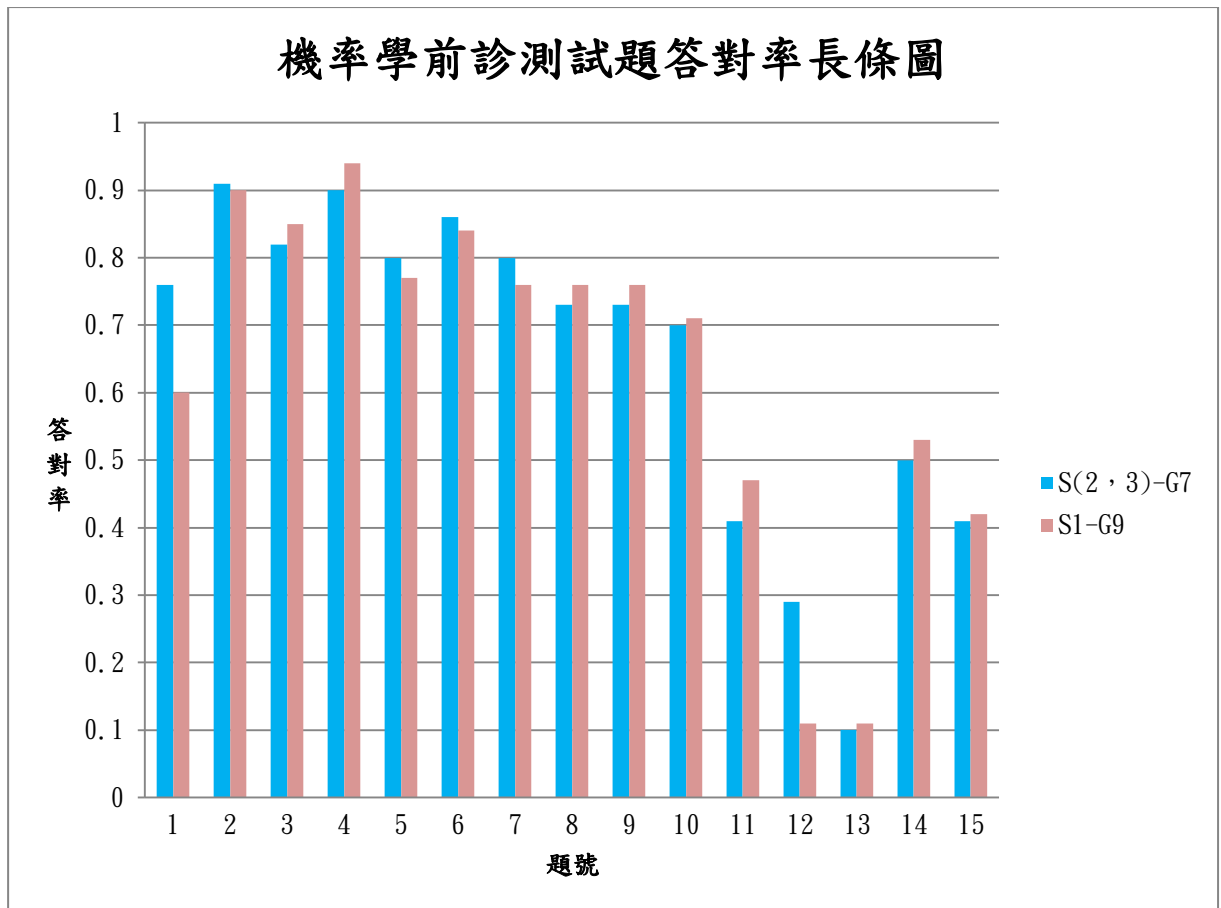


圖 4-1 七年級與九年級機率學前診測試題答對率長條圖

從測驗的結果與各題答對率當中，兩年級學生在第一題與十二題的答對率差距相對其他題來的多，而十一至十五題的答對率都相對前十題來的低，其中十二、十三題更是低於三成。

第二節 機率後測

本測驗採用獨立樣本 t 檢定，來探討在同樣接受國中機率課程後，兩年級以及性別之間的分數差異，其中第十一題不計分，最後分析各題的答題狀況。本測驗選定的樣本以進行機率後測的 S4，其中九年級兩個班級男生 27 人、女生 26 人，共 53 人；八年級男生 31 人、女生 27 人，共 58 人；以下為各年級機率後測分數之敘述統計表，如表 4-8 所示。

表 4-8 八年級與九年級機率後測分數之敘述統計表

	年級	N	平均數	標準差
分	S4-G8	58	75.55	18.215
數	S4-G9	53	73.32	18.476

(一) 八年級與九年級獨立樣本 t 檢定

由表 4-8 發現 S4-G8 的成績與 S4-G9 的學生幾乎相同，而標準差皆落在 18.2 至 18.5 之間，也是幾乎相等，而是否達到統計上的顯著差異，我們將以獨立樣本 t 檢定來探討之，其分析資料表如表 4-9。

表 4-9 機率後測八年級與九年級獨立樣本 t 檢定表

		Levene 的變異		針對平均值是否相等的 t 測試		
		數相等測試				
		F	顯著性	T	df	顯著性 (雙尾)
分數	採用相					
	等變異	.142	.707	.640	109	.523
數	不採用					
	相等變			.640	107.806	.524
	異數					

以年級做分組，因為變異數相等檢定的顯著性 $P=.707 > .05$ ，所以採用相等變異數來解讀，檢定統計量 $t=.640$ ，顯著性 $P=.523 > .05$ ，接受虛無假設，在 $\alpha=.05$ 水準下，兩年級之機率後測分數沒有顯著的差異。

(二) 男生與女生獨立樣本 t 檢定

在此我們跨年級將男女生進行分組，將探討性別在後測分數上是否有顯著差異，各敘述統計資料如表 4-10。

表 4-10 男生與女生後測分數之敘述統計表

		性別	N	平均數	標準差
分	男		58	73.59	19.270
	女		53	75.47	17.286

由表 4-10 我們可看出男女生分數的平均數相當接近，接著我們將對其分組作獨立樣本 t 檢定，其分析資料如表 4-11。

表 4-11 機率後測男生與女生獨立樣本 t 檢定表

		Levene 的變異				
		數相等測試		針對平均值是否相等的 t 測試		
		F	顯著性	T	df	顯著性 (雙尾)
分 數	採用相 等變異 數	1.6 06	.208	-.541	109	.590
	不 採用相 等變異 數			-.543 6	108.96	.588

以性別做分組，因為變異數相等檢定的顯著性 $P=.208 > .05$ ，以採用相等變異數來解讀，檢定統計量 $t = -.541$ ，顯著性 $P=.590 > .05$ ，接受虛無假設，在 $\alpha=.05$ 水準下，兩性別之後測分數沒有顯著的差異。

(三) 機率後測試題答題分析

後測試題共十一題，其中第十一題不計分，以年級做分組，分別計算九年級與八年級各題的答對率來做比較，如表 4-12 與圖 4-1。

表 4-12 八年級與九年級後測試題答對率表

題號	1(1)	1(2)	2	3	4	5	6(1)
S4-G8	0.91	0.84	0.95	0.98	0.88	0.67	0.91
S4-G9	0.62	0.57	0.94	0.98	1.00	0.75	0.87

6(2)	7	8	9(1)	9(2)	10	11
0.91	0.66	0.71	0.69	0.59	0.28	0.19
0.92	0.53	0.68	0.72	0.49	0.34	0.19

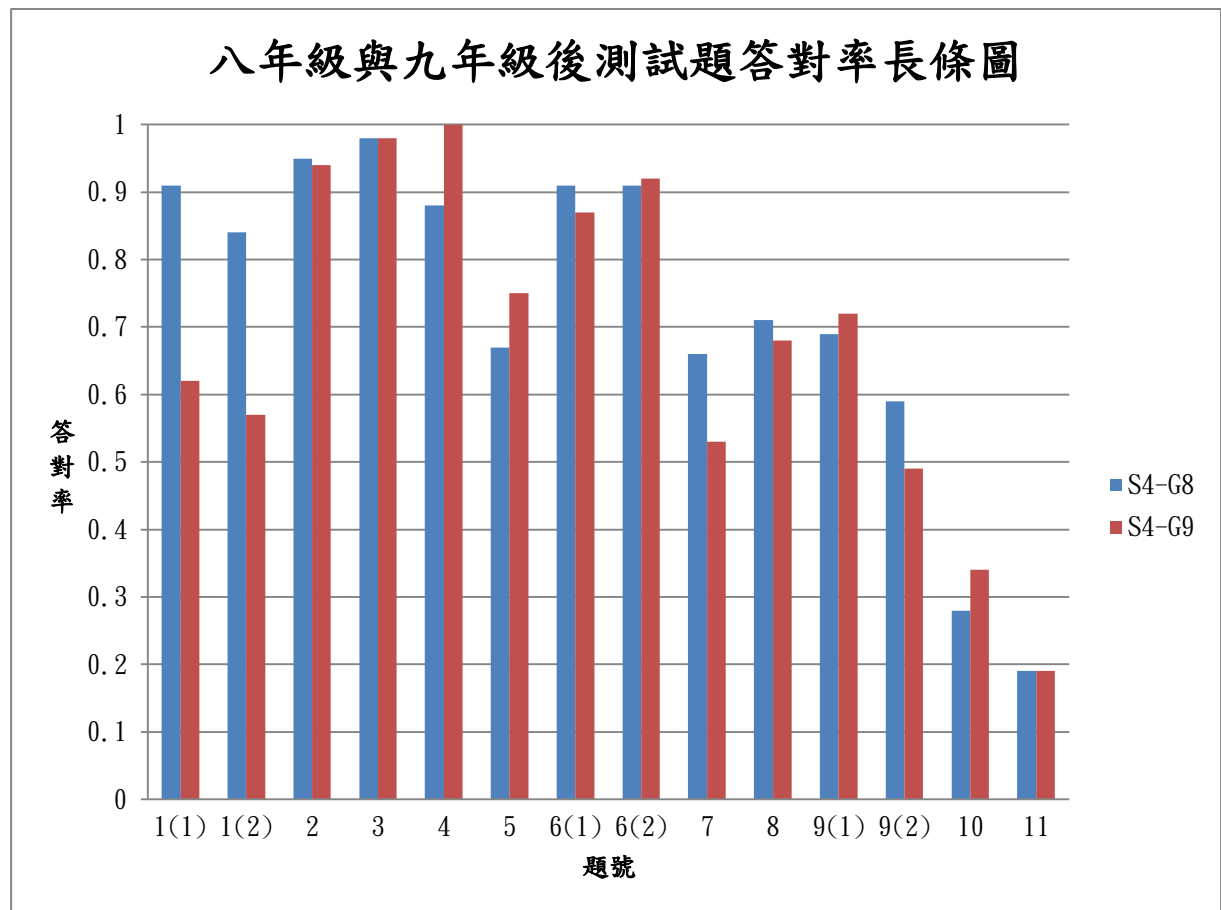


圖 4-2 八年級與九年級後測試題答對率長條圖

從答對率當中我們發現，在第一題主觀機率的部分，九年級與八年級依然具有相當大的落差，第十題與第十一題較複雜的機率題目，兩年級皆低於三成五，顯然列出樣本空間的能力，對於此單元是相當重要的。

