國　立　中　央　大　學

數　　學　　系

碩　士　論　文

教具融入高中平面向量教學之成效研究

A study on the Effect of Plane Vector Instructions

Using Manipulative Models in Senior High School

研 究 生：黃 楷 文

指導教授：單 維 彰

中 華 民 國　101　年　6　月

國立中央大學圖書館
碩博士論文電子檔授權書

(100 年 9 月最新修正版)

本授權書授權本人撰寫之碩/博士學位論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註 1 說明)，在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。(以下請擇一勾選)

(V)同意 (立即開放)

(　)同意 (一年後開放)，原因是：____________________

(　)同意 (二年後開放)，原因是：____________________

(　)同意 (三年後開放)，原因是：____________________

(　)不同意，原因是：____________________

在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

(V)同意 (立即開放)

(　)同意 (請於西元 ______年_____月_____日開放)

(　)不同意，原因是：____________________

以非專屬、無償授權國立中央大學圖書館與國家圖書館，基於推動「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、公開陳列、與發行，或再授權他人以各種方法重製與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名: 黃楷文　　　學號：992201017

論文名稱: 教具融入高中平面向量教學之成效研究

指導教授姓名：單維彰

系所 ：數學系　☐博士班　■碩士班

備註：

1. 本授權書之授權範圍僅限電子檔，紙本論文部分依著作權法第 15 條第 3 款之規定，採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽，如您有申請專利或投稿等考量，不同意紙本上架陳列，須另行加填聲明書，詳細說明與紙本聲明書請至 http://thesis.lib.ncu.edu.tw/ 下載。
2. 本授權書請填寫並**親筆**簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
3. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
4. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應遵守著作權法規定。

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

數學 學系碩士班 黃楷文 研究生所提之論文

教具融入高中平面向量教學之成效研究

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 單維彰 (簽章)

101 年 6 月 13 日

94.11.24

國立中央大學碩士班研究生

論 文 口 試 委 員 審 定 書

數學 學系碩士班 黃楷文 研究生

所提之論文

<u>教具融入高中平面向量教學之成效研究</u>

經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人 [illegible]

委　　　　　　員 袁 媛

單維彰

中 華 民 國 101 年 7 月 4 日

94.11.16

教具融入高中平面向量教學之成效研究

摘　要

本研究旨在根據高中數學課程中的「平面向量」單元，自行設計製作實體向量教具及教學方法，藉由教師在課堂上操作實體向量教具教學，以探討學生對向量概念的學習成效。

本研究採用前後測準實驗研究法，對桃園縣三所高級中學的215位二年級社會組學生做教學實驗，其中104位為實驗組，接受向量教具融入教學，另111位為控制組，接受傳統方式教學。資料分析以二因子單變量共變數分析，來探究接受不同教學策略對受試者在學習成效測驗上的差異情形。

根據研究結果顯示，接受向量教具融入教學的學生，其學習成效優於接受傳統方式教學的學生，特別是對學業表現較弱的學生，學習成效達到顯著的差異。因此推論使用「向量教具融入教學」的方式，能有效提昇低學業表現的學生學習「平面向量」的單元之成效。

最後研究者依據研究結果，對向量教具融入教學以及未來之相關研究提出建議。

【關鍵詞】：實體教具、向量教具融入教學、向量概念、平面向量

A study on the Effect of Plane Vector Instructions Using Manipulative Models in Senior High School

Abstract

This study aims at evaluating the learning effects on the part of students from the teacher-designed concrete vector classroom-teaching approach in Plane Vector course on the basis of the senior high school curriculum declared by the Ministry of Educations.

The research is conducted to 215 second-year students of the social science track from three senior high schools of Taoyuan County through the experimental pretests and post-tests approaches. Among these students 104 belong to the experimental group receiving the Vector-model teaching and 111 students of the manual control section receive the traditional teaching. The analysis of the data is made on the basis of the two-factor univariate of covariance approach for the purpose of finding out the different effects of learners from the different teaching strategies.

The result of the research shows those students accepting the vector-model teaching are superior to those receiving the traditional teaching. This is especially affirmative to mathematically challenged students. Therefor, we conclude that teachers who use the vector-model teaching can effectively improve the performance of Plane Vector learning for the specific group of students.

Finally, the researcher offers some suggestions related to the vector-model math teaching approach in the future.

Key Words: concrete model, vector-model teaching, vector concept, Plane Vector.

誌　謝

論文完成之際，回首兩年來在中央的研究所生活，過程雖然忙碌，且無時無刻都在學習成長，並過得很充實，是非常難得的經驗，心中滿是感激一路陪我走來的師長、家人、同學，及朋友們，使我能順利完成學業與論文，為此階段畫下美好的句點。

我的論文能順利完成，要感謝的人實在太多了。首先，要感謝恩師指導教授單教授維彰，雖然這兩年您事務非常繁忙，但仍然鉅細靡遺不辭辛勞地悉心指導與教誨，並適時地指引我方向，不吝給予鼓舞及關懷，使我能順利走過這段研究之路，且如期完成這篇論文，在此獻上最誠摯的感謝。

再來要感謝本論文的口試委員袁媛教授，在我撰寫論文遇到瓶頸時給予適時的指導與建議，讓學生排除了困難，並且詳細審閱我的論文，為此付出許多寶貴的時間與精神，讓我能一步步踏實的完成論文；以及感謝口試委員劉柏宏教授，在百忙中撥空審閱論文，並在論文審核上給予懇切的指導並提供寶貴的建議，使本論文能更臻完備，真是非常的感謝。還有要特別感謝宋瓊珠教授，不論在我大學時還是畢業後，何時何事去請教您，您都是親切又耐心的給我支持和指導，真是萬分的感謝。

還有感謝曾經參與本研究三所高中的教務主任、老師，以及同學們的協助，沒有你們，這份研究將無法完成，非常感謝大家的參與，讓我的論文順利完成。

還有要感謝我研究室 M-115 的同學們，在這兩年的生活與學習中，大家彼此互相鼓勵與扶持。這段期間是我求學生涯中最愉快的時光，感謝大家帶給我許多歡樂。

最後將最深的感謝留給關心、栽培我親愛的家人，因為有你們的體諒與支持，讓我心無旁騖，全力以赴，順利完成學業。畢業了！我將這一份努力的成果與你們大家分享，感謝一路上有你們的協助、鼓勵、支持，在此願以最真誠的心，祝福所有關心我的人。

楷文　謹誌

101 年 6 月

目　　錄

表 目 錄

圖 目 錄

第一章　緒論

本章分為六節，第一節為研究背景與動機；第二節為研究目的；第三節為研究問題與研究假設；第四節為名詞解釋；第五節為研究意義；第六節為研究範圍與限制。

第一節　研究背景與動機

美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics，簡稱NCTM)提出，表徵是數學學習過程中很重要的一部分（NCTM，2000）。數學表徵提供學習者有效的解題工具，也可幫助學習者理解抽象的概念、符號的意義，強化理解進而建構自我知識，增進與他人溝通以及推理的目的（Greeno & Hall，1997）。還有研究報告指出，具體物的表徵以及圖形表徵是發展抽象符號表徵的橋樑，並認為能夠根據學習情境，再加上適當的運用數學表徵，如具體教具、圖像、語言、符號…等等具體或抽象的方式，在各個表徵方式之間靈活的轉換，將有助於學生組織思考以及分析問題，這是發展數學思考和培養解決問題能力的基本要素（Dreyfus & Eisenberg，1996；Fennell & Rowan，2001；NCTM，2000）。在布魯納（Bruner，1966）的觀點中，他認為應讓學生自己探索、推理思考、解決問題，進而得到學習成就，後能提升對數學的興趣，激發創意成為手腦並用的現代人。這也顯示出，數學表徵在數學學習的過程當中佔有相當重要的地位。

布魯納指出個體運用心像來掌握概念，或依靠照片、圖形等表徵獲得知識時，即使物體已不存在，個體腦海中仍有其心像，而心像是外在實物的抽象意義或影像，可作為運思活動的工具。由此可知，「表徵」對學生的學習的確發揮很大的作用，憑藉著它，學生能夠發揮無限的想像力和創造力，來幫助自我的運思。因此，當學生在學習數學概念時，一開始可以運用具體物的表徵，來幫助自我了解知識的意義，在能夠掌握這些知識的意義後，表徵不管是以其它符號或抽象的形式出現，學生依然可以在這些表徵之間自由運用和轉譯，以達成解題的目的。所以老師在教學時，應該善用各種表徵，幫助學生從具體的運思階段轉換到抽象的運思階段能更為順利（洪郁雯，2006）。

本研究的動機為研究者在多年數學教學經驗中，發現有些高中學生在數學學習的過程中，對於數學上的抽象概念、符號意義、解題過程，若是沒有適當的媒介幫助他們思考以建構自我知識，可能會因此無法理解概念的意義而發生學習困難，甚至對數學失去信心而缺乏學習的興趣。因此，深感數學教師應負起責任，幫助學生有效學習，增加學習興趣，以提昇學習成就。於是過去研究者在教學時，

經常嘗試透過各種表徵的方式，期望把抽象的數學概念，藉由某些具體表徵的呈現，幫助學生更為順利地從具體的運思階段轉換到抽象的運思階段，並且鼓勵學生在表達自己的數學想法時，也能夠運用多樣化的表徵來作推理和溝通。

過去研究者時常遇到數學性向較弱的學生，在「平面向量」單元中有關運用向量概念解題時，由於需使用到向量平移的觀念，所以在題目的圖形裡畫上了許多「向量」並解說，常常使得圖形中的「向量」越畫越多，越看越複雜。使用向量概念來解題，理應是希望運用向量的概念把問題化繁為簡，結果往往因為圖形中的「向量」變多了，看起來好像把問題變得更複雜，導致在這些學生的印象中，使用向量概念來解題並不一定是個好方法。於是研究者開始反覆思索，希望找到一些比較好的方式能幫助這些學生學習，有次偶然的機會用筆來當作「向量」，筆尖當作箭頭，代表「向量的方向」，而筆身當作線段，代表「向量的長度」，如此展示加上解說，特別是數學性向較弱的學生反應這樣就比較容易了解。這件事引發研究者想設計一種正式的教具，來輔助教學，才有如今的這套教具雛形。

在高中階段數學領域中，平面向量是最基本且重要的概念之一，且向量具有幾何和代數形式的雙重屬性，因此成為溝通代數、幾何、三角的橋樑。向量的概念是從許多的生活實例和物理素材中發展出來的抽象工具，且其理論和方法也成為解決實際問題和物理學的重要工具。向量之所以重要，主要關鍵是因為向量成為聯繫多項內容的媒介，特別是在處理平面幾何、立體幾何、解析幾何、三角中有關角度、平行、垂直、共線等問題時，若運用向量的運算性質來解題，可使複雜問題簡單化、直觀化，使代數問題幾何化，也使幾何問題代數化，較使用一般傳統方法更為便捷，這正是由於向量有獨特的數形二重性的關係。利用平面向量的理論和方法，也可以有效地解決物理學中的力、速度、加速度、位移等許多問題，這也讓數學與實際問題之間的聯繫開拓了一個新的途徑。

根據教育部 99 課綱所制定高中數學課程中的「平面向量」單元，高中階段的學生將認識向量的實際背景，可藉由對物理學中的位移、力、速度等的認識來學習。具體的教學目標是，理解平面向量及其運算的意義，能用向量語言和方法表述來解決數學和物理中的一些問題，並進一步領會數形結合的思想方法，以發展數學運算和解決實際問題的能力（陳宜良等，2009）。

目前的學生除了會在國中理化力學相關單元中，學習到同時具有方向與大小的量之外，要一直到高中二年級，當學習高中數學平面向量單元時，才算第一次正式接觸到向量概念。李永貞（2008）研究向量概念對學習能力較弱的學生產生困難的原因在於，向量的表徵與運算所呈現的幾何意義對於學生而言，是較抽象而難以掌握的。尤其是當看到向量符號和題目中的圖形時，經常會忽略向量的方向，而只注意到向量的長度。還有對於要使用向量表徵來描述他們心中想表達的

概念與性質時，也有相當的困難。江淑美（1985）對高一學生進行有關平面向量單元的測驗，分析得到有些學生在測驗題目的敘述中無法感受到向量大小或方向的概念，且未能體會出向量加法的起始點、終點、方向、反向量等相關概念，另外還有很高比例的學生不習慣透過操作的方式來解題。林進發（2001）和陳俊廷（2002）對於高中生在向量方面的研究，都發現高二和高三學生會把代數的乘法運算性質過度類推到向量內積的運算性質，因而造成錯誤混淆，以及學生無法瞭解向量內積的幾何意義。

以上幾個研究皆顯示，學生在向量概念與運算上所經常呈現的一些錯誤，而為何學生會把舊經驗作過度類推，以及新概念為何會讓學生產生混淆，這些很有可能是教師在教學的過程中，所帶給學生的影響。因此，在瞭解學生容易產生的錯誤概念後，為了改善學生在向量學習上的錯誤概念，研究者設計製作向量教具以及其教學方法，藉由教師在課堂上操作實體向量教具作教學，希望將有助於學生得到正確的概念，也同時希望研究的結果能提供給數學教育工作者作為參考。

此外，研究者在過去的教學經驗中發現，有些學生在學完向量課程，尤其是學過向量坐標化後，時常忘了有時當我們需要解決向量問題時，可使用向量的基本概念及運算，例如：向量平移、加減運算、交換律、結合律，就可輕易對向量作化簡，進而解決問題。有時候使用向量坐標化，不但沒有簡化問題，反而把問題變得更複雜。所以設計此向量教具的另一個原因是，希望學生在剛開始學習的時候，可對向量的基本概念能有較深刻的印象，期望將來在學過向量坐標化後，記得還可使用向量基本概念來幫忙解決問題。

綜合上述，能夠讓學生快樂的學習與成長應是教師們心中的期盼，想要實現這個想法，教師必須重視如何提昇學生的學習動機、態度，以及學習成就。於是研究者在此提出具體教具融入向量教學的教學模式，就是希望學生能夠在此學習過程中，藉由具體的操作而建構觀念，並有效增進認知思維，以及提高學習動機與成就。

第二節　研究目的

本研究旨在研究者根據教育部99課綱所制定高中數學課程中的「平面向量」單元，自行設計製作的向量教具及融入運用此教具之教學方法，藉由教師在課堂上操作實體向量教具教學，以探討學生對向量概念的學習成效。