第三節 機率延後測

本測驗採用成對樣本 t 檢定，來探討在接受國中機率課程後，相同的兩個八年級學生，在經過兩個月的時間，其對於機率的觀念是否與先前有差異，其中第十一題不計分，最後分析各題的答題狀況。本測驗選定的樣本，以 S-G8 男生 31 人、女生 26 人，共 57 人，其中一位女生同學請假故樣本數少一個，平均分數與前一節有些許差異。

(一) 八年級後測與延後測成對樣本 t 檢定

以下為八年級機率後測與延後測分數之敘述統計表，如表 4-13 所示。

表 4-13 八年級機率延後測分數之敘述統計表

	N	平均數	標準差
分數 T2	57	75.82	18.257
T3	57	72.39	20.292

從表 4.13 中可以讀出以下資訊，樣本共 57 個，機率後測分數的樣本平均數是 74.82，標準差是 18.257，機率延後測分數的樣本平均數是 72.39，標準差是 20.292，平均數略有下降，標準差些微提升。接著我們看成對樣本相關係數表，如表 4-14 所示。

表 4-14 八年級機率延後測分數之成對樣本相關性

	N	相關	顯著性
分數 T2 與 T3	57	.658	.000

從表 4.14 中可以看出，後測與延後測達顯著表示兩次測驗有相關。接著我們看成對樣本 t 檢定表，如表 4-15 所示。

表 4-15 機率後測與延後測成對樣本檢定表

		成對變數差異		T	df	顯著性 (雙尾)
		平均數	標準偏差			
分數	後測 - 延後測	3.439	16.048	1.618	56	.111

從表 4.15 中可以發現，t 統計量的值是 1.618，臨界信賴水準(顯著性)為 .111 > .05，接受虛無假設，在 $\alpha = .05$ 水準下，兩次測驗分數沒有顯著的差異，所以說明兩個的時間並沒有引起試驗者分數的明顯變化。

(二) 機率延後測試題答題分析

延後測試題共十一題，其中第十一題不計分，以兩次測驗做分組，分別計算後測與延後測各題的答對率來做比較，如表 4-16 與圖 4-3。

表 4-16 八年級延後測試題答對率表

題號	1(1)	1(2)	2	3	4	5	6(1)
T2-S4-G8	0.91	0.84	0.95	0.98	0.88	0.67	0.91
T3-S4-G8	0.98	0.88	0.96	0.88	0.89	0.51	0.89

6(2)	7	8	9(1)	9(2)	10	11
0.91	0.66	0.71	0.69	0.59	0.28	0.19
0.81	0.60	0.74	0.75	0.54	0.21	0.35

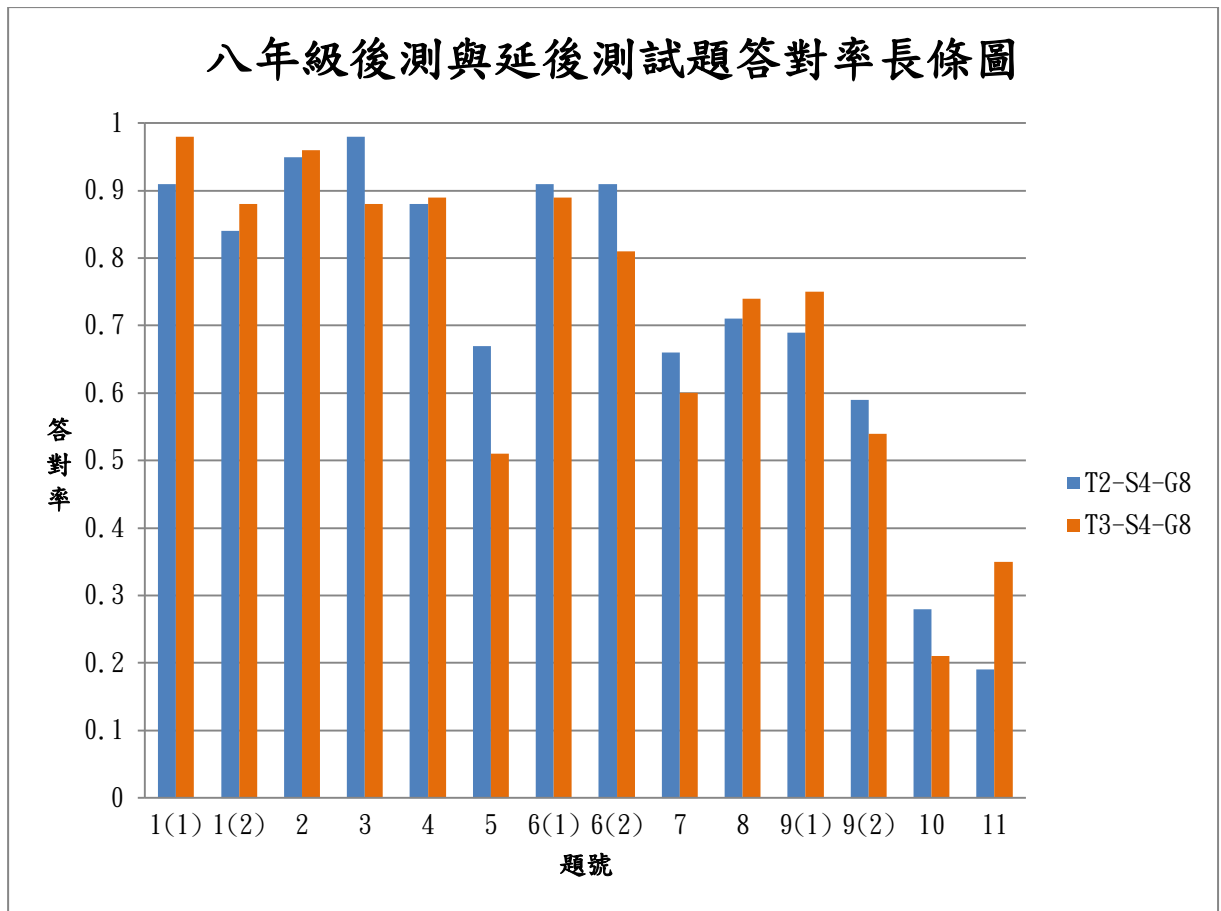


圖 4-3 八年級後測與延後測試題答對率長條圖

從答對率當中我們發現，除了第五題與第十一題之外，兩次測驗各題的答對率落差皆小於 0.1，而第五題與第十一題，皆為古典機率的複合事件，但兩題的答對率卻此消彼漲。

第四節 結果討論

一、學生未學習國中機率之自發性機率概念分析

我們從機率學前診測答題中發現，學生在尚未學習國中機率的課程之前，不管是九年級或是七年級的學生，其實已具備一定的主觀機率與古典機率概念，在

滿分 15 分中，S1-G9 與 S(2、3)-G7 的學生平均分數都達到 9.5 分以上，但是在樣本空間的概念卻是不清楚的，他們無法確實有效的列出所有的可能，進而討論事件發生的機率，所以導致他們在十一到十五題的答對率都相對前十題來的低，且十二與十三題的答對率更低於三成，甚至在十二題產生相對大的落差，而第一題的主觀機率部分也產生了一些差異，我們就以這些產生差異的部分進行討論。

1.主觀機率產生的古典機率迷思

學生在第一題投擲一枚圖釘，釘尖朝上、朝下的機率判別上，產生了主觀機率上的迷思，認為事情發生的可能只有兩種，所以機率就是二分之一，卻沒考慮到，兩事件所發生的機率不同。

九年級學生在經過兩年數學課程的訓練，在主觀機率的概念上可能已經僵化，而七年級的學生，較會以生活經驗來直覺反應，而且我國國小課程中，其實只有統計的課程，並無不確定性相關的課程，但若是以國小課程為基底，七年級相對九年級來說較為接近，九年級學生，在過去兩年的數學課程經驗，容易在這個部分想要試著把題目量化，故覺得二分之一是正確的。

2.樣本空間的概念不足

在十二題中，此題的測驗重點在於取後放回的概念，以及事件的有序性或獨立性，如果能確實列出樣本空間，則以上兩種概念都能輕易克服，避免發生錯誤，相較七年級的學生，九年級學生因為多了兩年的國中數學訓練，多能列出「錯誤」的樣本空間，九年級答錯的同學分成三類，

- (一) 錯誤在「取後放回」，誤認為第一次取 A，則第二次不能再取 A。(見圖 4-4)
- (二) 錯誤在有序的概念，誤認為(A, B)與(B, A)皆為此題所求。(見圖 4-5)
- (三) 空白或是未寫過程且答案錯誤。

相對九年級學生，七年級學生雖然在答對率上也是偏低，但是答對的同學，其作法大多是把兩次抽球的全部可能列出(見圖 4-6)，且部分同學已有乘法原理的觀念，以最直覺的想法去處理這個問題，並不會像九年級的學生，有過多錯誤的思考。

在第十三題中，列出樣本空間為此題主軸，只要能列出就能計算出甲獲勝的機率，但是兩個年級的學生顯然都還沒有樣本空間的概念，錯題者大多空白，只有少數同學能有規律的列出樣本空間，導致此題答對率僅一成。

12. 一袋子中有 4 個圓球，球上分別標記號碼 A、B、C、D。已知每一個球被取到的機會相等，若自袋中任取兩次球(一次一球，取後放回)，則取出的兩球號碼是 A、B 的機率為何？

圖 4-4 九年級第十二題錯誤案例 1

12. 一袋子中有 4 個圓球，球上分別標記號碼 A、B、C、D。已知每一個球被取到的機會相等，若自袋中任取兩次球(一次一球，取後放回)，則取出的兩球號碼是 A、B 的機率為何？

圖 4-5 九年級第十二題錯誤案例 2

12. 一袋子中有 4 個圓球，球上分別標記號碼 A、B、C、D。已知每一個球被取到的機會相等，若自袋中任取兩次球(一次一球，取後放回)，則取出的兩球號碼依序是 A、B 的機率為何？