本研究主要的研究目的如下：

一、　設計以向量教具融入高中數學「平面向量」單元之教學方法，提供教師教學，以幫助學生理解與運用向量概念，並增進其學習成效。

二、　欲了解向量教具及其教學方法融入高中數學「平面向量」單元教學中，對不同學業表現（高、中、低）的學生在學習平面向量成效上之影響。

第三節　研究問題與研究假設

依據上節之研究目的，本研究之研究問題為不同型態的教學模式（使用教具教學、傳統方式教學）與不同學業表現（高、中、低）之間，在學習平面向量成效上是否有交互作用存在。

基於上述的研究問題，本研究擬定之虛無假設為不同型態的教學模式（使用教具教學、傳統方式教學）與不同學業表現（高、中、低）之間，在學習平面向量成效上沒有顯著的交互作用。

第四節　名詞釋義

為了使研究定義明確，將本研究所涉及的重要名詞，界定如下。

一、數學表徵：

「數學表徵」是指個人對於數學問題的理解情形，所形成的一種轉譯方式，可用來幫助思考、溝通、以及解決問題。因此，數學表徵也可說是個人在數學思考過程中的一種表達以及結果的呈現，並藉此可與他人溝通的一種方式。

在本研究中，主要探討的是「數學表徵」中的具體表徵。具體表徵是指藉由操作具體物的經驗，對具體物的知覺在腦海中留下心像，來進行邏輯的思考。經由研究者所設計的具體向量教具，融入高中數學課程「平面向量」單元中，探討學生對向量概念是否有顯著的學習成效。

二、學業表現：

在本研究中，「學業表現」是指某校學生在所有學科的整體學習成效表現，並以該校「當屆入學基測成績的最低PR值」作為分類標準。本研究中把學業表現分成三個層次，最低PR值85以上歸類為高學業表現；在60與84之間歸類為中學業表現；59以下歸類為低學業表現。

三、向量教具融入教學：

在本研究中，「向量教具融入教學」是指教師在課堂中操作向量教具進行教學展示與引導，並在教學過程中有請學生上台親自操作教具進行學習。

四、教學模式：

「教學模式」是指教師在課堂中使用不同的方式來進行教學。在本研究中，教學模式分為兩種，一種為「使用教具教學」，是指教師以研究者所設計的向量教具，在課堂中進行操作教學，並搭配在黑板上用傳統的書寫及畫圖方式，使學生從老師的展示與引導中進行學習，且在教學過程中有請學生上台親自操作教具

回答問題；另一種為「傳統方式教學」是指教師完全只使用在黑板上傳統的書寫及畫圖方式進行教學，沒有使用任何教具輔助教學，而在教學過程中有請學生上台回答問題，但學生只用傳統的書寫及畫圖方式作答。

五、向量：

在本研究中，「向量」是指在數學、物理學和工程科學等自然科學中，一個同時具有大小和方向的幾何形體。向量是只有長度、方向意涵，而不管起始點所在位置的抽象符號。在圖形表示上，向量被畫成為一個帶箭頭的線段（圖 1－1），而線段的長度可以表示向量的大小，箭頭所指的方向可以表示向量的方向。在物理上，使用向量表現位移、速度、力、動量、磁矩、電流密度等概念。此外，與向量概念相對的是作為係數的純量（實數、複數）。

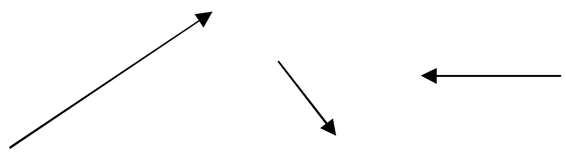


圖 1－1　向量圖形表徵

六、「平面向量」單元之課程：

在本研究中，「平面向量」單元之課程是根據教育部 99 課綱所制定的高中數學課程，所編寫的高中數學教科書第三冊第三章第一節「平面向量」單元，再設計出實驗教學的上課內容。教學目標主要分成三個概念類別：「向量的表示法」、「平行向量」、「向量的運算性質」，每一概念類別又區分出次概念類別，次概念為「向量的符號表示」、「向量的圖形表示」、「向量的相等」、「反向量」、「向量的係數積」、「向量的加法」、「向量的減法」、「向量的結合律、交換律」。其目的是讓學生認識及理解向量的基本概念與性質。

七、「向量概念」之學習成效：

「學習成效」是指學習者經歷某種學習活動一段期間後，對其進行某種型式的評量測驗，所呈現出的學習效果。而「向量概念」之學習成效，即限定於向量概念之相關內容。在本研究中，「向量概念」之學習成效是指受試學生在「向量概念成效測驗」中的得分，得分越高則表示學習成效愈佳，反之亦然。

第五節　研究意義

本研究對於向量教具融入教學具有以下幾項意義：

一、　本研究探究學生在經歷不同教學策略及向量教具融入教學活動之情形，可提供教學者就不同特性的學生給予適當的協助。

二、　本研究研發的向量教具及教學方法，可供其他教學者參考使用，幫助學生學習向量概念，增進教學成效。

第六節　研究範圍與限制

為了達成前述的研究目的，於是將研究範圍與限制界定如下。

壹、　研究範圍

本研究旨在探討實施「向量教具融入教學」對高中二年級學生學習「平面向量」單元中的向量概念之學習成效，於是將研究範圍界定如下：

一、研究對象

本研究以桃園縣的三所高級中學二年級社會組學生為研究對象，並以班級為單位，每個學校高二社會組班級中隨機抽選兩班，一班為實驗組，另一班為控制組。實驗組採取教師在課堂上操作實體向量教具教學，而控制組採取教師在黑板上畫圖的傳統方式教學。

二、研究工具

本研究實驗課程之內容，主要依據教科書審定本「三民版本」《高中數學》第三冊第三章「平面向量」單元中的向量概念之課程內容為主，內容以「向量的表示法」、「平行向量」、「向量的運算性質」相關概念為主軸，次概念為「向

量的符號表示」、「向量的圖形表示」、「向量的相等」、「反向量」、「向量的係數積」、「向量的加法」、「向量的減法」、「向量的結合律、交換律」。

三、實驗設計之內、外在效度

本研究針對各組將採取不同的教學活動設計，但各組的教學目標、課程內容均相同，並以教學方式不同之前後測準實驗設計與共變數統計分析進行研究，如此可以排除影響實驗研究內在效度之選樣不等的因素。

貳、 研究限制

本研究由於人力、時問及客觀條件無法完全配合，有以下限制。

一、推論的限制

本研究僅以桃園縣的三所高級中學二年級社會組學生為實驗對象，進行實驗教學與評估，故其研究結果推論有其限制。

二、研究內容的限制

在研究內容方面，本研究的內容範圍為高中數學「平面向量」單元中的向量概念，所以研究結果不宜推論到其它科目或高中數學領域的其它單元。

第二章　文獻探討

本章依研究主題進行相關文獻之探討，以作為本研究的理論基礎，並藉此建立研究架構。本研究的主要目的是探討教師以實體向量教具融入平面向量的教學中，並配合研究者針對向量教具所設計的平面向量教案，以及討論其對於不同學習程度之高二學生的學習提昇成效。本章共分三節，第一節探討數學表徵的意義、形式以及重要性，第二節論述平面向量課程的內涵與教學，第三節討論具體表徵融入數學教學之相關實證研究。

第一節　數學表徵

一、數學表徵的意義

表徵（ representation ）是用某種形式將一種事物或想法重新表現出來，以達成溝通的目的（蔣治邦，1994）。根據學者（ Lesh，1987；Heddens，1984 ）對表徵所作的詮釋，認為「表徵」是指學習者在學習知識的過程中，透過各種不同的方式（如具體操作物、圖形、圖像、語言文字、抽象符號等）來內化知識，也就是讓學習者把內心的概念轉為具體化看得見的外在表現，並藉由這些方式呈現想法與解法。另外有些學者（Brenner, Herman, Ho & Zimmer，1999；Dreyfus & Eisenberg，1996；Fennell & Rowan，2001）指出善用多樣化的表徵形式，例如：具體操作物、圖形、圖像、語言文字、抽象符號、數學方程式、 … 等等，將有助於學生組織思考以及分析問題。

美國數學教師協會（NCTM，2000）提出，數學表徵是數學學習過程中很重要的一部分，並主張數學表徵是可代表個人對於數學概念的理解與運用的一種呈現方式。基本上，數學表徵是個人對於問題理解所形成的一種轉譯方式，用來幫助學習者思考，強化理解抽象的概念與符號的意義，進而建構自我知識。數學表徵也可作為學習者有效的解題工具，是數學思考過程的表達以及結果的呈現，並藉此作為增進與他人溝通的方式（Greeno & Hall，1997）。

學習者對於問題的詮釋，能夠以不同的形式來表徵其存在。可說表徵是學習者在解題過程中所使用的表達方式，也能代表其對問題情境的理解情形。還有學習者會將問題的內在表徵，用外在的表徵形式來呈現，藉此達到溝通、解題的目的。例如：畫簡圖、做記號、寫方程式、 … 等等來詮釋問題，藉此來輔助思考，幫助記憶及理解（楊瑞智，1994；葉安琦，2000；羅素真，1996）。

Mayer（1992）從認知心理學的觀點來看，學習者在面對新的問題情境時，會先將收到的訊息轉譯成自己能理解的形式，這就是一種內化的心理表徵，接著再經由問題整合、解題計畫與執行的解題過程，可將內在的思考過程轉化為外在的解題表徵，以作為溝通數學想法的工具。因此，數學表徵可以說是內在數學思考的過程，也是外在數學應用形式的展現。

綜合上述，在數學學習過程中，表徵可用外在具體化的形式來呈現數學概念與思維，也是認知學習活動中的產物，可經由表徵的形式來了解知識的結構與內涵。在數學教育上，教師必須使用某些方式，來與學生溝通數學問題，而學生也需要使用某些方式,和教師或其他同學來溝通彼此的數學想法與解題過程。因此，採用「表徵」來作溝通是一個在互動學習中不可或缺的媒介。表徵的功能在於表達數學想法，並不只是用在與人溝通，也可是自我溝通運思的工具，還可簡化記錄數學的解題過程，並使數學概念能以某種方式呈現，以便作事後的反省。

二、數學表徵的形式

Bruner（1966）、Lesh，Post，Behr（1987）、Heddens（1984）分別從不同的觀點將表徵予以分類，茲分述如下。

（一） Bruner（1966）將人類對周遭環境中的事物，經知覺而將外在物體或事件轉換為內在心理事件的過程，稱為認知表徵（cognitive representation）或稱知識表徵（representation of knowledge）。意指人類是經由認知表徵的過程獲得知識。他認為人類的表徵方式會隨著年齡而發展，於是他將認知表徵的發展過程分成以下三個階段。

1. 動作表徵（enactive representation）：個體接收外來的刺激後，所引發的行動反應，而藉由這些行動反應，來掌握知識概念或事物所代表的意義。例如：可被實際操作的具體教具，都可稱為動作表徵。Piaget（1977）提出學習者若透過實體的操作經驗，能夠幫助其增強心理的認知並可獲得具體的知識。此外，兒童的運思必須借助於對具體物的實際操弄來達成，並且在操弄過程中獲得知識及學習處理周遭的事物。而兒童對於某些名稱的意義，也是經由動作表徵才學得的。所以對人類而言，動作表徵是求知的基礎，雖然最早出現在幼兒期，但卻是一直可延長使用到終生。

2. 圖像表徵（iconic representation）： 個體藉由操作具體物的經驗，對具體物的知覺在腦海中留下心像，之後當物體消失時，能依據物體在記憶

中的影像，憑著自行製作的心像即可進行內在運思，來獲得知識概念的過程。所以對人類而言，圖像表徵的求知方式，是由具體進入抽象的開始。

3. 符號表徵（symbolic representation）：個體運用抽象符號、語言文字來掌握概念，而符號本身即是一種任意選擇的記號，代表了實物或心像的抽象意義。所以對人類而言，符號表徵的求知方式，是用邏輯思維去推理周遭的事物，不必靠動作或是圖像的幫助，即可直接從事抽象思維，並從彼此相關的事件中，發現原理原則，進而解決問題。

Bruner認為人類認知發展的歷程，即是形成表徵系統的過程。心智能力的發展首先是經由動作的過程與結果獲得經驗，接著是運用感官記憶自製事物的心像，來了解周圍的事物與現象，而當思想接近成熟時，則可運用抽象符號、語言文字來代表知識概念的抽象意義。

Bruner雖然將人類認知的發展分為三個階段，但在實際教學時，他並不主張按年齡或年級採取三種表徵方式教學生。原因是同年齡或同年級的學生，在學習經驗上，彼此之間會存在著許多個別差異。所以他主張應根據學習者之智力發展，注重其表徵的運用方式，在教材的難度與邏輯先後順序上，採取「螺旋課程」之設計，即由簡單到複雜、由具體到抽象、由動作表徵到符號表徵，這可幫助學習者在新舊經驗間建立良好的連結。並強調教師教學的主要任務是應配合學生身心發展，教學生如何思維，且如何從求知活動中發現原理原則，進而整合統整，再組織成為屬於自己的知識經驗。

因此，研究者設計教材的觀點，恰巧也與Bruner不謀而合。研究者所設計的向量教具，即是Bruner所指的具體教具，且在研究中此教具是針對高中學生作教學，此種教學方式破除傳統的觀念認為兒童才適用教具教學。這即是與Bruner主張不應按年齡採取表徵教學，而是注重表徵的運用方式，且教材設計也是採用由具體到抽象、由動作表徵到符號表徵意義相同。

（二）Lesh 等人（1987）以溝通的觀點，將 Bruner 的動作、圖像、和符號表徵的運思活動以線性方式的發展修正為網狀式的互動發展，認為數學學習有以下五種不同的表徵，並強調表徵轉換的重要性。

1. 實際情境（real script）：運用在真實世界中所存在的物體或是知識，來表達問題情境並藉以解決問題。
2. 靜態圖畫（static pictures）：靜態的圖形模式，透過此圖形模式的操作，能夠將其內化為心像。
3. 教具模型（manipulative models）：藉由操作具體教具模型，建立符合問

題情境的關係和運算。

4. 口語符號（spoken symbols）：以平常生活所用的口語作敘述，來解釋數學概念或是數學問題，或是能夠舉出符合生活情境的實例來加以說明。
5. 書寫符號（written symbols）：約定俗成的數學表徵系統，一般常用的數學算式或是數學符號。