$\frac{1}{16}$

圖 4-6 七年級第十二題答題案例

二、國中學生對於國中機率課程之學習表現

從 T2-S4-G8 與 T2-S4-G9 的平均分數上來看是差不多的，S4-G8 甚至略高於 S4-G9，而標準差是幾乎一樣。從教學內容及教材上來說，都是依照國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域來教學，唯一的差異在於，研究者於教學中，在主觀機率及要本空間中有多加著墨，詳細教學內容見教案的第二頁與第四頁，此差異在部分的題目中就產生兩個年級的分數落差，從題目的答對率可發現，主觀機率以及較複雜的機率題目，兩個年級的學生答題表現有差異，顯然列出樣本空間的能力，對於此單元是相當重要的，以下將從主觀機率及樣本空間，做兩個年級的答題作分析。

1.不同年級主觀機率連結古典機率概念的差異

從機率後測的答對率中我們發現，在第一題古典機率部分產生了落差，主要的因素為主觀機率教學的時間長短差異，在現今課綱及課本內容中，關於主觀機率的篇幅相當的少，課本僅三分之一頁的內容再說明主觀機率，且鮮少由主觀機率按部就班連結至古典機率，說明古典機率在樣本點發生的機率均等的條件，以釐清主觀機率造成的迷思，研究者鑑於主觀機率，為學生從小學升上國中後學習此單元的原生概念，故在此多加著墨，藉此機會說明事件發生的機率的的不同，以便與古典機率概念作為連結。

在本測驗中的第一題答對率上，S4-G8 約高於 S4-G9 三成，在第一題的第二小題中，大部分八年級的學生都能寫出「兩事件發生的機率不相同」(見圖 4-7)，表示只要在教學中多花一些時間在這個部分，其實就能有效地幫助學生釐清迷思，相較於機率裸測是是非題，若能寫出理由，代表著學生真的清楚了這個概念，九年級大部分的同學卻沒有寫出理由，或者寫出錯誤的理由(見圖 4-8、圖 4-9)，且與 T1-S1-G9-P1 答對率相近，在對九年級來說教學

前後是沒有進步的。

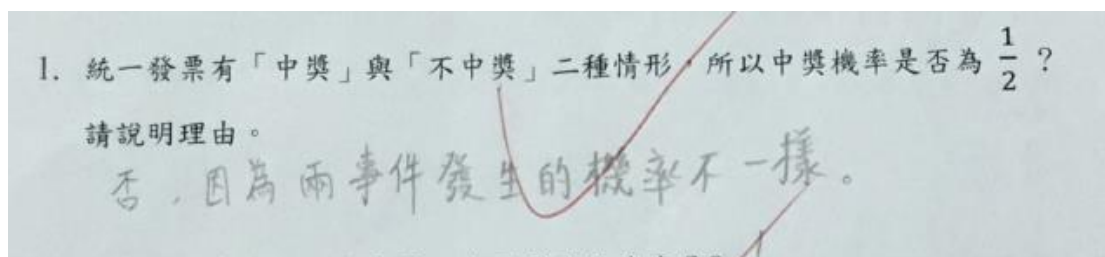


圖 4-7 八年級第一題答題案例

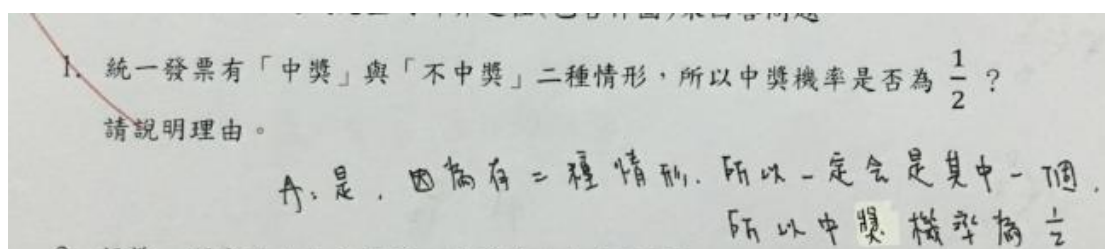


圖 4-8 九年級第一題答題案例 1

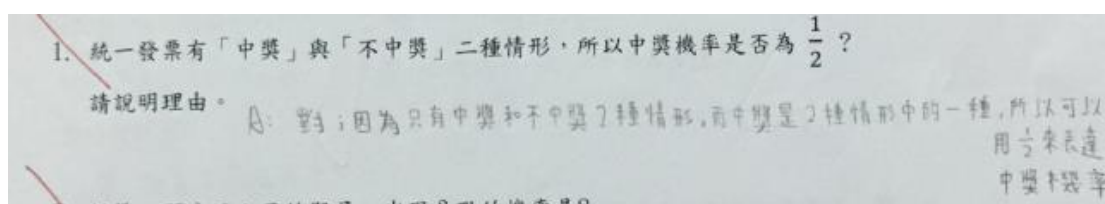


圖 4-9 九年級第一題答題案例 2

2. 利用樹狀圖列出樣本空間

在國中課綱中，僅把樹狀圖視為解題方法，且用引入一詞並無強制性，但研究者認為樹狀圖是有效列出樣本空間的好方法，且是切入機率課程的機會，研究者在國外的教科書中發現，皆以樹狀圖作為列樣本空間的方式，對於機率的獨立性與餘事件有相當大的幫助，對之後的條件機率或是樹枝上的機率有延續的概念，故研究者特別強調以樹狀圖作為樣本空間教學的唯一方式。本教學課程的規劃，在時間上相較過往來的多，並使同學多次練習繪製樹狀圖，介紹其中樹枝上的概念，在樹枝尾端以有序對的方式列出所有的可能，在使其計算所求事件的機率，

這樣的方式，能把機率的抽象概念具現化，讓學習更有效率。

在有關樣本空間的題目上，S4-G8 學生的表現略高於 S4-G9，在列出樣本空間的方法上，也較 S4-G9 有規律，如附圖 4-11，在單一事件上，雖然沒有太大的差異，但是當題目的事件較為複雜時，九年級在列出樣本空間，就會缺少或是產生錯誤，研究者也發現九年級的學生經常使用乘法原理，但是卻不是真正的了解其計算上的意義，乘法原理的概念建構在樣本空間上，從樹狀圖的分支上的機率我們可以更有效的使用乘法原理，但九年級樹狀圖概念薄弱，故計算樣本空間時，常有遺漏如，若是能有效地使用樹狀圖，則在列出樣本空間時較不易發生錯誤，如附圖 4-10。

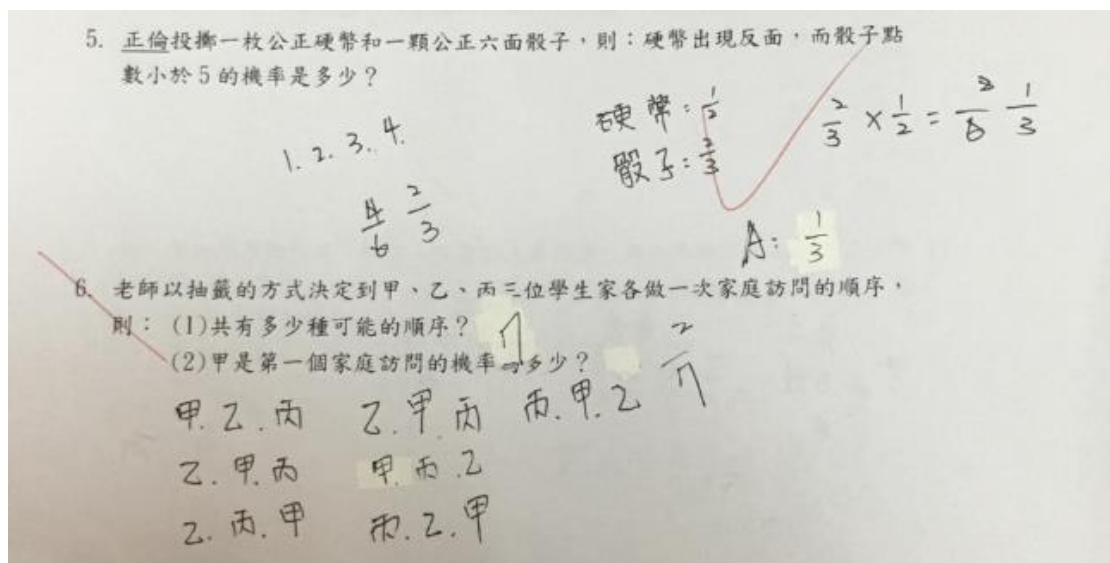


圖 4-10 九年級第五、六題答題案例

5. 正倫投擲一枚公正硬幣和一顆公正六面骰子，則：硬幣出現反面，而骰子點數小於5的機率是多少？

$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

6. 老師以抽籤的方式決定到甲、乙、丙三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則：(1) 共有多少種可能的順序？ 6 種

(2) 甲是第一個家庭訪問的機率為多少？ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

圖 4-11 八年級第五、六題答題案例

3. 樣本空間的迷思

本測驗的第十題：「在袋子裡有相同大小兩紅一藍的球，取兩次球每次取後放回，請問兩次取到相同顏色的機率為何？」在具有獨立性的題目，兩個年級的答對率皆低於四成，且在學生作答中可發現，鮮少有同學可以完整的列出樣本空間，在樹狀圖的繪製上，有兩種錯誤類型：

- (1) 在第二層的分支上，少一顆球，如圖 4-12 與圖 4-14。
- (2) 在樹枝的別類上只分紅、藍，如圖 4-13 與圖 4-15。

第一類的同學錯誤在取後未放回，所以在樣本空間中第二層，會少一個分支，造成樣本空間的錯誤，更不用討論事件的機率了。而研究者事後訪談數位同學，大多都是不了解取後放回的意思，因為在學生的生活經驗中，抽出來的東西就不會再放回去了，像是老師在課堂中抽籤，常常就是抽完籤後就不會再放回，避免抽到重複的同學，因此學生才會不了解什麼是取後放回，此類的學生錯誤在題意理解。而第二類學生的錯誤，在學生作答的樹狀圖中可發現，大都忽略了紅色有

兩顆，所以都少畫了一支的紅球，此類的學生在樣本空間的概念上，產生了迷思，不清楚題目抽取的是顏色還是球，雖然題目問的是同色的機率，但是此試驗抽取的是球，紅球與藍球被抽到的機率並不相同，所以在此產生了錯誤，會產生這種迷思是因為，在列出樣本空間時，的確只有四種「樣式」

{(紅，紅)，(紅，藍)，(藍，紅)，(藍，藍)}

可是紅色有兩顆，所以更準確的列法為：

{(紅₁，紅₁)，(紅₂，紅₂)，(紅₁，紅₂)，(紅₂，紅₁)，(紅₁，藍)，(紅₂，藍)，(藍，紅₁)，(藍，紅₂)，(藍，藍)}共九種可能

而在英國教科書中(圖 4-16)，他們的做法是直接在分支上加上機率，如此就可避免在此部分樣本空間產生迷思。

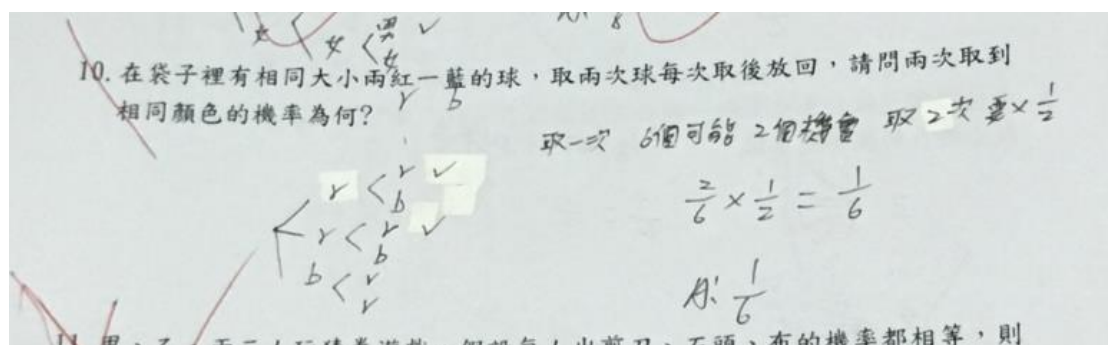


圖 4-12 八年級第十題答題案例 1

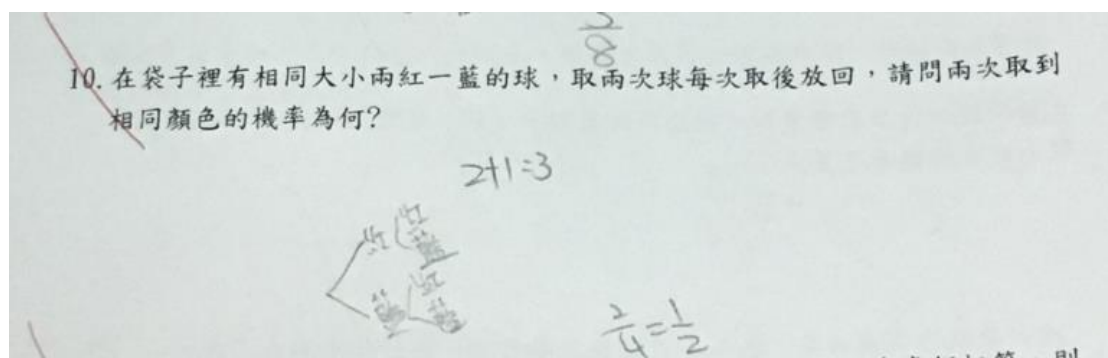


圖 4-13 八年級第十題答題案例 2

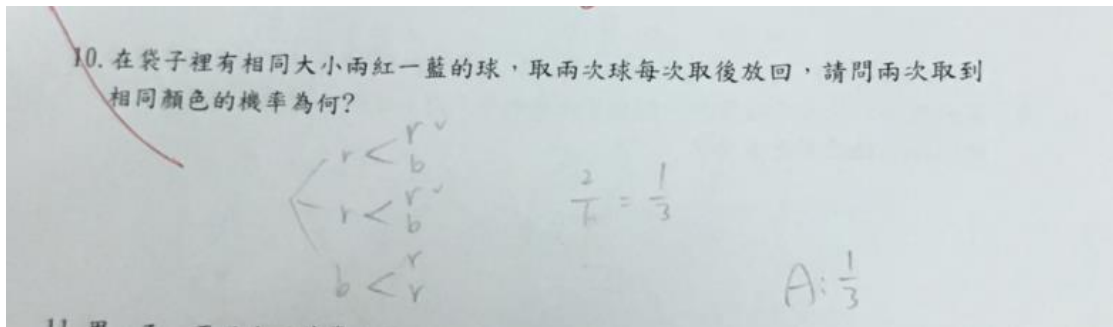


圖 4-14 九年級第十題答題案例 1

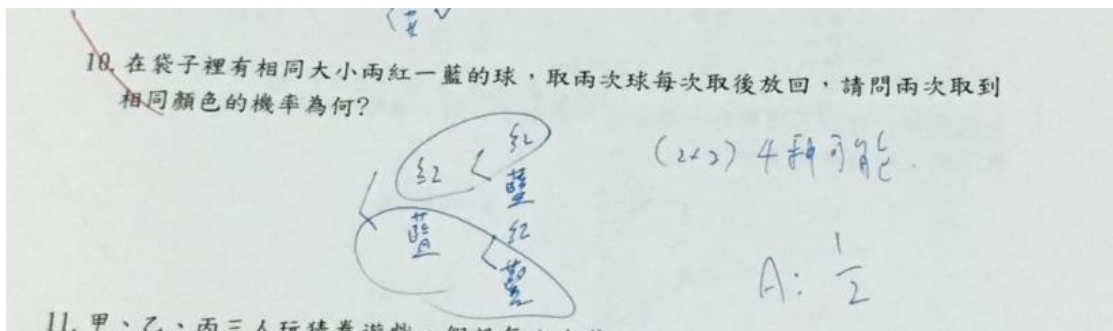


圖 4-15 九年級第十題答題案例 2

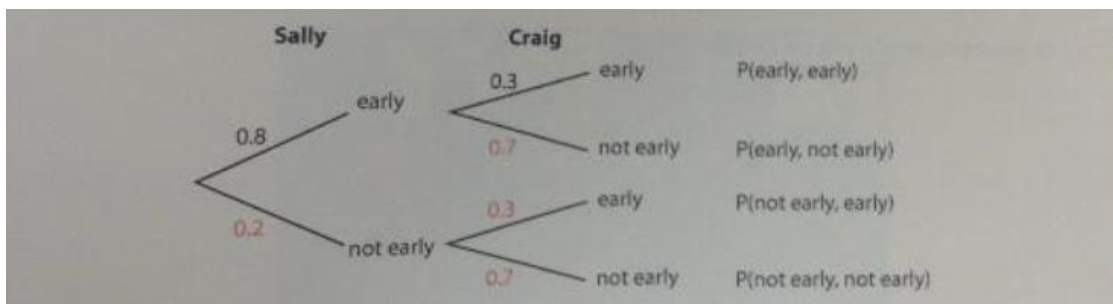


圖 4-16 英國教科書 Pearson 版本 Tier6

三、八年級學生對於機率課程的學習成效

從 T2-S4-G8 與 T3-S4-G8 的平均分數上來看是差不多的，T3 的平均分數略低於 T2，但兩次測驗的相關性相當的高，不過從答題狀況來看，除了第五題與第十一題外，其餘各題的答對率相差在 0.1 之間，顯示出機率學習課程的教學，其學習成效相當的好。然而在第五題與第十一題中，兩題的重點皆為列出樣本空間，第五題為兩層的樹狀圖，第十一題為三層，學生在延後測使用樹狀圖的頻率

依然相當的高，但是相較於後測，第五題的答對率卻降低，而第十一題卻是升高了，從題目敘述上來看這兩題：

5. 正倫投擲一枚公正硬幣和一顆公正六面骰子，則：硬幣出現正面，而骰子點數大於4的機率是多少？

11. 甲、乙、丙三人玩猜拳遊戲，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳甲獨贏的機率是多少？

我們發現第五題的情境在生活中並不常見，且其所求知條件敘述使用了不等式的概念，使得多數的學生，畫得出樹狀圖，也完整的列出樣本空間，但是在事件的個數上就發生錯誤(圖4-17)；而第十一題的情境，是日常生活中常見的狀況，即使經過兩個月，也能繪製較複雜的樹狀圖，且大多能完整地列出樣本空間，且相較於後測，更能準確地計算出機率(圖4-19、圖4-20)。