在數學學習方面，Lesh 等人（1987）認為讓學習者了解多樣化的表徵是很重要，但若能夠根據問題的情境，可彈性的轉換這些表徵形式（圖 2-1），以較適當的表徵方式來幫忙解決問題，則更是重要。因此他們強調學生是否可在各種不同的表徵方式中自由作轉譯，即可表示其對此知識概念的掌握程度。於是他們主張教師應利用不同的表徵方式來解題，可增進學生的思考活動。

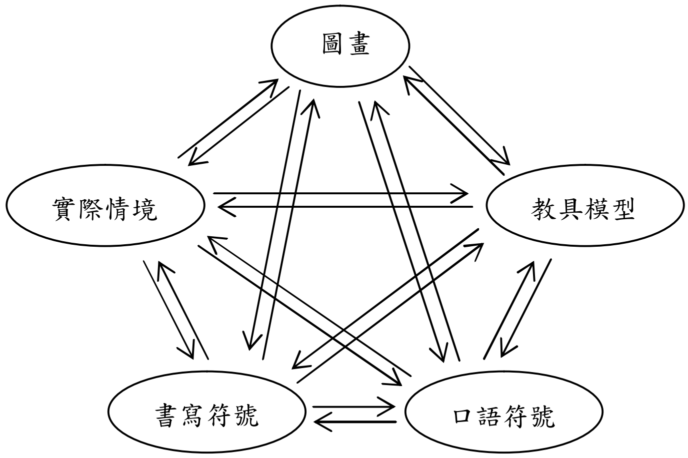


圖 2-1 數學學習的五種表徵（Lesh，Post，Behr，1987）

現階段高中數學課程中，老師教授有關平面向量的單元，皆採用在黑板上畫出向量圖形的傳統方式，這種方式無法表達向量平移的動作，而只是單純靜態的向量圖形模式。研究者所設計的向量教具，不僅是具體的教具模型，也是讓老師與學生皆能隨意平移的教具，在經過一系列的動態畫面，可呈現出向量圖形的視覺變化，以協助學生觀察與記憶，可使其對向量有較具體、深刻的理解。學生在學習過程中，對向量概念較能透過具體的操作而建構，也能提升學生正確的認知思維，並提高學習動機，使學習事半功倍。

（三）Heddens（1984）將學習者的學習階段分成以下四個連續的階段。

1. 具體物表徵階段（concrete level）：在平常生活中真實存在的實體。
2. 半具體表徵階段（semiconcrete level）：用圖片或照片來表示實體。
3. 半抽象表徵階段（semiabstract level）：用符號或圖形來代表實體。
4. 抽象表徵階段（abstract level）：用數學的算式與符號來學習解題。

Heddens 主張學習者應在學習的具體階段，將新的知識加以內化，並且有系統的沿著這四個學習階段，能夠將所學的新知識賦予抽象化的表徵。經由這些階段，學生才能夠在真實與抽象的關係之間建立良好的連結，進而改善在數學理解方面的困難之處。

（四）本研究所受的啟發

根據上述的文獻報告，不論是哪一位學者所提出分類數學表徵的方式，我們可觀察到，操作具體物是所有表徵方式中最基本、也是最容易讓學習者進入學習情境的方式。

在高中階段的數學課程中，很少看見教師在課堂上拿出教具來輔助教學。一般而言，教具只發生在中小學的課堂上，例如：小學老師進行加減法教學時，讓學生實際拿取具體花片的方式，使得在過程中了解「加減」的概念。

Piaget（1977）在認知發展理論中談到，大約從七到十一歲的兒童屬於具體運思期的階段。在這個階段的兒童，多是根據真實世界中的具體事物來作思考，較難進行抽象符號思考。大多會採取具體實用方式的問題解決取向，且會持續地注意面前所能知覺和推理的實體，直到形式運思期，才會逐漸發展出抽象思考的問題解決能力。而他也認為必需使用具體運思的方式雖然最早出現在兒童時期，但卻是可以一直延長使用到終生。透過親自操作實體教具的學習方式，對數學性向較弱的學生而言極為重要。在一些相關教育理論中，認為數學性向較弱的學生其實並非是智能不足或者學習不夠努力積極，而是由於抽象思考能力較弱，無法在短時間內運用抽象符號作運思，以致於造成學生只能靠記憶或背誦來學習，而這樣的學習效果當然就不佳。所以這類的學生非常需要使用實體教具的輔助，將有助於他們作運思。

高中階段的數學學習大部分還是依賴教材的內容和教師的教學活動。因此，研究者認為當教師進行向量概念的教學時，應考量課程與學生思考層次之間的落差，並在教學過程中觀察學生的行為和思考方式，據此設計一個適當的教學實作情境。透過操作實體教具的經驗，可增強學生的心像能力，之後再運用抽象符號作運思，將能提昇學生學習向量概念的成效。空間的視覺化是需要藉由持續地操作具體物來加強心像的建構，讓學生能夠運用空間思考的推演，強化數學表徵，以及在操作時所得到的相關資訊（Clements & Battista，1992）。所以，教師應透過實體教具的操作，循序漸進的幫助學生增強心像能力。當實際經驗足夠之後，教師才能夠帶領學生進入更高的思考層次。所以本研究主要是藉由教師在課堂上操作實體向量教具教學，以探討學生對向量概念的學習成效提昇情形。

三、數學表徵的重要性

Davis（1984）認為數學概念的理解包含兩個面向，一個是能以一套符號或是系統來表徵數學概念，另一個則是能以多樣化的表徵方式來呈現某一個數學概念，並且能夠在不同的表徵系統之間作轉換。Lesh 等人（1987）認為經由不同形式的數學表徵轉換過程，能夠得知學生對於概念意義的掌控情形。有些學者（Brenner,et al.，1999；Dreyfus & Eisinberg，1996）認為表徵系統的轉換方式可分為兩類，一類是在某一個表徵系統內做轉換；另一類是在各個不同形式的表徵系統之間做轉換。經由這兩類的數學表徵轉換方式，不但能幫助學生用有意義的方式來學習數學概念，也還能提供學生一些可克服認知失衡的契機（Behr , Wachsmuth , Post , & Lesh，1984；Post , Wachsmuth , & Behr，1985）。當學生遇到數學問題時，想把問題轉換為符號表徵的過程中若發生困難，則具備良好表徵轉換能力的學生，會選擇先從其他的表徵方式著手，例如先用圖形或是操作具體物來代表對於問題的詮釋，再用自己的話來解釋對於問題的想法以及做法，這樣透過各種不同表徵系統的轉換，藉以解決當前所面臨的問題，甚至能夠透過另一種表徵方式來增進原先所缺乏的符號表徵能力，有機會去修正自己的認知結構，還可增強對於數學概念的理解（黃芳玉，2003）。

靈活運用表徵系統是數學思考能力的一項特徵（Dreyfus & Eisinberg，1996）。Cifarelli（1998）認為學習者如果能夠靈活的轉換表徵系統，並且會彈性地選擇適當的表徵方式來解題，代表學習者對於問題情境有深入且完整的了解，因每個表徵所呈現出的是學習者對於問題結構的不同觀點，故可說明學習者對數學概念之間的關係自我建構了完善的連結方式。Yerushalmy（1997）探討學生是如何創造出多樣化的表徵方式，並認為這些由學生所創造出來的表徵方式，能有效的增進數學概念的理解能力。 Brenner（1997）對接受多樣化數學表徵教學的實驗組，與只用傳統解答為導向的控制組作研究，結果顯示實驗組呈現較優異的問題表徵技巧，並更容易成功的解決數學問題。由以上這些研究可得知，在數學學習的過程中，教師若多提供學生運用多樣化數學表徵的機會，不僅讓學生增進數學思考的能力，還可對數學概念的學習有莫大的助益。

在美國數學教師協會（NCTM，1989）出版的「數學課程與評量標準」中，強調數學表徵是溝通和思考的重要工具。在 NCTM（2000）「學校數學課程之原則與標準」中，更是強調數學表徵的重要性，並期望學生在運用數學表徵這方面能夠達到以下三個程度：

（一）會創造和使用表徵來組織、記錄、溝通數學想法。

（二）會選擇和轉換數學表徵來解題。

（三）會運用表徵來解釋科學、社會以及數學現象。

總而言之，數學表徵是在數學學習中不可缺少的重要元素。在數學教育中，數學表徵可說是幫助學生思考、溝通、解題、以及詮釋各種事物現象之重要工具，而且透過各種不同數學表徵的運作，可以得知學生內部的數學思考情形，因此培養學生數學表徵的能力確實有其必要性。適當的運用多樣化的數學表徵，不但能增進數學概念的理解，並且在相關的數學概念之間建立連結，還能作為與他人溝通數學想法的媒介，若將其應用在真實的問題情境中，可進一步解決生活當中所面臨的問題。

綜合上述，在向量概念教學中，教師應先培養學生透過操作實體向量教具作運思，來強化抽象概念的理解，並善用各種表徵方式教學，鼓勵學生運用各種表徵方式表達自己的想法，將有助於使學生深入理解向量觀念。因此，研究者將在設計教材的難度與邏輯先後順序上，採取「螺旋課程」之設計，即由簡單到複雜、由具體到抽象、由動作表徵到符號表徵，而在進行教學實驗時有計畫地引導學生討論、表達學習內容，提供適合的情境鼓勵學生思考、探索，最後再統整相關知識。希望藉此幫助學生學習，以提升其學習成效。

第二節　向量課程的內涵與教學

本節分兩部份來探討，第一部分為探討向量課程的內涵，以向量的概念所涵蓋的範圍與內容為主，第二部分為探討有關向量概念的教學與學習，以建立本研究的內容分析架構。

一、向量課程的內涵

向量是近代數學中重要和基本的數學概念之一，因向量是有別於數量的一種新的量，它有其特殊的表徵，能同時表達具有大小與方向的幾何意義，並能以簡潔明確的代數式呈現蘊含的幾何意義與性質。因此，向量具有代數與幾何形式的雙重身份，因而成為數形結合的橋樑，也是溝通代數、幾何、三角的工具。向量有著極其豐富的實際背景，它的概念從大量的生活實例和豐富的物理素材中抽象出來，而它的理論和方法也成為解決實際問題和物理學的重要工具。向量之所以重要，關鍵在於它具有一套良好的運算性質，可使複雜問題簡單化，使代數問題幾何化，使幾何問題代數化，這使它成為聯繫多項數學知識內容的媒介，尤其在高中數學教學內容中有廣泛的應用。利用平面向量的理論和方法可以有效地解決平面幾何、立體幾何、解析幾何、三角以及物理學中的力、速度、加速度、位移等許多問題，也為數學聯繫實際開拓了新的途徑(許志農，2007；李永貞，2009)。

1. 向量在三角中的應用

當利用單位圓來研究三角函數的幾何意義時，這就顯示出三角函數與平面向量密不可分的關係。由於使用向量來解決問題時，經常會從三角形開始著手，使得向量在三角函數中用來解決有關三角形的問題發揮重要作用，還可利用向量的相關知識導出部分與三角函數有關的公式，而餘弦定理的證明就是一個最明顯的證據，只需利用向量的運算性質即可得出結論，比使用其他方法作證明要簡捷得多。

2. 向量在代數中的應用

向量的運算及規律是代數的基本研究物件。向量可以進行多種運算，如向量的加減法、向量的係數積 … 等，而這些運算具有一系列豐富的運算性質，與數的運算相比，向量運算相當於是擴充運算的物件與運算的性質。此外，用向量建立的數形對應也可以用來證明代數中的一些恆等式、不等式問題。

根據複數的幾何意義，在複數平面上可以用向量來表示複數。因此，複數的加減法就可看成是用向量來作加減，而複數的乘除法則可用向量的旋轉和向量的係數積而得到。實際上，使用向量的運算來作複數的運算，這就使得有關複數的概念內容比較不難理解。

3. 向量在幾何中的應用

向量在解析幾何、平面幾何和立體幾何中有廣泛的應用，特別是可用來解決立體幾何中有關度量、角度、平行、垂直等問題，使用向量可以很便捷的來解決這類問題。例如在空間中的直線和平面，有關它們之間的平行、相交、包含以及計算夾角、距離等問題，使用傳統的方法往往會較為繁瑣，但若利用向量的運算後這些都變成為數的符號運算，這些運算都有法則可循，而且也比傳統的方法要容易得多。

在現今的高中數學課程中，與向量相關課程內容有平面向量、空間向量、平面與直線的關係、球面與平面的關係、一次方程組求解（高斯消去法、克拉瑪公式）、行列式的應用（計算空間中平行四邊形面積與平行六面體體積）、矩陣運算等等，由此可看出向量在高中課程中占有相當重要的份量，因此學習向量概念對於整個高中數學的學習非常重要。所以學生在一開始學習平面向量時，若有錯誤與迷思的概念，卻沒有立即診斷發現到，並及時作糾正與補救，這將會影響日後學生在平面幾何與空間幾何的學習情形（李永貞，2009）。

「 99 年普通高級中學必修選修科目數學課程綱要」對向量有詳細的說明：物理上用向量表現力與速度。向量是只有長度、方向意涵，而不管起始點的抽象符號。由幾何角度而言，用坐標幾何探討幾何性質時，應與所架設坐標系的原點所在何處無關，這正符合向量與起始點無關的概念。因此向量成為探討平面與空間幾何自然且精簡的語言。向量概念與運算要將有向線段的意涵與位置向量的坐標意涵緊密結合。位置向量所形成的向量空間具有代數運算的結構，即線性組合、內積與外積。它就如同實數系般，是平面與空間至精至簡的表現，可將幾何問題代數化，也可將線性方程組的問題賦予幾何意涵，是學生未來學習線性代數、多變量微積分、向量分析和多變量統計分析的基礎（教育部，2008）。

江淑美（1985）研究高一學生是否能有效學習向量的概念與運算，並檢驗學生在學習過程中，可能會遇到學習困難的地方。因此，他選用英國 CSMS（Concepts in Secondary Mathematics and Science）研究小組（1974 ~ 1979）特別針對 14 歲與 15 歲的學生設計了一份試題，此試題是為了研究學生在學習向量的概念與運算時，可能發生錯誤的類型。於是他將題目直接翻譯成中文，再對國內高一學生進行測驗，並分析學生對向量所造成的迷思概念之原因有：

1. 自由向量中相等向量轉換的錯誤。
2. 向量有關概念（大小，方向，逆向量，等式的運算）尚未建立。
3. 透過操作解題不習慣。
4. 用文字表達數學情境的能力較差。
5. 受舊經驗的影響而誤答。
6. 粗心錯誤。

林福來（1987）參考英國 CSMS 研究小組（1981）在「向量與矩陣的概念」研究報告中有關向量平移的概念，以及 Beilin（1985）對中學生在有關向量剛性變換概念中所作的研究報告，Grenier（1985）對中學生在有關向量反射概念中所作的研究報告等。他根據以上這些研究報告製作了對中學生在有關向量平移、旋轉、反射概念發展的研究試題。並在研究中發現有關向量平移的部分所牽涉到的向量概念最多，且容易造成錯誤的迷思概念，尤其是方向不分與沒有距離長度之概念。

蔡承哲（1996）對高二學生在向量解題歷程中所使用的解題策略，提出教學與評量上的建議有：
1. 在向量教學時應加強學生在定義、定理的使用與應用。
2. 以開放式問題的評量方式，來瞭解影響學生解題的相關因素。
3. 教師應掌握學生成長與犯錯的特徵，以便有效提升教與學的品質。
4. 數學教學只有工具式的知識或瞭解是不夠的，應重視概念的深層瞭解。
5. 在教學中應該引導學生如何回顧解答。

陳俊廷（2002）研究指出，有部分高二學生在學習空間向量時有困難，因不瞭解向量不僅有大小而且還有方向。因此，他建議教師在教學時，應多舉例子、畫圖、操作教具模型、 … 等，並可與物理中的力、位移、速度、加速度、 … 等物理量做結合，讓學生能親身感受到向量的存在，以達到良好的教學成效。

由以上相關文獻發現，學生在經過有關向量的教學後，對向量的定義、定理會產生一些錯誤的迷思概念，尤其是常受到向量的大小與方向之特性影響，如在作向量平移時，容易忘了向量的方向不會改變。如果此時教師忽略學生對向量的定義、定理的迷思概念，直接切入向量性質與運算的介紹，則對於向量的學習可能會產生更多的迷思概念，使得要再深入學習下去頗為困難。研究者認為教師在教材的設計上，首要重視向量起始課程的概念教學，不要以解題代替教學，應把要解決的主要問題、基本過程和主要思想方法等納入教學中，並在概念的背景引導上多作著墨，以提供學生充分認識本質特徵的機會。李邦河院士認為數學根本上是玩概念的，不是玩技巧，技巧不足道也。他認為以解題教學代替概念教學的做法嚴重偏離了數學的正軌，必須要做糾正，否則學生在學習數學上耗費大量的

時間與精力，結果可能是對數學的內容、方法和意義知之甚少，這就遠離了學習數學的目的（章建躍、陶維林，2010）。

二、向量概念的教學與學習

向量概念的教學目標是要讓學生體會向量集數與形於一身的特徵。而概念教學的課程首重讓學生感受到數學概念產生、發展的基本過程，體會到研究數學問題的基本思路，進而培養提出問題、研究問題的能力。且教與學是一體兩面的關係，教師透過教學過程、原則、方法，以幫助學生達到學習效果。於是研究者整理有關數學概念的教學與學習文獻，發現應掌握幾項原則，方可在向量概念的教學與學習的模式中發揮效果。

Henderson（1970）把概念分成兩大類，一類為具體概念，另一類為抽象概念。所謂的具體概念為具有物理上實質的例子，如書、尺等；而抽象概念則為不具有物理上實質的例子，如數學中的分數、複數、多項式等。而數學概念屬於抽象概念，因數學概念是由真實事物或現象的現實原型抽象而得出相應的概念，這種在形成數學概念時的抽象思維反應，不是某一特定事物或現象的特徵，而是一類事物或現象的共同特性（鄭毓信，1998)。

楊弢亮（1982）在中學數學教學法通論提到，人類經常會運用比較、分析、綜合、抽象、概括等一系列邏輯方法來獲取概念。對於數學概念而言，每一個概念都有其質和量，即數學概念的內涵和外延。所謂概念的內涵是指一個概念所反應的對象中所有本質屬性，而概念的外延是指適合該概念的一切對象的範圍。Pines 用圓錐的結構來說明概念的內涵和外延，圓錐的底部稱為延伸，代表由概念延伸出的部分，包含所有屬於此概念的事件。而圓錐的頂端稱為內涵，代表萃取出此概念的特質、規律性、共同性、定義等。在學習時，若由底部概念延伸的部分推至頂端概念內涵的部分，此過程稱為概念化過程，即是一種歸納方式，可從事件中發現其共同性。若由頂端概念內涵的部分推至底部概念延伸的部分，此過程稱為應用化過程，即是一種演繹方式，將概念的規律性應用於事件中。若是對於概念的延伸部分在概念化的過程中導出不正確的概念內涵，則會影響到對概念的內涵特質不清楚，此時在應用化的過程中將概念應用於事件中，就會產生錯誤。

施良方（1996）從許多文獻中歸納出三種概念形成的方式，分別為：

1. 聯結理論：若學生能正確識別出某個概念，就強化他的認知，告訴他是對的；若學生識別錯誤，則告訴他是錯的，如此就不會形成錯誤的聯結。再經過一系列的嘗試，當正確的反應與刺激連結起來時，這時概念也就形成了。

2. 假設檢驗理論：Bruner（1956）為使用假設檢驗理論來解釋概念形成的主要代表，他的觀點是在概念形成的過程中，學生不是被動地等待各種刺激以形成聯想，而是主動地追究概念，再通過一系列的假設檢驗來發現概念。且學生在概念形成的過程中，還會採取各種策略方法，以求加快發現概念的過程。
3. 範例理論：Rosch（1977）提出一種完全不同於前面兩種概念形成的理論，前面兩種是以概念所具有的共同特性為前提，他則認為人類記憶中的概念，應是以概念的具體例子來表示，不是以抽象的規則或相關特徵來表示。例如對「花」這個概念，人類是用之前所見過的各種不同種類的花來表示。對於任何一個概念來說，都有一些比較典型和比較不典型的範例。因此，人們對日常概念的理解，必須著重於最典型的範例的認知與其相關內容。

Skemp（1987）對數學概念的學習提出，一般與數學有關的例子有些多少又含有其他的概念，所以每當教師需要舉例時，應先確定學生對這個例子已有一些預先的概念，否則若牽涉到太多其他的概念，就會使學生對抽象概念的形成造成干擾。因此，當學生在學習新概念時，教師最好使用造成干擾較低的例子，並盡量將概念具體化、直觀化，且須把預先概念預備在新概念的旁邊，好讓學生能順利建立新的概念。他認為若某個概念超過個人先前已有的概念，此時就不適合直接使用定義的方式來學習了解，只能多蒐集一些與概念相關的例子，以提供其經驗，之後再靠個人思考想像以形成概念。此外，他還提到在學習新概念的過程中，經過一連串的抽象思考，其中若誤解了某部分的概念，則之後在建立概念的過程裡，就會有不少概念錯誤的風險，這種情形在學習數學概念時尤其顯著。

Henderson（1970）認為數學概念的教學策略有兩種方式，一種是例示化教學策略，是以正例和反例來進行，主要用於概念的獲得，另一種是屬性描述化教學策略，是在描述概念的屬性，主要用於概念的同化。他認為在概念教學的過程中，這兩種教學策略若是能夠交替進行，將會更有成效。他也認為應先運用例示化教學策略，之後再使用屬性描述化教學策略，這樣屬性描述化教學策略就能促進例示化教學策略的達成。但若在還未使用例示化教學策略之前，就直接使用屬性描述化教學策略，將可能會造成這兩種教學策略皆沒有達成的情況。

Sowder （1980）指出在概念教學的過程中著重於概念的獲得與同化。概念的獲得主要是來自許多例子的呈現來作為新的例子或口頭的描述，並加以定義與作適當的分類。而概念的同化主要是來自以既有的概念基模為準，再選擇環境中的事物或已有的認知結構，作辨識及解釋環境中的事物，就可把新經驗同化到舊經驗中。又因概念的定義或文字描述可視為概念的核心，所以在概念的同化過程中，有時會需要使用到正例或反例來幫忙概念同化。

楊弢亮（1982）把引入數學概念的方式分成下列幾種：

1. 利用學生日常生活經驗：教師運用實際生活中能反映數學概念的事例。所以教師在數學概念的教學中，不僅需積極地充分利用學生已有的日常概念，但必須特別注意到，數學概念與日常概念還是有一些區別的。
2. 利用教材提供學生直觀印象：使用實際物、模型、圖表等讓學生先對新概念有較直觀鮮明的印象，之後再提出此概念的定義。
3. 利用舊概念引入新概念：在原來舊概念的基礎上，再增加內涵引入新的概念，可使新概念能順利融入舊概念。還可採用概念對比的方式，就是把兩種概念根據它們相似或區別之處，互相對照某些屬性再引入新的概念。也可利用逆反關係引入新概念，逆反關係包括逆運算、反函數、逆反性問題等。再來還可把概念作推廣，也就是讓概念從特殊化到一般化的過程，從中看出概念之間的聯繫。最後還可運用一般性概念的特例，來作為聯繫新概念的方式。

一般學生在學習新的數學概念時，容易遇到的問題就在於數學概念常過於抽象化。因此大多建議教師在教新的數學概念時，可盡量多使用舉許多例子來作開始，好讓學生從許多各式各樣的例子中歸納、理解出數學概念。

表徵是學習數學概念的一個重要的媒介。同樣的數學概念也可以利用許多不同種類的表徵方式來作瞭解，且若對同一個數學概念能使用不同的表徵形式來說明其意義，即可表示對此概念有所感覺。此外，表徵間的轉換是學習和表達向量概念最重要的基本能力（蔣邦治，1994；林福來，1997；李永貞，2008）。

表徵間的轉換主要是依賴學習者自我內在的想法，由其看見的圖像和符號表徵，在內心中產生聯結、對照、區分，才能把思考與理解出的想法使用表徵的方式傳達出來。此外，學習數學概念的方式還牽涉到內在表徵與外在表徵。所謂的內在表徵指的是個人對某概念在心智中所建立的圖像和符號，個人可以利用此概念心像來作推理運思，且他人無法觀察到。所謂的外在表徵指的是個人對某概念使用具體形式存在的表徵，不僅可透過外在表徵來表達自我的想法，還可與他人作溝通（Hiebert & Carpenter，1997；Tall & Vinner，1981；黃永和，1997）。

Skemp（1987）提出對概念理解的看法，進而建立以下幾項概念教學輔助的原則：

1. 學生在學習概念的階段，教師儘量以實物來引導說明概念。
2. 教師在教一個新的概念前，要先分析與其相關的基本概念是否都已教過，以便讓學生能將新的概念與原有的舊概念作適當的同化。
3. 學生在學習概念的階段，教師儘量多用口頭解釋，而少用文字解釋。
4. 當教師要教學生正式的符號之前，可以先使用非正式、暫時約定的符號，或是學生自行指定的，如此學生的概念就易自動與符號作結合。之後由於符號

不一致所造成的困擾，可讓學生逐漸體會到約定標準符號的好處。

徐于婷（2005）認為幾何概念的建立和圖形表徵關係密切。Skemp（1987）認為在幾何中的圖形和它所代表的概念更為接近，也就是如果只是光看文字符號的敘述，通常不容易得到什麼想法，但配合一起看圖形，就容易立刻瞭解文字符號所代表的意義。這是因為幾何圖形比文字符號更能夠顯示出概念之間的關聯性。此外，他認為要理解幾何概念也必須發展視覺圖形式的論證，因為用圖形會比用文字敘述要容易與他人作溝通，且圖形更能顯示其中的關聯。

Skemp（1987）以文字符號和圖形兩種方式進行幾何推論，經過實驗比較後，結果發現使用圖形的方式來進行推論，會比使用文字符號較清楚易懂。就以向量運算而言，若教師只用文字符號書寫「$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$」，卻沒有搭配畫出向量圖形，好讓學生瞭解這些向量之間的相關位置，此時學生可能會覺得這些向量符號複雜且不易理解，而造成學習上的困擾。張景媛（1995）對國中生在建構幾何概念的研究中發現，具體影像的呈現將有助於學生建構內在的心理表徵，因此若能讓學生親自操作或自行設計圖形，可使其在幾何概念的學習過程中對圖形的理解有所幫助。

由以上對數學概念的學習方式可知，教師在教學時必須先注重以具體影像的呈現來幫助學生建構向量概念的心像，使得學生可以把外在符號與其內在表徵作完善的聯結。因此，教師應該盡量透過具體影像的感官操作活動來進行教學，以幫助學生在學習過程中進行運思向量的抽象概念，如此學生才能順利建構向量圖形的心像，並在運思過程中培養思考、分析與推理的能力，以增進向量概念的學習成效。教師還需增強學生內在概念結構的認知，此時教師的用語就非常重要，若教師在教學時能多花一些時間在概念的澄清上，而不是讓學生只看到反覆地操弄這些符號作運算，而不知其真正的意義，甚至將舊經驗中類似的概念或符號，對新概念作不當的推測，如此學生才能學習使用數學符號進行表達思考，否則只是在模仿教師的演算方式而已，卻無法達到有效的概念學習。此外，教師還必須注重學生能在圖形中發現向量運算概念的圖形表徵。因此，本研究在教材設計與教學活動中特別利用向量教具作為具體媒介，並以向量圖形為基礎，讓教師與學生透過親自操作教具，可協助引導學生學習向量概念，同時在圖像化的過程中，使其建立概念心像，並幫助學生對向量圖形表徵與向量符號表徵之間順利地產生聯結。

第三節　具體表徵融入數學教學之相關實證研究

一般對於國小的學生來說，教師經常應用實體教具在數學課程學習上，其目的主要是讓學生透過操作實體教具的吸引力，以加強在學習數學課程中所要呈現的相關知識，進而提高學生的學習效果與興趣。在國內利用實體教具輔助數學學習有相當豐富的相關文獻，在研究者閱讀這些相關文獻後，發現目前研究大都只針對國小、國中的數學課程，但有關高中數學課程的研究仍有不足。因此，本研究期望以實體向量教具輔助平面向量的單元教學，設計一套使用向量教具的教學方法，並進一步去探討教師透過操作向量教具教學，對學生在學習向量概念的成效影響。以下則針對與本研究相關的具體表徵融入數學教學之研究，進行整理如下：