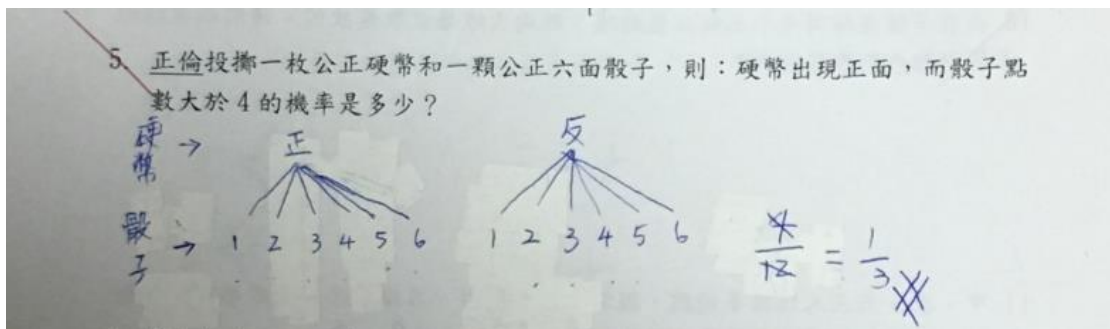


圖 4-17 八年級 T3 第五題答題錯誤案例

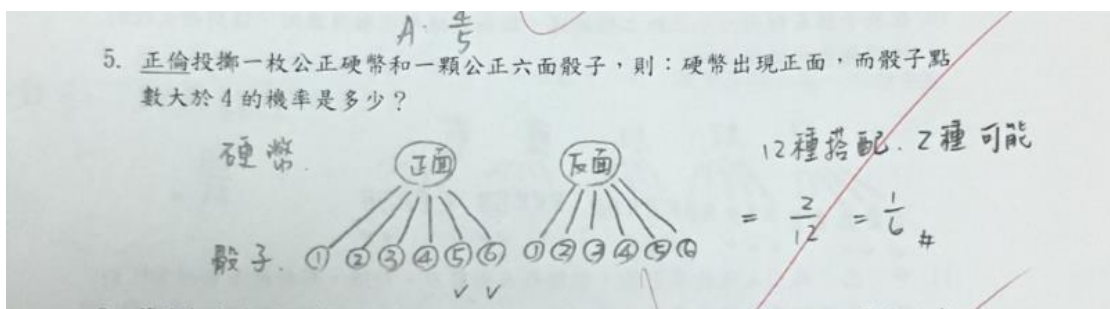


圖 4-18 八年級 T3 第五題答題正確案例

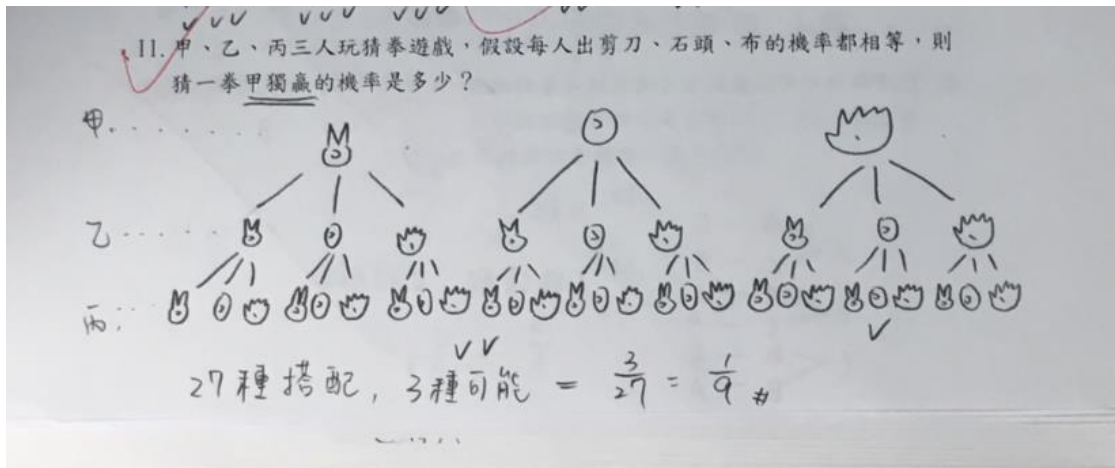


圖 4-19 八年級 T3 第十一題答題案例 1

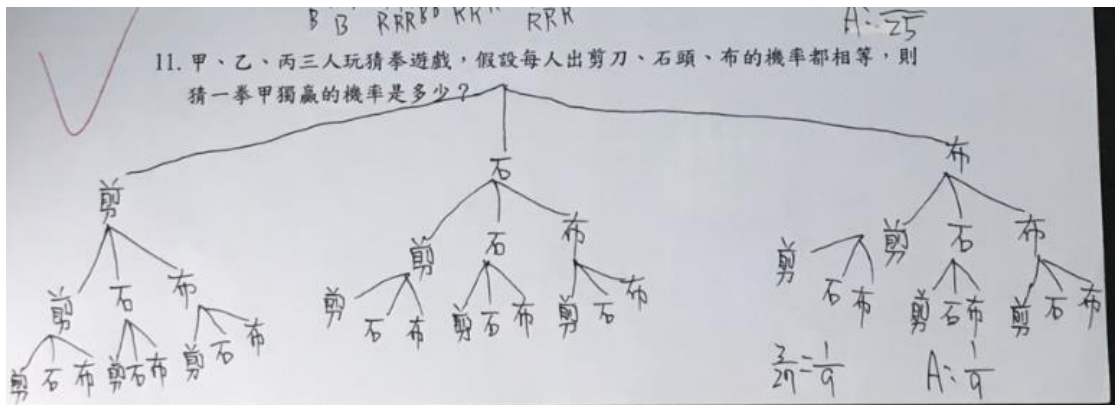


圖 4-20 八年級 T3 第十一題答題案例 2

第五章 結論與建議

第一節 結論

一. 不同年級的國中學生學習前的機率概念

從機率學前診測的成績中，九年級平均分數為 9.55 標準差 2.797，而七年級的平均分數為 9.73 標準差 2.994，不論是平均分數或是標準差可以說是幾乎相同。在尚未學習國中機率課程的國中學生，不論是七年級或是九年級的學生，對機率的形式及定義是模糊的，在機率概念上的表現是大多是沒有差異的，皆是以自發性機率來表現。但是九年級學生在主觀機率上卻隨著時間，使其思維僵化產生迷思。從試題分析中發現，大多數學生皆有一定的古典機率觀念，而且在答題上都直覺性地以百分比或分數的形式來說出答案，也能從生活經驗中，發現許多機率相關的應用，但是遇到樣本空間相關應用的機率問題時，都還不能有效地列出用本空間，甚至是列出錯誤的樣本空間，也不了解機率的性質，無法準確地計算出機率值，但是卻有少數學生能使用乘法原理計算機率問題。

二. 不同年級的國中學生學習機率後的表現

在機率後測的成績中，九年級平均分數為 73.32 標準差 18.476，而八年級的平均分數為 75.55 標準差 18.215，不論是平均分數或是標準差可以說是幾乎相同，甚至能說八年級的表現略好一些。

從相同的課程綱要與教學內容來看，八年級確實已經可以有效地學習國中機率課程，經過課程稍微的強調主觀機率，與教學中只使用樹狀圖作為列出樣本空間的唯一方法，在

這兩個部分的表現，都來得比九年級好。在樹狀圖的部分，對比課綱中只是建議使用，本研究則是在畫樹狀圖的教學中多花了一些時間，而且八年級學生經過教學後，在後測及延後測都能確實的使用樹狀圖，也能準確地列出樣本空間，使得機率概念更為清晰，減少自發性產生的迷思。

三. 八年級機率教學的有效程度

雖然八年級機率延後測平均分數相較後測略低三分，但是以檢定的結果來看是沒有差異的，即使經過兩個月的時間，依然保有機率課程教學後的機率概念，而且並沒有因為時間而忘記如何使用樹狀圖，甚至學生看到機率問題的反射動作就是先畫樹狀圖。從學生的答題狀況來看，不論是主觀機率的觀念，能夠說出事件發生的機率不相同，或是使用樹狀圖，有規律的列出樣本空間，都有明顯的成效，所以，經過相同的教學後，八年級學生是真正學會了國中的機率課程。

第二節 建議

一. 機率課程的推廣

在這個大數據時代裡，統計學已是當代最重要的學問之一，而作為統計的基礎，機率的觀念已然成為基本知識。在現今的十二年國教的數學領域課綱中，在十年級以前，只在六年級與九年級出現，但是從其他國家的課綱中發現，機率課程早就於更早的年紀就出現了，且為了延伸自發性機率概念，故建議將機率概念相關的課程，推廣至小學中年級開始。

二. 課程編排的建議

本研究在機率延後測後，在暑假輔導課期間，對該校七年級之學生進行相同的機率教學，也實施了機率後測，但因樣本數過少故不放入本研究，但是從此測驗的結果發現，七年級學生的平均分數也達 67.33 分，七年級學生也許也能夠學習 97 課綱裡的機率課程。在現今的十二年國教當中，七、八年級雖有統計相關課程，但是機率卻依然留在九年級，而且在九年級最後一個單元，以本國民情與實際教學現場的狀況來說，大多數學校為了大考，必將課程提前在寒假就結束，且為了複習先前的課程，機率課程可能快速得帶過，且教授時數可能不足課綱規定，導致學生機率概念較為混亂，若將機率課程螺旋至七年級甚至小學六年級，此問題便可解決，且在九年級也許可以發展更進階的機率課程，例如條件機率等機率概念，而九年級是否能學習更進階的機率課程，有待後人研究。

三. 機率教學方法與技術

在機率的教學方法上，根據國內外多位學者的研究，樹狀圖儼然已成為列出樣本空間最好的方法，在九年一貫數學領域課程綱要中雖以建議使用的形式呈現，但在十二年國教數學領域課程綱要，學習內容 D-9-2 已說明以樹狀圖分析所有的可能性，國中階段以對稱性（節點相同）的樹狀圖為主，在將來的國中機率課程裡，樹狀圖已成為必須學會的技術之一了。在教材上，機率題目的類型或是敘述，會影響學生的答題，若是與生活情境相關則表現較好，反之若是有太多數學形式的敘述，或是較複雜的計算，則會影響作答，故建議多使用生活化情境的題型作為教材。相較英國教科書，他們在樹狀圖的分支上已加上機率，如此可避免樣本空間產生的迷思，導致計算機率值產生錯誤，故建議樹狀圖要隨著機率課程，而發展出新型態的教學法。

參考文獻

一、中文部分

- 丁村成 (2008)。走一趟高中機率教學之旅。《數學傳播》，32(4)，33-50。
- 呂溪木 (1986)。變遷時代中我國數學課程的發展。《臺灣省國民學校教師研習會三十年紀念專刊》。新北市：台灣省國民學校教師研習會。
- 呂溪木 (2007)。民國 75 年之前我國數學課程演變。論文發表於「吳大猷先生百歲冥誕科學教育學術研討會～我國近五十年之科學教育發展」研討會，臺灣師範大科學教育所，臺北市。
- 周祝瑛 (2003)。台灣教育改革之研究。論文發表於「民辦教育」研討會。上海華東師範大學。取自 <http://www3.nccu.edu.tw/~iaezcpc/C-%20The%20research%20of%20taiwan%20education%20revolution%201.htm>
- 林以專 (2009)。數獨遊戲對我國國中學生機率樣本空間之影響。國立新竹教育大學碩士論文。
- 林陳涌等人(2011)。國際數學與科學教育成就趨勢調查 2011 國家報告。取自 <https://tilssc.naer.edu.tw/timss>
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛(2005)。中小學數學科課程綱要評估與發展研究(節錄本)。
- 陳玟樺 (2017)。民國五十至八十年代 (1961-2000 年) 數學課程改革之探究。教育部普通高級中學課程 數學學科中心 (臺北市立建國高級中學)。
- 翁秉仁 (2016)。小朋友適合學機率嗎？《科學人雜誌》，170。取自 <http://sa.ylib.com/MagArticle.aspx?Unit=columns&id=3058>
- 教育部 (1971)。高中數學課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部 (1975)。國民小學課程標準。臺北市：正中書局。
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數習領域。取自 http://teach.eje.edu.tw/data/files/class_rules/math.pdf
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。取自 http://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/87/pta_5320_2729842_56626.pdf
- 梁淑坤 (1994)。「擬題」的研究及其在課程的角色。《國民小學數學科新課程概說(低年級)》。新北市：台灣省國民學校教師研習會。
- 許哲毓、單維彰、劉柏伸 (2016)。樹狀圖在機率教學的應用-臺灣與英國教科書之比較。第四屆師資培育國際學術研討會，國立臺灣大學
- 許哲毓、單維彰(2018)。數學「不確定性」教材與評量之分析規準。論文發表於台灣教育評論月刊，頁 170-177。
- 張吉逸 (2016)。從自由擬題探究九年級學生的機率思維發展。國立中央大學碩士論文。
- 國家教育研究院(2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域。取自 <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-14987,c639-1.php>
- 單維彰、陳斐卿、許哲毓 (2018)。以學前診斷與自由擬題探討九年級學生的自發性機率概念。科技部專題研究成果報告(編號：NSC-104-2511-S-008-002-MY2)。

甯平獻 (2010)。數學教材教法。臺北市：五南。

劉秋木 (1996)。國小數學科教學研究。臺北市：五南。

鄭章華、單維彰 (2015)。素養導向之數學教材初探。邁向十二年國教新課綱的第一哩路：從課綱轉化到學校教育的系統性變革學術研討會，國家教育研究院。

二、英文部分

Bognar & Nemetz(1977). On the teaching of probability at secondary level.

Educational Studies in Mathematics, 8 , 399-404.