洪郁雯（2006）藉由三個教學實例，探究研究者將具體表徵融入小三數學教學中，以幫助學生學習並理解數學概念。

（實例一）除法教學：

研究者剛開始在進行除法教學時，先讓學生透過實際去分具體花片的方式，使得在過程中了解「分」的概念，並且透過分出去後，再與減法算式建立關係，之後由減法引入除法算式的意義，而有剩下無法再分的部份就自然導入了餘數的觀念。根據學生從具體的花片操作，研究者發現學生先利用分花片了解減法的概念後，再經由老師的引導把這些概念內化，之後進一步用除法算式來表示，如此表示學生能夠以有意義的形式來表徵問題的情境，可讓自我的解題及運思能力由具體階段順利地提升到抽象階段。

（實例二）水平面教學：

水平面教學也是學生容易產生誤解觀念的其中之一，如在瓶中裝著約三分滿的水，再把瓶身傾斜，此時水平面還是會呈現水平的狀態。但學生通常會認為水平面也會跟著瓶身傾斜，於是研究者在課堂上利用許多不同形狀的瓶子，再把瓶中裝水，當學生操作過這些具體教具後，把看到的結果紀錄在他們的學習單上。研究者從學生的學習單中發現，許多學生一開始畫的水平面會跟著瓶身傾斜，因受到瓶身傾斜的影響，聯想水平面應該也會跟著傾斜，然而再透過具體表徵之後，他們才真正瞭解水平面還是會呈現水平狀態。

（實例三）分數教學：

研究者出了一個題目來進行分數的教學，題目是有兩個大小一樣的正方形，將它們各自平分成四等份，分法如下圖２－２，請問兩個斜線部分的面積一樣大嗎？

圖２－２　兩個大小一樣的正方形，各自平分成四等份

有學生透過視覺上的直覺比較，認為上面兩個斜線面積是不一樣大的，且認為三角形的斜線面積比長方形的斜線面積還要大，因受到圖形不同分法產生不同形狀所造成的影響。於是研究者在課堂中請學生利用色紙作剪裁，直接將三角形和長方形比比看大小。學生透過剪裁色紙的過程中，發現經過剪裁將三角形和長方形重新組合比較之後，兩個斜線面積其實是一樣大的。也就是原本兩張一樣大的色紙，不管是使用什麼方式把它平分成四等分，再取出其中一等份作比較，結果兩面積是一樣大的。之後研究者進一步和學生作訪談，更加以確定藉由具體表徵實際操作的方式，學生澄清了原本的迷思概念，並且確實理解了分數的概念。

在以上三個實際教學的過程中，研究者發現具體表徵是一個很好的學習媒介，它不僅可以呈現教師所要表達的數學涵義，且學生也可以透過操作具體表徵來連結數學概念的關係，更可以經由具體表徵去澄清一些原有的數學迷思，所以具體表徵在數學教學與學習中是一個很重要的工具，它將有助於學生的運思、理解、和他人溝通自己的想法。

劉秋木（1996）從數學問題解決的觀點出發，說明學生必須有隨著學習經驗從具體操作物階段逐漸提升到運用抽象化表徵的能力。他說明學生理解整數加法２+３的問題，先請學生取 2 個積木，再取 3 個積木，全部數數看一共有 5 塊。這樣以實際操作的方式來瞭解整數加法，在操作具體物的過程中可使學生在腦海裡形成心像，之後再遇到此問題時，可在腦海中呈現 2 塊和 3 塊積木的圖像，並對圖像進行計數活動，之後可再更進一步在圖像運思活動中，讓符號與圖像運思形成對應關係，逐漸使其瞭解符號的意義，最後學生只要腦中呈現 2 和 3 的符號，即可進行符號運思活動，而獲得 5 這個答案。

Witzel（2005）指出美國許多州的數學標準，規定數學的學習需要讓學生透過實際操作從中來體驗數學，以加強建立數學的問題解決與高層次的思考。在使用具體物操作的活動中，可讓學生藉此進行表徵的轉譯活動，使其可從不同的表徵系統中重新獲得訊息。此外，學生也可對操作具體物的過程和使用畫圖表徵兩方式來進行概念的連結。以後當學生面臨到較困難的數學問題時，可藉由具體物操作與圖像表徵間的連結方式，將操作具體物的過程畫下來解決問題，才得以逐漸建立運用抽象化表徵的運思能力。

廖秀桔（2010）以「發展解題能力教學模式」探究國小二年級學生乘法概念之行動研究，在多元表徵轉換下實施「倍」及「乘法」教學，瞭解學生數學解題策略及對數學學習興趣、數學表達能力、學習成效提升之效果。研究對象為國小二年級學生共 13 人，採行動研究法，透過教學活動記錄、課堂解題記錄、研究日誌、半結構式晤談、課後學習單等資料蒐集，再將資料加以整理、分析與歸納。研究結果發現藉由具體物操作與圖像表徵可澄清迷思概念，以建立穩固之概念。在倍與乘法多元表徵轉換的教學過程中，學生有時以畫圖解題，有時以操作具體物解題，兩種方式穿插著進行教學。透過畫圖或操作具體物讓學生看見不同題型解題後之差異，並從操作具體物的過程中，發現雖然總數相同但是在單位量與單位數上分別表示的是不相同的。而本研究透過提問的方式讓學生再次看見所拿出的具體物與題目中的問題是相符合的，以確立其所做出的解答之正確性。讓解題錯誤的學生再次操作具體物，把題目中的問題實際動手做出來，並透過教師的提問作思考，再將解題過程用語言表達出來，這樣的解題模式正是教學模式中的具體操作運思法。具體物的操作對低年級的學生而言相當重要，學生透過具體物的操作將對單位量及單位數有更深一層的概念，進而達成有意義之連結。另外，研究者發現研究對象 13 位學生中有 11 位，對於把倍的語言轉換成為具體物操作皆能正確地做出來，顯示出學生對幾的幾倍之概念十分穩固。在操作具體物的教學過程中之師生對話，也了解到學生對數學學習的興趣有極大的提升，並且能從操作具體物的過程中去連結加法概念，進而求得解答。此外，解題信心的提升對於學習低成就的學生而言十分重要，從教學過程中透過操作具體物的方式，讓學習低成就的學生對「倍」及「乘法」建立了穩固之概念，自然從學習中得到了解題的樂趣，因從解決問題中提升信心，解題的成功是最大的學習動力，有了解題的動力，學習才能更進步。

許紋菁（2007）利用七巧板之特性，進行四年級分數補救教學活動，並探討實施活動之歷程及成效。七巧板是我國傳統的益智玩具，由七塊簡單幾何圖形所組成的正方形。許紋菁發現由正方形分割而成的這七塊圖形，特性包括具有明顯的部分與全體的關係，其中還有 3 塊圖形，雖然它們的形狀不同，但大小卻是一樣的，這些形成了等積異形的教具，剛好可適用於分數的教學，並利用這七塊圖形面積大小間的關係，也適合當作分數教學的輔助教具。研究對象為四位在分數

概念有錯誤想法的四年級學生。此研究之補救教學活動以學生具體操作和融入生活情境為原則。教學活動包含:(一)釐清簡單分數及等分的意義,(二)鞏固分數符號的意義及等分的概念,(三)釐清分數單位量概念的錯誤想法,(四)釐清分數等量概念的錯誤想法等。此研究資料包括質性資料和量化資料。利用筆試前測及訪談,篩選出有錯誤想法的四位個案,進行補救教學。補救教學後對個案實施筆試後測,並進行訪談,以瞭解個案錯誤想法改變的成效。此研究結果顯示利用七巧板所設計的補救教學活動能有效改變學童之錯誤想法。

Behr,Wachsmuth,Post 和 Lesh(1984)所進行的分數教學實驗(Rational Number Project,簡稱 RNP)則是強調讓學生從操作具體教具開始建構分數的概念,進而引導學生進入心像的理解。RNP 的教學實驗結果顯示,學生在經過操作具體物的學習情境下,比接受傳統算則教學的學生更可以建構對分數概念的理解。Cramer,Post 和 delMas(2002)更進一步的發展 RNP 課程,與一般課程進行教學實驗,以比較學生的學習成效。RNP 課程特別強調使用具體操作物來幫助學生建構分數概念,並且將教學適時的轉移至半具體,語言,以及抽象符號的表徵。其教學實驗結果也證實了學生在此學習環境下分數概念的學習成效比一般的好。

Murray,Oliver 和 Human(1996)對教學者提出許多在分數概念教學上的一些建議,可運用實際的情境、幾何圖形、繪圖或電算器的操作等方式,讓學生瞭解分數的概念。教學者可多舉一些例子,讓學生能多有一些經驗,才能體會到分數其實就是一個數,而分數的運算要在確定學生真正瞭解「分數是一個數」的概念之後,再作學習比較適合。從這幾位學者的建議中,可發現分數概念的教學要從具體的情境或操作具體物開始,以豐富學生的經驗,並作為學習的根基。

從國內外學者對於分數教學的建議,可發現研究者皆認為應從具體物、具體情境中進行分數的教學。學者建議教學者使用各種模型或圖形可讓學生發現部分與整體的關係,也可以分割圓形或其他圖形以理解等分的概念,並從等分的具體物分辨幾份中的一份,以及在離散量情境中可用錢幣為教具,類化分數的概念。國內教科書的教學活動設計也都是以具體情境來佈題,並以具體物操作的方式來理解分數的概念,例如:分數圖卡、分數板、繩子、花片等。

綜合上述,在數學教育中,具體表徵對於教師的教學方法與學生的學習方式,皆具有舉足輕重的地位,尤其是對國小的學生而言。並且在上述的一些國內外專家學者指出,學生可透過具體物的操作,來呈現學生的數學概念,並且具體物還能幫助學生在解題時作為思考的依據,再加上教師透過教學的介入,可帶領學生並引導提升至抽象的概念。因此,教師提供給學生一些適當的具體學習經驗是重要的,應先讓學生實際地去操作具體物,再藉由反覆操作具體物,進而成為

心像，而當學生再次面臨類似問題時，可以把腦海中所存在的圖像，作為運思的對象，以幫助學生將運思過程對應到符號中，在多次的經驗中加強了解並內化，最終得到結果。

另外，在國內外的具體表徵融入數學教學之相關研究中，大部份都是在探討操作具體物以輔助國小數學教學，對於國小學生學習成效之影響，並且主要聚焦在學習成就與學習態度兩個層面。但似乎缺乏探討在高中的數學教學現場，以及由教師與學生操作具體物以輔助高中數學教學，並討論是否對高中學生學習成效影響的相關研究。由於在高中數學的向量概念教學上，一直需要使用到向量平移的觀念，而研究者所設計的向量教具可讓教師與學生隨意平移，經過一系列的動態畫面呈現出來，能讓學生感受到具體的圖形動態視覺變化，將有助於心像的建構，且可從中觀察向量教具在變動過程中產生的一些性質。所以，研究者想進一步瞭解在高中數學有關向量概念教學上，由教師在課堂上操作具體向量教具，對於高中學生學習向量概念之成效影響為何，以作為日後在推廣向量教具融入高中數學向量概念教學之參考。

第三章　研究方法與設計

本研究主要目的在探討研究者設計製作的向量教具及其教學方法，是否能有效的提升高中二年級學生對向量概念的學習成效。本章針對本研究之研究設計、研究對象、研究工具、資料分析等部分，詳細說明如下。

第一節　研究設計與流程

為了解研究者設計製作的向量教具及其教學方法，是否能有效的提升高中二年級學生對向量概念的學習成效，因此在研究設計上採「前後測準實驗設計」，以比較實驗組學生在向量概念成效測驗的得分，是否明顯高於控制組。實驗設計模式詳述如表 3-1-1。

表 3-1-1　實驗設計模式

自變項	前測	實驗處理	後測
實驗組	T1	X1	T2
控制組	T1	X2	T2

X1 表示教師使用向量教具教學。

X2 表示教師使用傳統方式教學。

T1 表示於實驗處理前蒐集學生這學期數學第一、二次段考成績，並取其平均值。

T2 表示於實驗處理後對學生施以向量概念成效測驗。

本研究從民國九十九年十月與指導教授開始討論確定研究的主題，之後就開始進行教學內容的設計。其實施的步驟主要分為三個階段，第一階段為準備階段，第二階段為正式施測階段，第三階段為資料分析階段，分別詳述如下。

第一階段　準備階段

（一）收集相關資訊及閱讀文獻資料

研究者在與指導教授討論確定研究主題後，開始收集一些相關的資訊與文獻，探究各研究學者的理論基礎，這些相關資訊都放在本論文的文獻探討中。

（二）設計研究工具及教學內容

本研究所使用到的研究工具為研究者自行設計的向量教具，以及自編的「向量概念成效測驗」，而教學內容則是根據高中 99 課綱「平面向量」單元的課程綱要為主，並參考三民版教科書高中數學第三冊第三章第一節「平面向量」單元為藍本，再設計出實驗教學的上課內容。

（三）實施「向量概念成效測驗」預試

在實施「向量概念成效測驗」預試之前，邀請一位教授及多位數學研究所同學對此成效測驗進行指導及修正，之後才選定預試測驗的題目。在確認試題之後，選定桃園縣的三所高級中學三年級社會組學生為預試對象，以班級為單位，每個學校高三社會組班級中隨機抽選一班，共 144 名的學生實施預試。在預試結束後，即針對試題進行難度及鑑別度的分析工作，以刪除或修改不適合的題目。

（四）進行教學內容及教材的編修

在教學內容及教具設計完成後，邀請一位教授及多位數學研究所同學參與實驗教學活動的設計，並舉行微型教學的試教。在試教後，根據大家在觀摩過程中對此教具及教學內容所給予的意見進行適當的修正調整，冀求正式實驗教學活動能臻於完善。

第二階段　正式施測階段

（一）選定研究對象

本研究正式施測選定桃園縣的三所高級中學二年級社會組學生為研究對象。因考慮到各個學校已定的編班無法改變，以及各班的課表都不相同，所以無法把要受試的學生用隨機分配的方式編成「實驗組」與「控制組」，於是以班級為單位，每個學校高二社會組班級中隨機抽選兩班，一班為實驗組，另一班為控制組，共 215 名的學生參與教學實驗。

（二）蒐集研究對象的段考成績

本研究蒐集兩組學生這學期數學第一、二次段考成績，再將兩次段考分數取其平均值作為前測分數，其目的是為了解實施實驗教學前各組學生的數學基礎能力。選此兩次段考成績的平均值作為前測的原因是，本研究對象未正式學習過向量概念的相關課程，因此研究者不採用設計一份有關向量概念的試題作為前測，而採用學生這學期數學第一、二次段考成績的平均值作為前測。選擇第一、二次段考是因為這兩次段考的考試時間在實施教學實驗前，因此成績不會受到是否有學習過向量概念的影響。取兩次成績的平均值是為了避免有學生可能因某次成績太高或太低，而造成較大的落差。

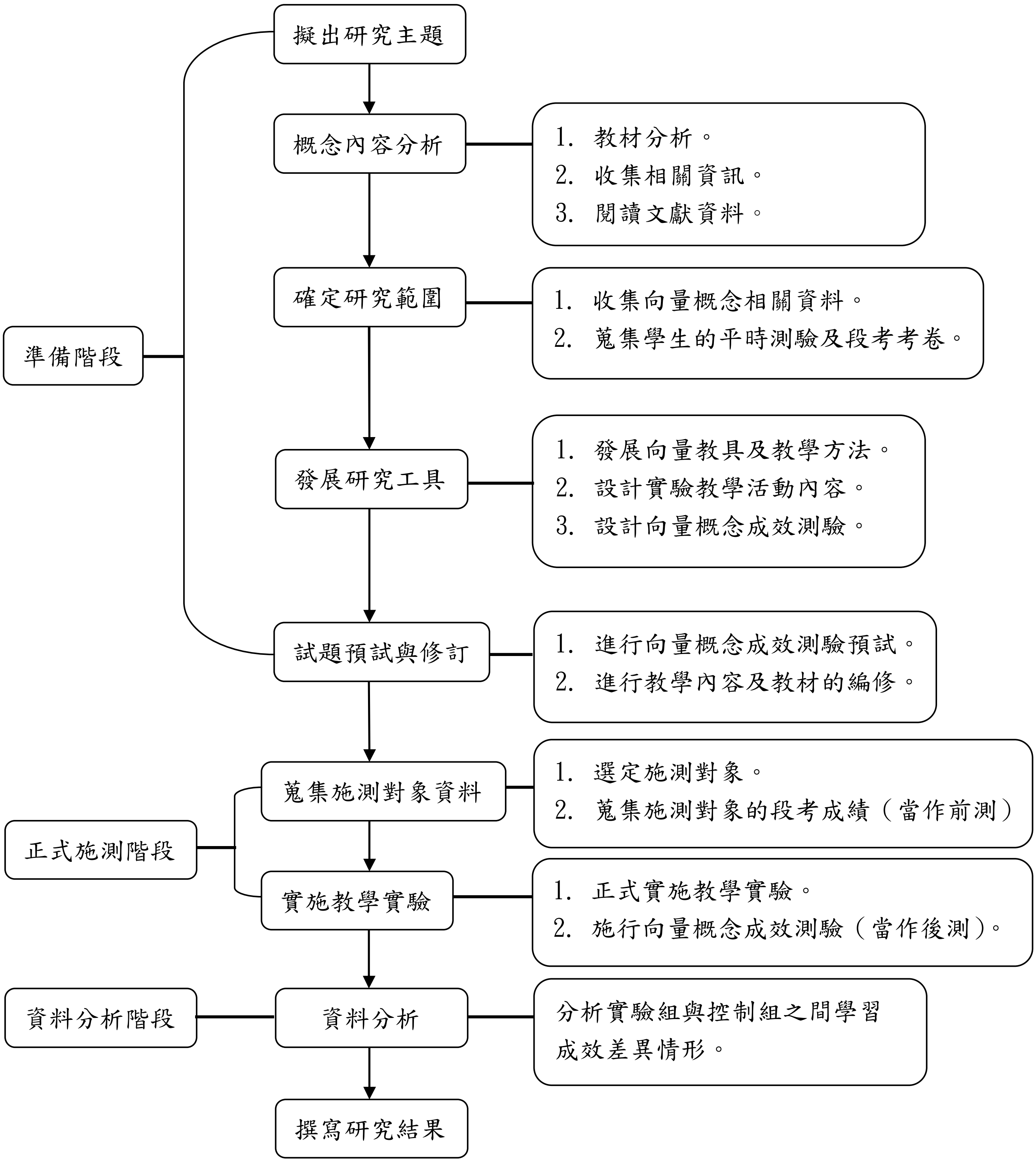
（三）正式實施教學實驗及施行向量概念成效測驗

本研究實驗教學時間為兩堂課，共 90 分鐘。實驗組的學生實施教學實驗，教師使用向量教具教學。控制組的學生則實施傳統教學。不論是實驗組或控制組，第一堂課實驗教學（30 分鐘）結束後，緊接著施行向量概念成效測驗 A 卷（15 分鐘）；第二堂課實驗教學（30 分鐘）結束後，緊接著施行向量概念成效測驗 B 卷（15 分鐘）。這兩次的向量概念成效測驗分數皆為後測分數。

第三階段　　資料分析階段

研究者將研究期間所蒐集到的資料、數據加以整理、分析與探討，得到本研究的研究結果，並進一步提出結論與建議。根據本研究實際之研究進程，繪製研究流程如圖 3-1-1。

圖 3-1-1　研究流程圖



第二節　研究對象

本研究正式施測選定桃園縣的三所高級中學二年級社會組學生為研究對象，並以班級為單位，每個學校高二社會組班級中隨機抽選兩班，一班為實驗組，另一班為控制組。本研究把這三所高中分別簡稱為甲高中、乙高中、丙高中，它們的位置皆在桃園縣的都會區。甲、乙兩高中皆是普通高中，而丙高中為綜合高中內的高中部。這三所高中當屆入學的基測最低PR值約為：甲高中的PR＝93，乙高中的PR＝84，丙高中的PR＝50。因此，根據「學業表現」的分級定義，甲高中的PR＝93分類為高學業表現組；乙高中的PR＝84分類為中學業表現組；丙高中的PR＝50分類為低學業表現組。取此三校的原因是，本研究需要有高、中、低三種不同學業表現的研究對象，方便之後探討不同型態的教學模式與不同學業表現之間，在學習平面向量成效上是否有交互作用存在的問題。

本研究正式樣本抽樣方式及樣本人數詳述如表3-2-1、3-2-2。

表3-2-1　正式樣本分析表

分析 / 樣本	母體	抽樣方式	後續處理
正式樣本	桃園縣的三所高級中學100學年度二年級社會組學生	以班級為單位，每個學校隨機抽選兩班，一班為實驗組，另一班為控制組	實驗教學結束後，施行向量概念成效測驗A、B兩卷

表3-2-2　正式樣本人數表

學校 / 組別	甲高中（高學業表現組）	乙高中（中學業表現組）	丙高中（低學業表現組）	總數
實驗組	41	42	21	104
控制組	41	49	21	111

第三節　研究工具

本研究的研究工具是研究者設計製作的向量教具及其教學方法。為探測此教具與教學方法，是否能有效的提升高中二年級學生對向量概念的學習成效。我們設計向量教具、向量概念的實驗教學活動、向量概念成效測驗，進行試教與評量，並依據一份教學目標來查核教學的內容，其內容分述如下。

3－3－1　向量教具

由於平面向量的表徵是在平面上畫一條直線段，並在其中一個端點畫上箭頭，就是向量的圖形表示法，而直線段的長度代表向量的長度，箭頭的方向代表向量的方向。所以研究者設計及製作向量教具的理念為，使用彩色的塑膠瓦楞紙剪裁出長條形作為直線段，再特別使用紅色的塑膠瓦楞紙剪裁出三角形作為箭頭，之後再把兩者接合成實體向量教具（圖 3-3-1）。研究者在此教具內放入磁鐵，使其可吸附在黑板上有利於拿取操作，且長度分成三種規格，大約是 13 ㎝，25 ㎝，42 ㎝。此教具主要是設計給教師在課堂中操作，當教師需使用向量平移時，直接移動整個向量教具，在黑板上操作非常靈活與醒目。而學生並沒有每人一套教具，但在教學活動中有設計安排學生在課堂中上台親自操作，這樣能讓學生對向量平移的感覺印象更深刻。

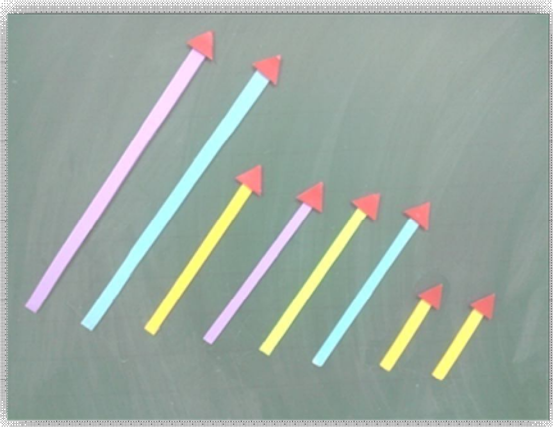


圖 3-3-1　實體向量教具

3－3－2 實驗教學施行者

因顧慮到各校各班的學習環境不同，將會造成學生學習表現上的落差，所以每個實驗組都是由同一位教師進行使用向量教具融入教學活動，而每個控制組都是由另一位教師進行傳統教學活動。擔任本實驗研究教學的兩位教師均為研究者的同學，皆有修過教育學程，且具有二、三年的數學教學經驗，兩位教師的教學程度相當。

在正式實驗教學前，研究者先擬好教學流程，讓兩位教師完全了解後，再演練整個教學過程，指導教授與研究者仔細觀察討論兩位教師的模擬實驗教學，經過一再改進演練，確定符合研究者希望達到的效果，才到三所高中去作正式的實驗教學。兩位教師在正式實驗教學時部分的教學活動影片參見附錄。

3－3－3 向量概念的教學目標

本研究為了設計向量概念的實驗教學活動與向量概念成效測驗，將先統整出「向量概念的教學目標」。剛開始研究者先閱覽高中數學有關「平面向量」不同版本之教材內容、教師手冊以及文獻資料等，參考並分析，最後統整出「向量概念的教學目標」，如表 3-3-1。

此教學目標主要分成三個概念類別：「向量的表示法」、「平行向量」、「向量的運算性質」，每一概念類別又區分出次概念類別，其主要目的是使研究者對教材內容中所應包含內容細目能有更進一步的了解，及檢核設計教學活動與測驗試題之用。研究者將依據此教學目標，發展向量概念成效測驗，以評量學生在向量概念中的理解情況及學習狀況。

3－3－4 向量概念的實驗教學活動

（一）各組實驗教學活動之設計編製及實施方式

本研究教學實驗活動之設計，將以三民版《高中數學》第三冊第三章「平面向量」單元為主軸，再對照「向量概念的教學目標」，補充適當之概念命題。研究者設計之教學活動及教學實施，分列如下。

1. 單元教學活動設計，包括單元名稱、適用對象、教學時間、教學目標、教學準備、單元簡介（學習情境）、教學流程、教學活動參考過程與教學說明、分段性評量（向量概念成效測驗）。
2. 在教材編製方面，皆符合高級中學數學科 99 課程綱要所提示的課程目標。
3. 實驗教學中兩組採取的教學方式各異，實驗組採取教師在課堂上操作實體向量教具教學，而控制組採取教師在黑板上畫圖的傳統方式教學。本研究針對各組將採取不同的教學活動設計，以符合各組所使用的教學方式。

（二）實驗教學之模擬準備

在教學內容及教材設計完成後，邀請一位教授及多位數學研究所同學參與模擬實驗教學，在模擬教學後，根據大家在觀摩過程中對向量教具及教學內容所給予的意見進行適當的修正調整，冀求正式實驗教學活動能臻於完善。

（三）實驗教學之實施

正式實驗教學中，以班級為單位，每個學校隨機抽選兩班，一班為實驗組，另一班為控制組，而兩組採取的教學方式各異，實驗組採取教師在課堂上操作實體向量教具教學，而控制組採取教師在黑板上畫圖的傳統方式教學。本研究針對各組將採取不同的教學活動設計，以符合各組所使用的教學方式。

本研究正式實驗教學時間為兩堂課，共 90 分鐘。不論是實驗組或控制組，第一堂課實驗教學（30 分鐘）結束後，緊接著施行向量概念成效測驗 A 卷（15 分鐘），之後第二堂課實驗教學（30 分鐘）結束後，緊接著施行向量概念成效測驗 B 卷（15 分鐘）。兩組詳細之實驗教學活動教案設計，詳見附錄一及附錄二。而關於向量概念教學內容兩組在教學演釋方法的不同之處，整理如表 3-3-2 所示。

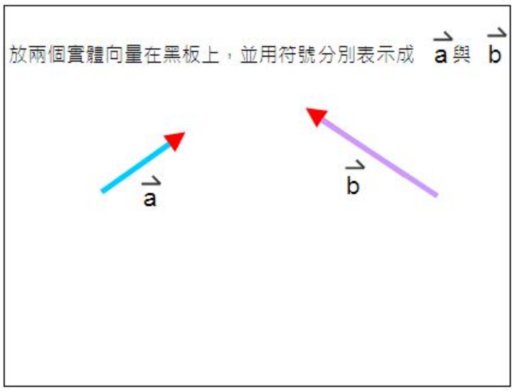
（四）實驗教學活動內容介紹

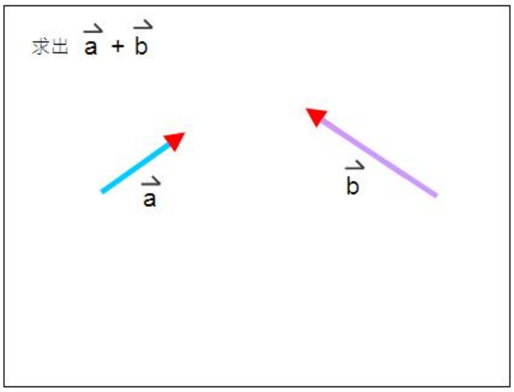
按照實驗教學過程，將教學內容編寫成課程教案如下。

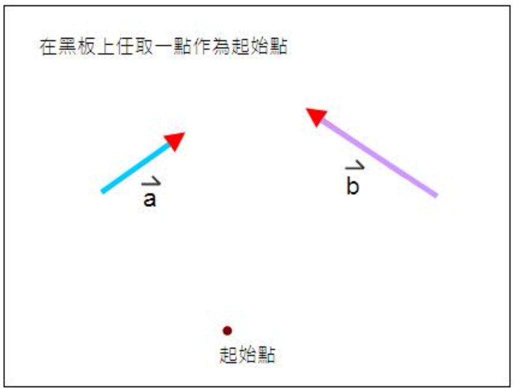
一、第一堂實驗教學

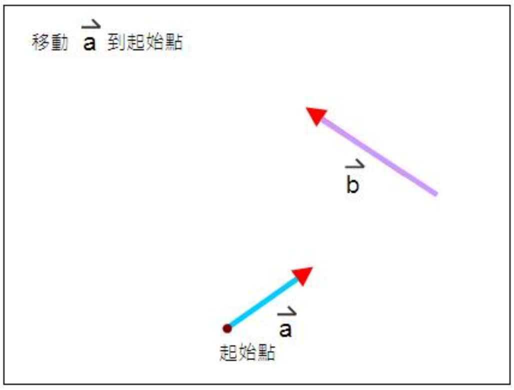
依據「向量概念的教學目標」，本堂課分為六個活動，教材以「向量的表示法」、「平行向量」、「向量的運算性質」相關概念為主軸，次概念為「向量的符號表示」、「向量的圖形表示」、「向量的相等」、「反向量」、「向量的係數積」、「向量的加法」、「向量的減法」。詳細課程教案參見附錄一。