Charles,R . I., & Silver, E. A. (Eds.). (1988). The teaching and assessing of mathematical problem solving. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*.

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems: a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261-271.

Hart, K. (Ed.). (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*.

London: John Murray.

Hashimoto, Y. (1987). Classroom practice of problem solving in Japanese elementary schools. In J. P. Becker & T. Miwa (Eds), *Proceedings of the U. S.-Japan seminar on mathematical problem solving* (pp. 94-119). Carbon dale, IL: Southern Illinois University.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., & Tarr, J. E. (1999). Understanding students' probabilistic reasoning. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in Grades K-12: 1999 Yearbook* (pp.146-155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Li, J. (2000). Chinese students understanding of probability, *Unpublished doctoral dissertation*, National Institute of Education. Nanyang Technological University, Singapore, 2000.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics *National Council of Teachers of Mathematics Commission on Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM

NCTM (2000). National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children* (L. J. Leake & P. D. Burrell & H. D. Fischbein, Trans.). London: Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1951)

Reitman, W.(1965). *Cognition and thought*. New York : Wiley.

- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: National Council of Teachers of Mathematics and MacMillan.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/>
- Writz, R. W. & Kahn, E. (1982). Another look at application in elementary school mathematics. *Arithmetic Teacher*, 30,21-25.

附錄一、機率學前診測

你有多厲害？—不學就會的機率測試

班級

座號

是非題 (正確答 O，錯誤答 X)

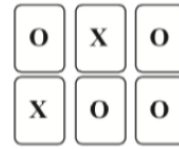
1. () 投擲一枚圖釘，釘尖朝上、朝下的機率一樣
2. () 投擲一枚公正硬幣，正面朝上的機率是 $\frac{1}{2}$
3. () 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率是 $\frac{1}{2}$
4. () 投擲一粒均勻骰子，每一種點數出現的機率都是 $\frac{1}{6}$ ，所以每投六次，必出現一次「1 點」

簡答及計算題

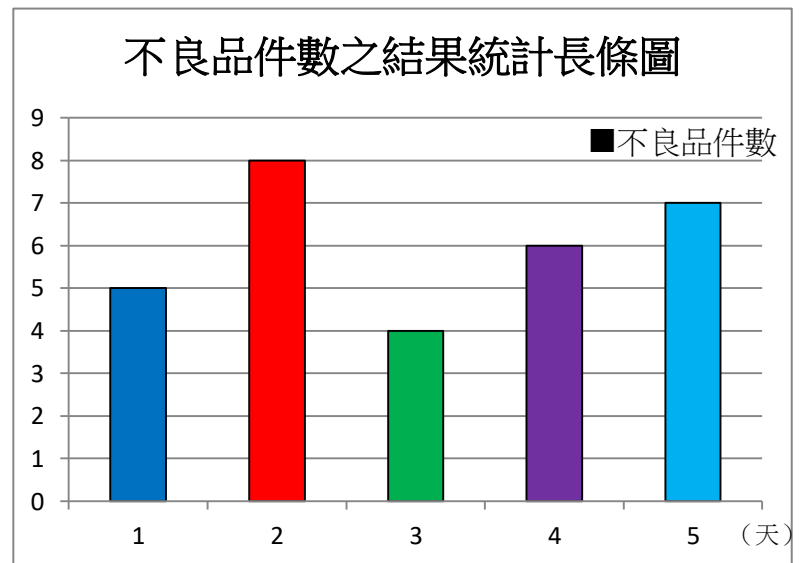
5. 投擲一顆公正六面的骰子，出現 3 點的機率是 _____。
6. 投擲一顆公正六面的骰子，出現 7 點的機率是 _____。
7. 一副撲克牌有 52 張（不含鬼牌），分為黑桃（♠）、紅心（♥）、方塊（♦）及梅花（♣）4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、...、K。試問：從撲克牌中任取 1 張，抽到花色是黑桃的機率是多少？
8. 一個袋子裡有 10 顆相同大小的球，分別是 7 顆紅球、3 顆白球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球是紅球的機率是多少？
9. 一個袋子裡有 30 顆相同大小的球，編號：1、2、3、4、5、.....、29、30，從袋中任意取出一球，每顆球被取到的機會均等。試問：此球的號碼小於或等於 10 的機率是多少？
10. 下表顯示某籤筒中各種籤的數量。已知每支籤被抽中的機會均相等，若自此筒中抽出一支籤，則抽中紅籤的機率為何？

籤		數量(支)
紅籤	深紅	3
	淺紅	13
藍籤	深藍	7
	淺藍	1

11. 怡君有 24 張卡片，其中 12 張卡片被畫上 O 記號，另外 12 張卡片被畫上 X 記號。下圖表示怡君拿出 6 張卡片放在桌上的情形，且她打算從剩下的卡片中，再抽出一張卡片。若剩下的每張卡片被抽出的機會相等，則她抽出 O 記號卡片的機率為何？



12. 一袋子中有 4 個圓球，球上分別標記號碼 A、B、C、D。已知每一個球被取到的機會相等，若自袋中任取兩次球(一次一球，取後放回)，則取出的兩球號碼依序是 A、B 的機率為何？
13. 甲、乙各丟一次公正六面骰子比大小。若某人的點數較大時，算他獲勝；若兩人的點數相同時，算兩人平手。求甲獲勝的機率是多少？
14. 已知甲校有 600 人，其中男生佔 60%；乙校有 900 人，其中男生佔了 50%。今將甲、乙兩校合併後，任意抽出一位學生，每個人被抽到的機會相等，抽中男生的機率為何？
15. 某工廠連續五天、每天生產 100 件玩具，該工廠品管部對當天生產的每件玩具做不良品測試，下圖為五天內所測試的結果。以後該工廠每天正式生產 1000 件玩具，試問依此測試結果，預估此工廠生產不良玩具的機率為何？



附錄二、國中機率教案

國中數學機率教案

授課老師:簡正倫 授課對象:國中八年級

教案名稱	機率與樹狀圖教案				
適合人數	30 人	教學時間	三節(共 135 分鐘)	學習領域	國中數學
適用年級	國中八年級				
摘要	生活上，一般人經常要做決策，處理相當多不確定性的事務(緣於本質上隨機的原因、結構複雜的原因、或資訊不足的原因)。雖然在人類史上，使用清楚的數學方法來處理不確定性的概念，是相當晚近的事情，但是機率論及其在科學上的應用已經非常重要，因此學生應慢慢開始學習。(九年一貫數學課綱 9-d-05 說明)				
先備知識	分數及小數的四則運算。				
能力指標	D-4-04 能在具體情境中認識機率的概概念。 C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。 C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。 C-S-04 能多層面的理解，數學可以用來解決日常生活所遇到的問題。 C-C-03 能用一般語言與數學語言說明情境與問題。 C-E-01 能用解題的結果闡釋原來的情境問題。 9-d-05 能在具體情境中認識機率的概概念。				
教學目標	1.能由具體情境中認識機率的意義與概念。 2.能在機會均等的條件下，求出簡單事件的機率。 3.能利用樹狀圖，分析試驗的可能結果與事件的機率。				
教學法	講述法，互動式教學法。				
教學資源	國民中學翰林版第六冊數學課本、自製學習單				

教學程序以及教學方法概述	時間分配
<p>※第一節課 (45 分鐘)</p> <p>準備活動: 發放學習單</p> <p>發展活動： 認識機率: 介紹生活中常見的機率，並讓學生舉例，並糾正學生所提出的例子是否為機率。若學生提出非機率的例子，則可連接進入，國中數學中，機率的意義，並從上列所舉的機率案例中說明機率就是「事情發生的可能性」，且從例子中說明，他們都是介於「0 到 1 之間的數」，數學上我們常用的就是分數、小數、百分率，並說明機率中 0 與 1 的意義是什麼。</p> <p>機率的意義與計算(古典機率): 介紹事件，以擲硬幣與擲骰子為例，說明事件的定義，再說明機率如何計算</p> $\text{事件發生的機率} = \frac{\text{事件所含可能結果的個數}}{\text{試驗所有可能的個數}}。$ <p>在數學上，如果一個試驗可能出現的結果有 n 種，而且每一種結果出現的機會相等，那麼每一種結果出現的機率都是 $\frac{1}{n}$。</p> <p>如果一個試驗可能出現的結果有 n 種，兒事件包含了 m 種可能的結果我們就說:事件發生的機率是 $\frac{m}{n}$。</p> <p>以圖釘舉例(課本)，說明每一種結果出現的機會相等在主觀機率上的迷思。</p> <p>強調在古典機率中每一事件發生的機率都要相等，否則在機率的計算上就會出現錯誤。</p> <p>再以班上的籤筒抽籤為例計算抽中自己的機率: 例子:抽籤的結果有兩種，抽到「自己」跟「不是自己」，所以抽到自己的機率是否為 $\frac{1}{2}$?以這個例子讓同學思考主觀機率中的迷思，並在黑板寫出正確的計算應為，有三十支籤，所以每一支籤被抽中的機率應該是 $\frac{1}{30}$所以抽到自己的機率應為 $\frac{1}{30}$。</p> <p>此例子可同時解釋主觀機率上的迷思，以及計算古典機率的方法。</p> <p>例題示範:</p>	<p>2 分鐘</p> <p>10 分鐘</p> <p>18 分鐘</p>

在黑板演練範例 1		3 分鐘
【範例 1】 (1)投擲一公正硬幣，硬幣有正反兩面，請問投出正面的機率是? (2)投擲一顆公正六面的骰子，出現 5 點的機率是?出現偶數點的機率是?		
讓同學馬上演練練習 1 並檢討。		4 分鐘
【練習 1】 投擲一顆公正六面的骰子，回答下列問題。 (1)點數大於 4 的機率? (2)點數小於 4 的機率? (3)點數小於 7 的機率?		
在黑板演練範例 2		
【範例 2】 一副撲克牌有 52 張（不含鬼牌），分為黑桃（♠）、紅心（♥）、方塊（♦）及梅花（♣）4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、...、K。 試問： (1)抽到黑桃 2 的機率是多少? (2)抽到 J、Q、K 的機率是多少?		3 分鐘
讓同學馬上演練練習 2 並檢討。		
【練習 2】 一副撲克牌有 52 張，從中任取一張，求抽到花色是紅心的機率。		4 分鐘
交代作業，自我評量第 1、2 題。		1 分鐘
		合計:45 分鐘
作業 評量	學習單自我評量第 1、2 題	
備註		
在經過主觀機率迷思觀念上需花費較長的時間解釋，而古典機率的計算上，對於學生來說其實較為容易，所以在第一節課，須建立好學生對機率的觀念。		