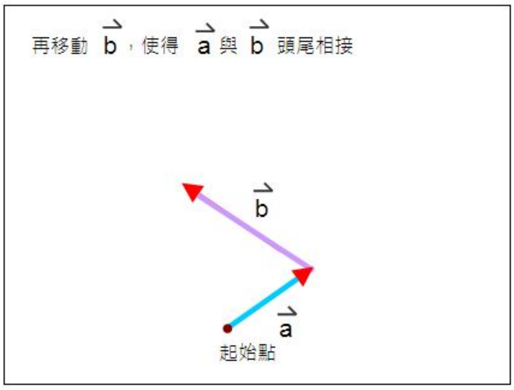
以下為第一堂實驗教學課程教案中活動（四）向量的加法的簡報檔。

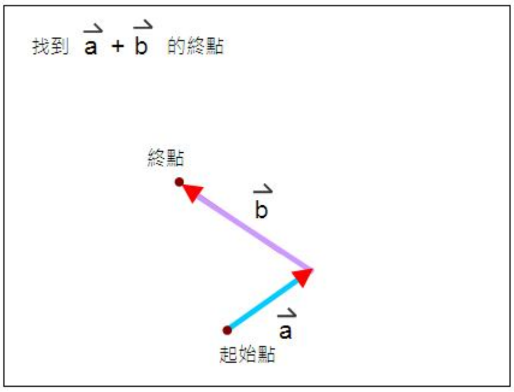


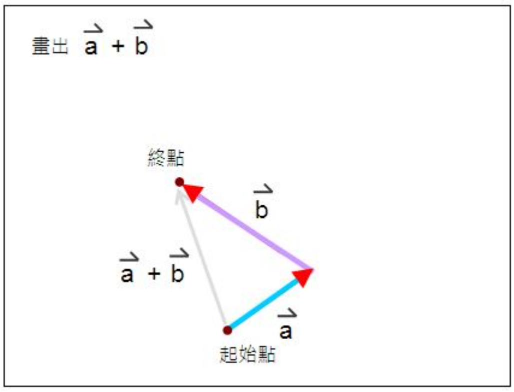








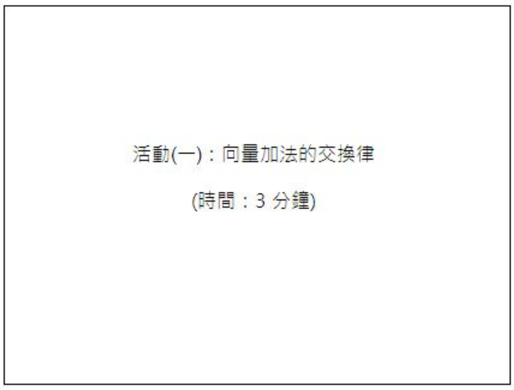


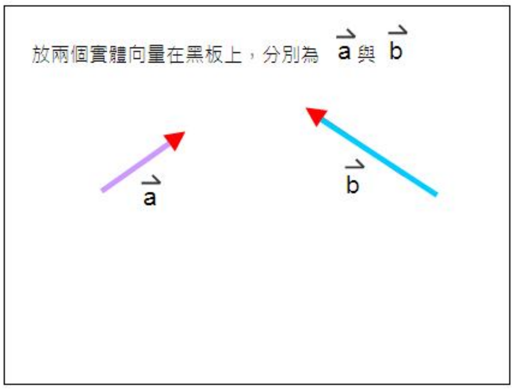


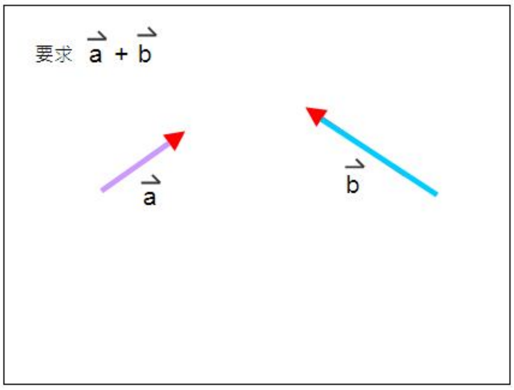
二、第二堂實驗教學

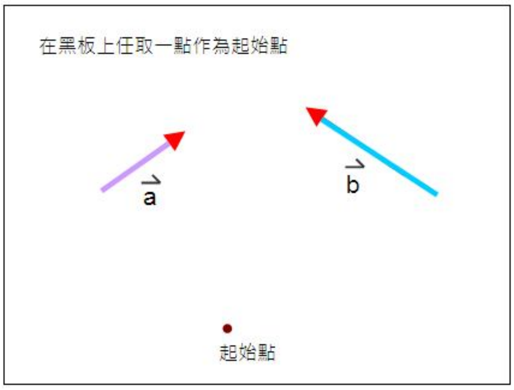
依據「向量概念的教學目標」，本堂課分為四個活動，教材以「向量的運算性質」相關概念為主軸，次概念為「向量的結合律、交換律」。詳細課程教案參見附錄二。

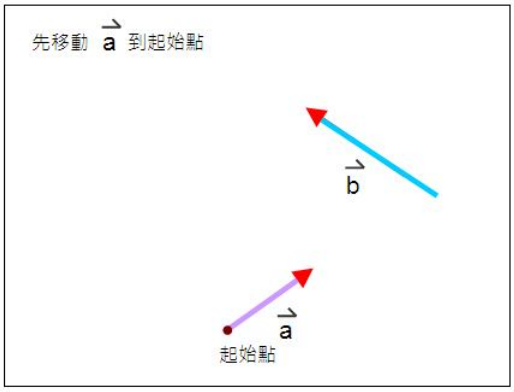
以下為第二堂實驗教學課程教案中活動（一）向量加法的交換律的簡報檔。

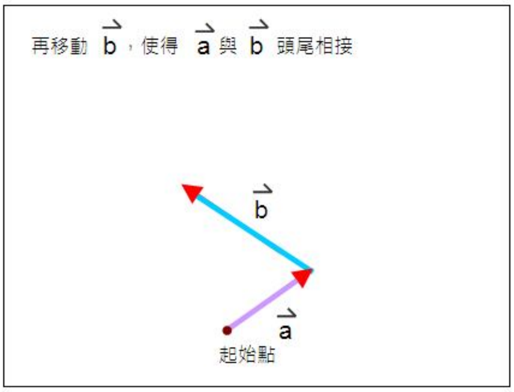


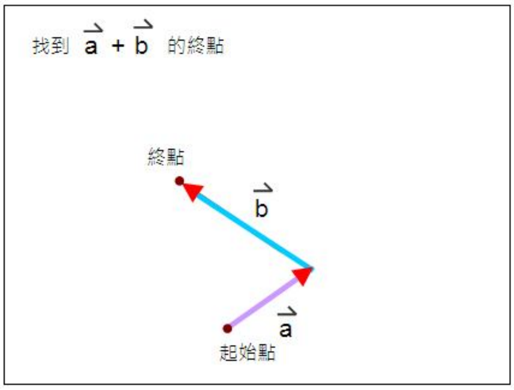


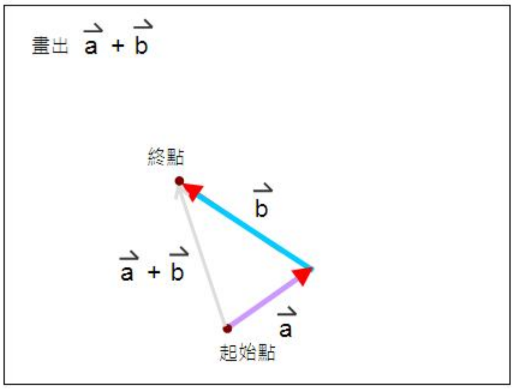

要求 $\vec{a}+\vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{b}$

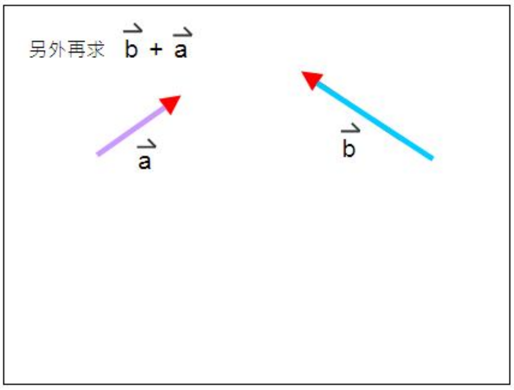

在黑板上任取一點作為起始點
$\vec{a}$
$\vec{b}$
起始點

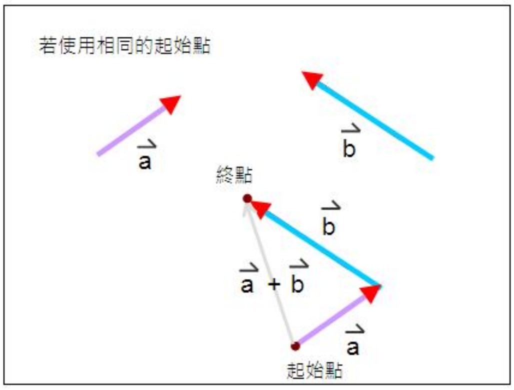

先移動 $\vec{a}$ 到起始點
$\vec{b}$
$\vec{a}$
起始點

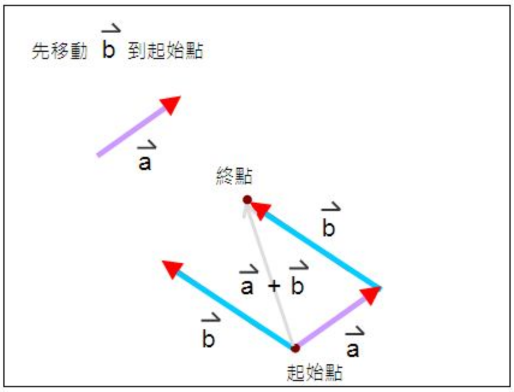

再移動 $\vec{b}$，使得 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 頭尾相接
$\vec{b}$
$\vec{a}$
起始點

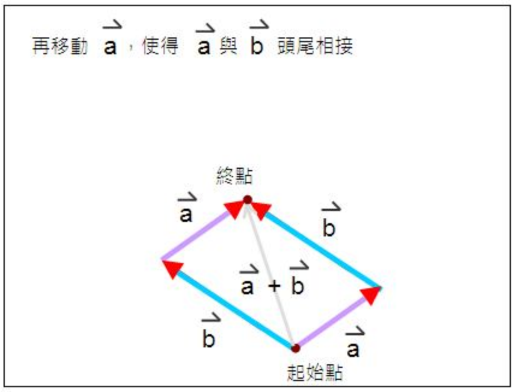

找到 $\vec{a}+\vec{b}$ 的終點
終點
$\vec{b}$
$\vec{a}$
起始點

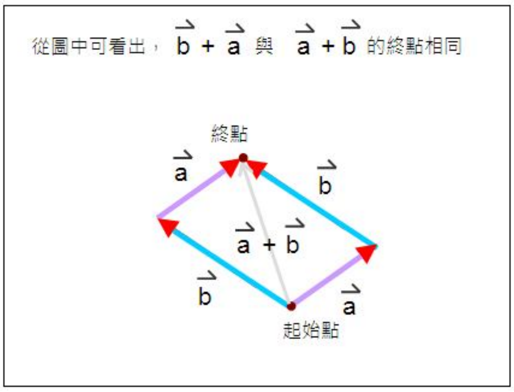

畫出 $\vec{a}+\vec{b}$
終點
$\vec{b}$
$\vec{a}+\vec{b}$
$\vec{a}$
起始點

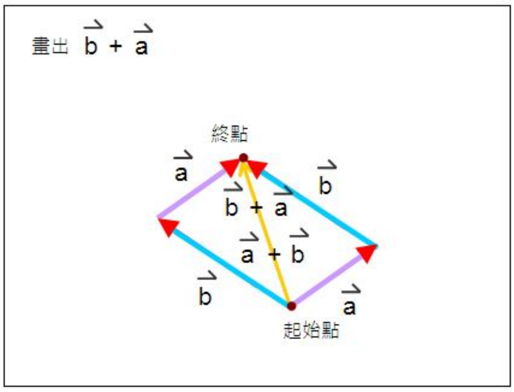

另外再求 $\vec{b}+\vec{a}$
$\vec{a}$
$\vec{b}$

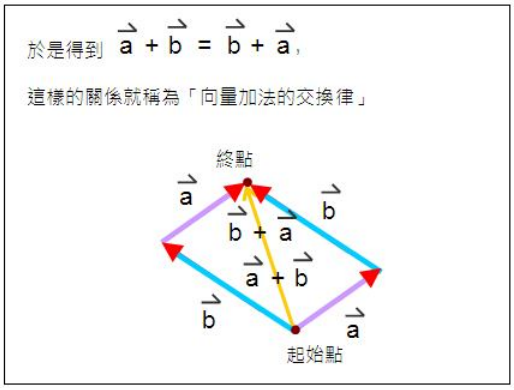

若使用相同的起始點
$\vec{a}$
$\vec{b}$
終點
$\vec{b}$
$\vec{a}+\vec{b}$
$\vec{a}$
起始點

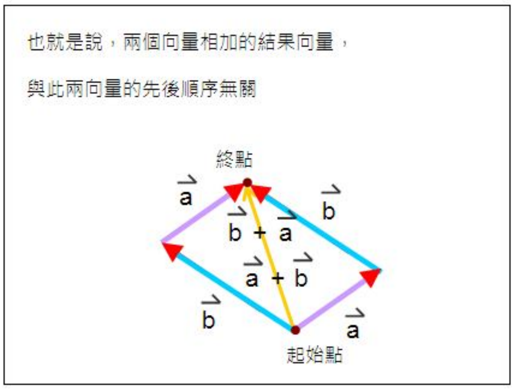












此活動完成後，接著就介紹向量相加的平行四邊形作法，此處從略，詳情參見附錄二。

表 3-3-1　向量概念的教學目標

概念類別	次概念類別	教學目標
向量的表示法	向量的符號表示	1. 認識向量的定義。 2. 能判別及使用符號表示向量。
	向量的圖形表示	1. 能判別及畫出圖形表示向量。
平行向量	向量的相等	1. 能了解向量相等的意義。 2. 能判別兩向量是否相等。 3. 能運用向量相等的概念作向量平移。 4. 能了解向量與它所在的位置無關。
	反向量	1. 認識反向量的定義。 2. 能判別及使用符號表示反向量。 3. 能判別及畫出圖形表示反向量。
	向量的係數積	1. 能了解向量係數積的意義。 2. 能判別及使用符號表示向量係數積。 3. 能判別及畫出圖形表示向量係數積。
向量的運算性質	向量的加法	1. 能了解向量加法的意義。 2. 能使用向量平移的方式作向量加法運算。
	向量的減法	1. 能了解向量減法的意義。 2. 能運用反向量的概念，及使用向量平移的方式作向量減法運算。
	向量的結合律、交換律	1. 能了解向量的結合律、交換律的意義。 2. 能運用向量的結合律、交換律化簡運算。 3. 能了解向量的運算與其順序無關。