教學程序以及教學方法概述	時間分配
--------------	------

<p>※第二節課 (45 分鐘)</p> <p>準備活動: 回家作業自我評量第一、二題檢討，複習古典機率的計算。</p> <p>發展活動： 在黑板演練範例 3</p>	<p>8 分鐘</p> <p>2 分鐘</p>
<p>【範例 3】 一個袋子裡有 20 顆相同大小的球，分別是 12 顆紅球、8 顆白球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球是紅球的機率是多少？</p>	
<p>讓同學馬上演練練習 3 並檢討。</p>	<p>2 分鐘</p>
<p>【練習 3】 一個袋子裡有一些大小相同的球，分別有 3 顆紅球、4 顆白球、5 顆黑球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則： (1)此球是黑球的機率是多少？ (2) 此球不是黑球的機率是多少？</p>	
<p>第二小題可給予「餘事件的概念」，兩種想法都做給學生看，但是在此觀念勿做過的著墨，並非國中機率的重點。</p>	<p>2 分鐘</p>
<p>利用樹狀圖列出樣本空間： 在此並不需要說出或解釋樣本空間這個名詞，可用「所有的可能」這說法，對國中生來說較能接受，且可避免定義新的名詞，造成學生學習此章節的負擔。</p> <p>詢問同時投擲一枚硬幣與一枚骰子，硬幣是正面且骰子出現的點數是 6 點，我們該如何計算出機率呢？ 請學生先用自己的方式列出所有的可能，並觀察學生所使用的方式，給予學生思考時間。 再引導學生利用「有規律地列舉」來畫出樹狀圖。此部分先以橫向方式介紹樹狀圖。 畫完後有幾個重點務必提醒學生 (1) 樹狀圖的每一層的分支機率都要相同，這代表發生這件事情的機率。</p>	<p>18 分鐘</p>

<p>(2) 樹狀圖的尾端個數，代表著樣本空間的個數，在此請用所有的可能有幾種來說明。</p> <p>(3) 在尾端的部分標上數對，表示這個事件中的其中一個可能，且避免與其他的可能混淆。</p> <p>最後計算我們要算的事件個數，去除以樣本空間的個數，就是我們要的事件發生的機率。</p> <p>再舉一例子，投擲一枚公正硬幣兩次，可能出現的結果。</p> <p>此部分使用直向樹狀圖，告知學生樹狀圖的畫法可以是直式或是橫式，列出樣本空間，並說明(正，反)與(反，正)為兩種不同的結果，分別代表的意義為何，建立起有序的概念。</p> <p>在黑板演練範例 4(使用樹狀圖)</p>	<p>3 分鐘</p>
<p>【範例 4】</p> <p>投擲一枚公硬幣 3 次，求以下的機率。</p> <p>(1)3 次都是正面的機率。 (2)出現 2 次正面 1 次反面的機率。</p>	<p>3 分鐘</p>
<p>讓同學馬上演練練習 4 並檢討(使用樹狀圖)</p>	<p>6 分鐘</p>
<p>【練習 4】</p> <p>投擲一枚公硬幣 3 次，求以下的機率。</p> <p>(1) 出現 1 次正面 2 次反面的機率。 (1)至少 1 次反面的機率。</p>	<p>6 分鐘</p>
<p>第 2 小題在講解時，可再一次使用「餘事件」的概念搭配樹狀圖來說明，而且使用樹狀圖，學生能清楚的看出所有的可能，可增進「餘事件」的概念理解。</p> <p>交代作業，自我評量第 3、4、5、6 題。</p>	<p>1 分鐘</p> <p>共 45 分鐘</p>
<p>作業 評量</p>	<p>學習單自我評量第 3、4、5、6 題。</p>
<p>備註</p>	
<p>1. 在樹狀圖的畫法講解時，請同學跟著練習畫，並給予多一點的時間去練習這個方法。</p> <p>2. 自我評量第五題的第 3 小題，為取後不放回的方式，在下一節課務必為學生檢討此題。</p>	

教學程序以及教學方法概述	時間分配
<p>※第三節課 (45 分鐘)</p> <p>準備活動:</p> <p>檢查回家作業，但是請留到此節後半部再為學生檢討。</p> <p>利用【練習 4】複習樹狀圖的畫法與觀念。</p> <p>發展活動：</p> <p>在黑板演練範例 5(使用樹狀圖)</p>	<p>1 分鐘</p> <p>3 分鐘</p>
<p>【範例 5】</p> <p>正倫有紅、黃、藍、綠四件不同顏色的上衣，藍、綠、白三件不同顏色的褲子，任取一件上衣和任一條褲子做搭配，回答下列問題。</p> <p>(1) 今天正倫要外出，從以上的衣褲中做搭配，請問共有幾種搭配?</p> <p>(2) 搭到相同顏色的衣褲的機率是多少?</p>	<p>4 分鐘</p>
<p>讓同學馬上演練練習 5 並檢討(使用樹狀圖)</p>	
<p>【練習 5】</p> <p>倫倫跟琪琪進行猜拳遊戲(剪刀石頭布)，每人出每種拳的機會都相等，則猜一次拳倫倫獲勝的機率是多少?(規則:剪刀贏布、石頭贏剪刀、布贏石頭。)</p>	<p>5 分鐘</p>
<p>此題使用樹狀圖可避免學生忽略平手的狀況。</p> <p>在黑板演練範例 6(使用樹狀圖)</p>	
<p>【範例 6】</p> <p>同時擲兩顆公正骰子，回答下列問題。</p> <p>(1) 點數和是 7 的機率。 (2) 點數和大於 9 的機率。</p>	<p>4 分鐘</p>
<p>可以給兩顆骰子命名為甲、乙，方便繪製樹狀圖且建立有序的觀念，雖然在樹狀圖上已可避免這種迷思發生，但為了避免學生在計算樣本空間</p>	

<p>的個數時發生錯誤，須強調有序的觀念。 例如：學生可能勿把(3, 4)與(4, 3)視為同一種可能。 此題請留在黑板勿擦。</p> <p>讓同學馬上演練練習 6 並檢討(使用樹狀圖)</p>	
<p>【練習 6】 擲一顆公正骰子兩次，求兩次點數相同的機率？</p>	5 分鐘
<p>利用範例 6 與演練 6 說明，同時擲兩顆公正骰子與擲一顆公正骰子兩次，雖然說法上不相同，但是繪製出的樹狀圖是相同的，代表兩者有幾乎一樣的樣本空間，且再次強調有序的觀念。</p> <p>在黑板演練範例 7(使用樹狀圖)</p>	
<p>【範例 7】 用 2、3、4 三個數字卡，任意排成一個三位數，則 (1)排出的數共有多少可能？(2)排出的數是 2 的倍數的機率是多少？</p>	4 分鐘
<p>此題要強調的是取後不放回的觀念，在繪製樹狀圖時，需提醒學生，使用過的字卡在第二層或第三層不要再出現。</p> <p>讓同學馬上演練練習 7 並檢討(使用樹狀圖)</p>	
<p>【練習 7】 簡老師決定用抽籤的方式決定改考卷的順序，分別有 A、B、C 三位學生的考卷要改，則： (1)共有多少種可能的順序？ (2)B 是第一個被改到的機率為多少？</p>	5 分鐘
<p>作業檢討自我評量第 3、4、5、6 題。 此時第 5 題的第 3 小題，學生應可理解取後不放回的概念，請勿使用條件機率，僅須利用簡單的減法即可。</p> <p>自我評量第 7 題，僅提示學生如何繪製此題的樹狀圖。</p> <p>課程總結：</p>	8 分鐘
<p>1. 機率的意義。</p>	2 分鐘
<p>2. 古典機率的計算，每一種發生的機率都要相同。</p>	4 分鐘

<p>3. 主觀機率上的迷思，強調事件的機率。</p> <p>4. 樹狀圖的繪製與計算樣本空間。</p> <p>5. 有順序性的樣本空間與取後不放回的觀念。</p>	<p>共 45 分鐘</p>
<p>作業 評量</p>	<p>自我評量第 7 題</p>
<p>備註</p>	

附錄三、機率學習單

機率學習單

學校:

班級:

座號:

姓名:

認識機率:

日常生活中，我們常用「機率」表示一個事件發生的機率大小，例如：

1. 2017 年球季中華職棒桃猿隊奪冠的機率是 $\frac{1}{4}$ 。
2. 明天降雨機率是 30%。
3. 統一發票中 200 元的機率是 $\frac{1}{1000}$ 。
4. 正倫投球的好球率是 7 成。
5. 簡城武的打擊率是 0.426。

根據上述的描述，所以你認為機率是什麼？

其實機率就是「**事情發生的可能性**」。

而我們該如何探討這個可能性呢？數學上我們常用的就是分數、小數、百分率。

同學你有沒有發現以上描述機率的這些數都有一些特性，他們都是介於「0 到 1 之間的數」，若事件的機率是 1，則表示此事件一定會發生；若事件的機率是 0，表示此事件一定不會發生。那我們該如何去計算出這些機率呢？

機率的意義與計算：

事件：試驗會出現某些結果，其中符合某指定性質的結果，稱為事件。

$$\text{事件發生的機率} = \frac{\text{事件所含可能結果的個數}}{\text{試驗所有可能的個數}}$$

在數學上，如果一個試驗可能出現的結果有 n 種，而且每一種結果出現的機會相等，那

麼每一種結果出現的機率都是 $\frac{1}{n}$ 。

如果一個試驗可能出現的結果有 n 種，兒事件包含了 m 種可能的結果我們就說：

事件發生的機率是 $\frac{m}{n}$ 。

【範例 1】

- (1)投擲一公正硬幣，硬幣有正反兩面，請問投出正面的機率是?
(2)投擲一顆公正六面的骰子，出現 5 點的機率是?出現偶數點的機率是?

【練習 1】

投擲一顆公正六面的骰子，回答下列問題。

- (1)點數大於 4 的機率? (2)點數小於 4 的機率? (3)點數小於 7 的機率?

【範例 2】

一副撲克牌有 52 張 (不含鬼牌)，分為黑桃 (♠)、紅心 (♥)、方塊 (♦) 及梅花 (♣) 4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、...、K。試問：

- (1)抽到黑桃 2 的機率是多少?
(2)抽到 J、Q、K 的機率是多少?

【練習 2】

一副撲克牌有 52 張，從中任取一張，求抽到花色是紅心的機率。

【範例 3】

一個袋子裡有 20 顆相同大小的球，分別是 12 顆紅球、8 顆白球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球是紅球的機率是多少？

【練習 3】

一個袋子裡有一些大小相同的球，分別有 3 顆紅球、4 顆白球、5 顆黑球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則：

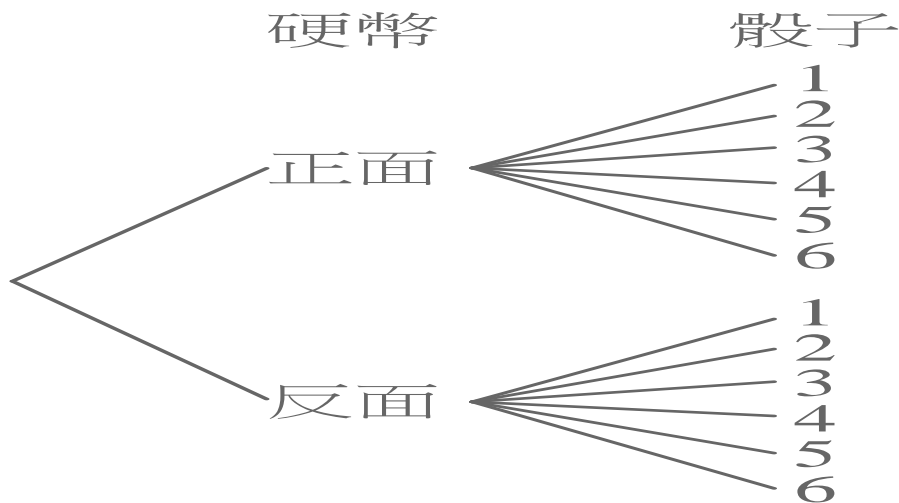
- (1)此球是黑球的機率是多少? (2) 此球不是黑球的機率是多少?

在上一節中，我們討論到試驗所有的可能有多少，但是兩種事件同時出現的機率，此時我們該如何計算出試驗所有的可能結果呢？

例如同時投擲一枚硬幣與一枚骰子，硬幣是正面且骰子出現的點數是 6 點，我們該如何計算出機率呢？

此時我們可以利用一個很棒的工具 **樹狀圖** 來幫助我們計算出所有的可能。

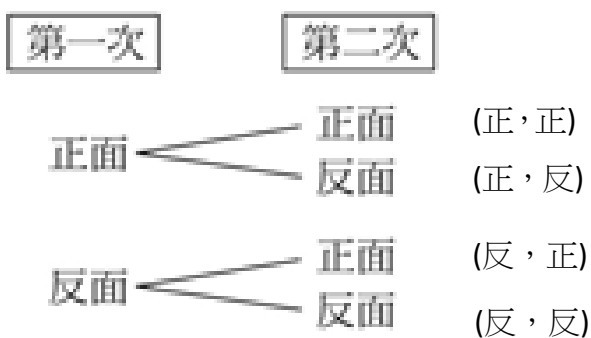
以上的例子，樹狀圖如下



那麼所有的可能就是 **樹狀圖尾端的個數** 有 12 種，而硬幣是正面且骰子出現的點數是 6 點的，就是其中的一種，此事件的機率就是 $\frac{1}{12}$ 。

習慣上，我們會在尾端的部分標上數對，表示這個事件中的其中一個可能，且避免與其他的可能混淆。

例如投擲一枚公正硬幣兩次，可能出現的結果。



這個事件可能的結果就是 4 種。

【範例 4】

投擲一枚公硬幣 3 次，求以下的機率。

(1) 3 次都是正面的機率。 (2) 出現 2 次正面 1 次反面的機率。

【練習 4】

投擲一枚公硬幣 3 次，求以下的機率。

(1) 出現 1 次正面 2 次反面的機率。 (2) 至少 1 次反面的機率。

【範例 5】

正倫有紅、黃、藍、綠四件不同顏色的上衣，藍、綠、白三件不同顏色的褲子，任取一件上衣和任一條褲子做搭配，回答下列問題。

(1) 今天正倫要外出，從以上的衣褲中做搭配，請問共有幾種搭配？

(2) 搭到相同顏色的衣褲的機率是多少？

【練習 5】

倫倫跟琪琪進行猜拳遊戲(剪刀石頭布)，每人出每種拳的機會都相等，則猜一次拳倫倫獲勝的機率是多少？(規則：剪刀贏布、石頭贏剪刀、布贏石頭。)

【範例 6】

同時擲兩顆公正骰子，回答下列問題。

- (1)點數和是 7 的機率。 (2)點數和大於 9 的機率。

【練習 6】

擲一顆公正骰子兩次，求兩次點數相同的機率？

【範例 7】

用 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{3}$ 、 $\boxed{4}$ 三個數字卡，任意排成一個三位數，則

- (1)排出的數共有多少可能？(2)排出的數是 2 的倍數的機率是多少？

【練習 7】

簡老師決定用抽籤的方式決定改考卷的順序，分別有 A、B、C 三位學生的考卷要改，則：

- (1)共有多少種可能的順序？
(2)B 是第一個被改到的機率為多少？

自我評量

1. 投擲一顆公正六面的骰子，回答下列問題。
 - (1)點數大於2的機率？ (2)點數小於5的機率？(3)點數小於7的機率？
2. 一副撲克牌有52張（不含鬼牌），分為黑桃（♠）、紅心（♥）、方塊（♦）及梅花（♣）4種花色，每種花色各有13張，分別是A、2、3、...、K。試問：從撲克牌中任取1張，抽到花色是梅花，點數大於6且小於10的機率是多少？
3. 若生男和生女的機會相等，則一個家庭有兩個小孩時，試以樹狀圖表示這兩個小孩性別的所有可能結果，並求下列各事件的機率。
 - (1)畫出樹狀圖。
 - (2)兩個孩子都是男孩。
 - (3)第一個是女孩，第二個是男孩。
4. 依序投擲2顆骰子時，試求下列事件的機率。
 - (1)兩顆骰子的點數和小於6。
 - (2)兩顆骰子的點數均為質數。
5. 一袋中裝有3顆白球、5顆黃球、2顆黑球，阿正和阿簡輪流自袋中抽出一球，試回答下列問題：
 - (1)阿正從袋中抽出一球，則此球為黃球的機率是多少？
 - (2)若阿正抽完球後將球放回袋中，再由阿簡抽出一球，則此球為黃球的機率是多少？
 - (3)若阿正抽中的球恰為黃球，且抽完後沒有放回袋中，再由阿簡抽出一球，則此球為黃球的機率是多少？
6. 琪琪投擲一枚硬幣和一顆骰子，則：
 - (1)硬幣出現正面，而骰子點數為奇數的機率是多少？
 - (2)硬幣出現反面，而骰子點數小於3的機率是多少？
7. 金城武和正倫玩猜拳遊戲，若兩人出剪刀、石頭、布的機率都相同，且僅猜一次即決定勝負(不含平手)的機率是多少？以樹狀圖說明你的看法。

附錄四、國中機率測驗(後測)

國中機率測驗

學校: 班級: 座號: 姓名: 分數:

答題說明:請以敘述或完整的計算過程(包含作圖)來回答問題。

1. 統一發票有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率是否為 $\frac{1}{2}$ ？
請說明理由。
2. 投擲一顆公正六面的骰子，出現3點的機率是？
3. 一副撲克牌有52張（不含鬼牌），分為黑桃（♠）、紅心（♥）、方塊（♦）及梅花（♣）4種花色，每種花色各有13張，分別是A、2、3、...、K。試問：從撲克牌中任取1張，抽到花色是黑桃的機率是多少？
4. 一個袋子裡有10顆相同大小的球，分別是7顆紅球、3顆白球，每顆球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球是紅球的機率是多少？
5. 正倫投擲一枚公正硬幣和一顆公正六面骰子，則：硬幣出現反面，而骰子點數小於5的機率是多少？
6. 老師以抽籤的方式決定到甲、乙、丙三位學生家各做一次家庭訪問的順序，則：
(1)共有多少種可能的順序？
(2)甲是第一個家庭訪問的機率為多少？

7. 甲箱內有 4 顆球，顏色分別為紅、黃、綠、藍；乙箱內有 3 顆球，顏色分別為紅、黃、黑。小倫打算同時從甲、乙兩個箱子中各抽出一顆球，若同一箱中每球被抽出的機會相等，則小倫抽出的兩顆球顏色相同的機率為何？
8. 甲、乙各丟一次公正六面骰子比大小。若某人的點數較大時，算他獲勝；若兩人的點數相同時，算兩人平手。求甲獲勝的機率是多少？
9. 若生男和生女的機會相等，一個家庭有三個小孩時，請回答下列問題。
(1)請列出所有的可能。
(2)只有一個男孩的機率是多少？
10. 在袋子裡有相同大小兩紅一藍的球，取兩次球每次取後放回，請問兩次取到相同顏色的機率為何？
11. 甲、乙、丙三人玩猜拳遊戲，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳不分勝負的機率是多少？

附錄五、國中機率測驗(延後測)

國中機率測驗

學校: _____ 班級: _____ 座號: _____ 姓名: _____ 分數: _____

答題說明:請以敘述或完整的計算過程(包含作圖)來回答問題。

1. 買樂透彩卷有「中獎」與「不中獎」二種情形，所以中獎機率是否為 $\frac{1}{2}$ ？
請說明理由。
2. 投擲一顆公正六面的骰子，出現 5 點的機率是？
3. 一副撲克牌有 52 張（不含鬼牌），分為黑桃（♠）、紅心（♥）、方塊（♦）及梅花（♣）4 種花色，每種花色各有 13 張，分別是 A、2、3、...、K。試問：從撲克牌中任取 1 張，抽到 A 的機率是多少？
4. 一個袋子裡有 15 張相同大小的卡片，分別是 12 張紅卡、3 張白卡，每張卡被取出的機會都相等，從袋中任意取出一張卡，則此卡是紅卡的機率是多少？
5. 正倫投擲一枚公正硬幣和一顆公正六面骰子，則：硬幣出現正面，而骰子點數大於 4 的機率是多少？
6. 簡老師決定用抽籤的方式決定改考卷的順序，分別有 A、B、C 三位學生的考卷要改，則：
(1)共有多少種可能的順序？
(2)B 是第一個被改到的機率為多少？

7. 甲箱內有 5 顆球，顏色分別為紅、黃、綠、藍、黑；乙箱內有 3 顆球，顏色分別為白、黃、黑。小倫打算同時從甲、乙兩個箱子中各抽出一顆球，若同一箱中每球被抽出的機會相等，則小倫抽出的兩顆球顏色相同的機率為何？
8. 甲、乙各丟一次公正六面骰子比大小。若某人的點數較大時，算他獲勝；若兩人的點數相同時，算兩人平手。求平手的機率是多少？
9. 投擲一枚公硬幣 3 次，求以下的機率。
(1)請列出所有的可能。(2)只有一次正面的機率是多少？
10. 在袋子裡有相同大小三紅二藍的球，取兩次球每次取後放回，請問兩次取到相同顏色的機率為何？
11. 甲、乙、丙三人玩猜拳遊戲，假設每人出剪刀、石頭、布的機率都相等，則猜一拳甲獨贏的機率是多少？