表 3-3-2　兩組在教學演繹方法的不同之處

節次	第一堂實驗教學	第二堂實驗教學
教材內容	「向量的表示法」、「平行向量」、「向量的運算性質」相關概念為主軸，次概念為「向量的符號表示」、「向量的圖形表示」、「向量的相等」、「反向量」、「向量的係數積」、「向量的加法」、「向量的減法」。	「向量的運算性質」相關概念為主軸，次概念為「向量的結合律、交換律」。
實驗組	1. 教師操作向量教具，並搭配在黑板上傳統的書寫及畫圖方式，讓學生了解向量的基本概念。 2. 教師主要使用平移向量教具呈現向量相等的概念與作向量的加減法運算。 3. 課堂中邀請同學上台自行操作向量教具做有關向量加減法的練習題。	1. 教師主要使用向量教具，隨意平移實體的向量，並搭配在黑板上傳統的書寫及畫圖方式，讓學生了解向量的結合律、交換律的運算性質，並運用此性質作向量的加減綜合運算。 2. 課堂中邀請同學上台自行操作向量教具做有關向量加減綜合的練習題。
控制組	1. 教師完全只使用在黑板上傳統的書寫及畫圖方式，讓學生了解向量的基本概念。 2. 教師主要使用在黑板上傳統的書寫及畫圖方式解說向量相等的概念與作向量的加減法運算。 3. 課堂中邀請同學上台使用傳統的書寫及畫圖方式做有關向量加減法的練習題。	1. 教師完全只使用在黑板上傳統的書寫及畫圖方式，讓學生了解向量的結合律、交換律的運算性質，並運用此性質作向量的加減綜合運算。 2. 課堂中邀請同學上台使用傳統的書寫及畫圖方式做有關向量加減綜合的練習題。

綜合以上所述，本研究中兩組受試者接受不同的教學方法，兩者之間最大差異，在於實驗組進行教師在課堂上操作實體向量教具教學，大量引用具體形式教學表徵，抽象與具體之教學表徵相互接引，創造多元的學習情境及輕鬆和諧的教學氛圍。正式實驗教學的分析，留待第四、五章有詳細的分析及討論，在此不作贅述。

3－3－5 向量概念成效測驗

本研究之向量概念成效測驗的主要目的，是用來評量學生在進行實驗教學後，對向量概念的學習成效。

（一）向量概念成效測驗的編製方式

本測驗題目的編製主要以向量的基本概念為主，參考三民版《高中數學》第三冊第三章「平面向量」單元的課本內容，以及三所高中的平常考與段考題目，還有近幾年學測與指考的試題。從這些試題中挑選出難度合宜的題目加以改編，再參酌本研究整理的「向量概念的教學目標」(參閱表 3-3-1）審閱相關概念，以形成向量概念成效測驗的命題。因為本研究的教學實驗是兩堂課，所以測驗卷設計成 A、B 兩卷，A 卷是第一堂實驗教學結束後施行的，測驗時間預計 15 分鐘；B 卷是第二堂實驗教學結束後施行的，測驗時間預計 15 分鐘。

（二）向量概念成效測驗的編修

研究者將編製好的題目與指導教授及多位數學研究所同學，對這些題目進行篩選、指導及修正，修改題目的內容一直到確定試題的完整性，最後才選定測驗的題目。根據本測驗題目對應的教學目標及學習內容範圍，製作 A、B 兩測驗卷的雙向細目表（如表 3-3-3)，而本測驗題目的題型及配分方式（如表 3-3-4)。最後選定的 A、B 兩卷測驗內容詳見附錄三、附錄四。

以下是向量概念成效測驗 B 卷第一題題目的修改歷程：

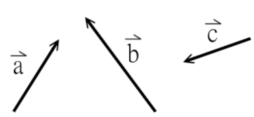
1. 最初題目內容

如右圖，有三個向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$。

⑴ 畫出 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

⑵ 畫出 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

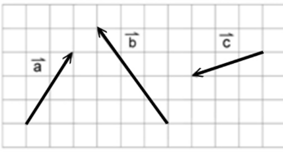
⑶ 上面兩個向量是否相等？



2. 第一次題目修正

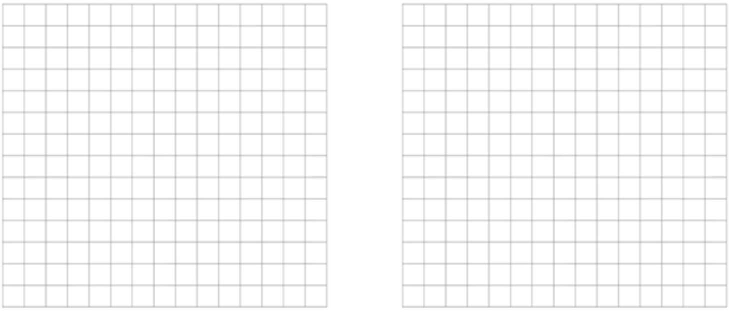
把三個已知向量畫在方格圖上，與在學生作圖區中畫上方格圖，並且要求學生在方格圖中作答。題目中增加方格圖的目的是，為了讓學生清楚看出向量的方向和長度，方便作圖，並可避免原來沒有方格圖時作圖所產生的誤差，此誤差容易造成學生在作答時錯誤的判斷。另外，在第三小題中加上詢問學生為什麼，此目的是想了解學生是否知道兩向量相等的條件(因為它們的長度和方向都相同)。

如右圖，有三個向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$。



(1) 在下面左側的方格圖中，畫出 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$。

(2) 在下面右側的方格圖中，畫出 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$。

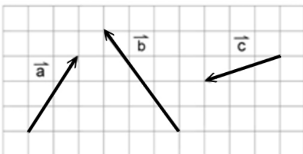


(3) 上面兩個方格圖中，畫出的兩個向量是否相等？爲什麼？

3. 第二次題目修正

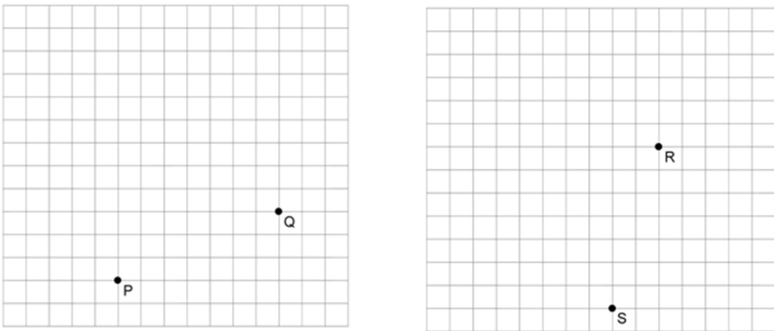
此次為最後的修正，首先是在方格圖中添加起始點，其目的是為了避免讓學生可任意選擇起始點作圖，如此容易把向量圖形畫到方格圖之外，造成作圖所產生的誤差。再來是第一、二小題中增加先讓學生畫出兩個向量相加的結果，之後再畫出三個向量相加的結果，如此分兩個階段作圖，是為了提醒學生在算式中有括號的運算要先做的觀念。

如右圖，有三個向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$。



(1) 在下面左側的方格圖中，先以 P 點爲起始點畫出 $\vec{a}+\vec{b}$，
　再以 Q 點爲起始點畫出 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$。

(2) 在下面右側的方格圖中，先以 R 點爲起始點畫出 $\vec{b}+\vec{c}$，
　再以 S 點爲起始點畫出 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$。



(3) 上面兩個方格圖中，以 Q 點、S 點爲起始點的兩個向量是否相等？爲什麼？

（三）向量概念成效測驗的預試

在確認測驗試題後，即進行試題的預試，而所選的預試對象與研究對象皆為相同的三所高中。而預試對象是這三所高中 99 學年度三年級社會組學生，以班級為單位，每個學校高三社會組班級中隨機抽選一班，共 144 名的學生實施預試。本研究預試樣本抽樣方式及樣本人數詳述如表 3-3-5、3-3-6。

（ 四 ）向量概念成效測驗的試題難度、鑑別度分析

在預試結束後，即針對試題進行難度及鑑別度的分析工作。我們採用余民寧著《教育測驗與評量—成就測驗與教學評量》（第二版）的建議方式進行分析。分析方式為先分別計算預試樣本之總分，並依高低分加以排序，再選定得分較高之前 25%（ 36 人 ）為高分組，得分較低之後 25%（ 36 人 ）為低分組，計算各組對各試題之答對率，以計算試題之難度與鑑別度。難度的定義為

$$Pi = (Pi\ H + Pi\ L) / 2$$

，其中 Pi 代表第 i 題的難度，Pi H 代表高分組答對第 i 題的百分比，Pi L 代表低分組答對第 i 題的百分比。鑑別度的定義為

$$Di = Pi\ H - Pi\ L$$

，其中 Di 代表第 i 題的鑑別度，Pi H 代表高分組答對第 i 題的百分比，Pi L 代表低分組答對第 i 題的百分比。

從試題的難度及鑑別度得知，兩卷試題多數偏易，而一般研究只會選擇鑑別度 0.19 以上的題目納入作為正式測驗用試題，但本研究卻也納入鑑別度 0.19 以下的題目，這是因為考量到預試學生為已經學過向量者，而本研究的研究對象為初學者，且教學內容主要是以基礎概念為主，所以才會納入一些鑑別度低偏易的題目作為正式測驗用試題。預試結果顯示所有試題都適合當作初學者的學習成效評量試題，所以最後皆作為正式「向量概念成效測驗」之試題。向量概念成效測驗的試題難度及鑑別度詳列於表 3-3-7。

（ 五 ）向量概念成效測驗的信度、效度分析

研究者所編製向量概念成效測驗，邀請一位教授及多位數學研究所同學，就測驗架構及試題內容之設計予以適切的指導、修正，再根據實際的需要加以修編，以建立本研究向量概念成效測驗的專家內容效度。

本研究將向量概念成效測驗之題目進行 Cronbach α 信度係數考驗，以確定其內部一致性。當 Cronbach α 信度係數大於 0.7 時，則表示內部一致性良好（ 陳耀茂，2004 ）。以 SPSS 19.0 電腦套裝軟體程式，進行資料的分析。分析結果向量概念成效測驗 A 卷之 Cronbach α 信度係數達 0.72，而向量概念成效測驗 B 卷之 Cronbach α 信度係數達 0.86，皆符合一致性信度之標準。詳列於表 3-3-8。

表 3-3-3　向量概念成效測驗的雙向細目表

試卷 內容範圍	卷 A 題號	卷 B 題號
向量的符號表示	1-1　1-2　1-3　1-4	
向量的圖形表示	1-1　1-2　1-3　1-4	
向量的相等		2-4
反向量	1-3　1-4 3-3	
向量的係數積	2-1 3-1　3-2　3-3	2-2
向量的加法	1-1　1-2	2-1　2-5
向量的減法	1-3　1-4 2-2　2-3	2-3
向量的結合律、交換律		1-1　1-2　1-3 3 4 5-1　5-2　5-3

※上述表格中，記錄時所用的記號代表的意義，如下舉例：
例如：若題目為第 3 題的第 2 小題（ 或第 2 個選項 ），則用符號「3-2」表示。

表 3-3-4　向量概念成效測驗的題型及配分方式

測驗內容	題次	題型	配分方式	總分
向量概念成效測驗 A 卷	1.(1)	填充題	1 分	10 分
	1.(2)	填充題	1 分	
	1.(3)	填充題	1 分	
	1.(4)	填充題	1 分	
	2.(1)	多選題	1 分	
	2.(2)	多選題	1 分	
	2.(3)	多選題	1 分	
	3.(1)	作圖題	1 分	
	3.(2)	作圖題	1 分	
	3.(3)	作圖題	1 分	
向量概念成效測驗 B 卷	1.(1)	作圖題	1 分	13 分
	1.(2)	作圖題	1 分	
	1.(3)	簡答題	1 分	
	2.(1)	配合題	1 分	
	2.(2)	配合題	1 分	
	2.(3)	配合題	1 分	
	2.(4)	配合題	1 分	
	2.(5)	配合題	1 分	
	3	選擇題	1 分	
	4	選擇題	1 分	
	5.(1)	填充題	1 分	
	5.(2)	填充題	1 分	
	5.(3)	填充題	1 分	

表 3-3-5　預試樣本分析表

分析 樣本	母體	抽樣方式	後續處理
預試樣本	桃園縣的三所高級中學 99 學年度三年級社會組學生	以班級為單位，每個學校隨機抽選一班	施行向量概念成效測驗 A、B 兩卷

表 3-3-6　預試樣本人數表

甲高中	乙高中	丙高中	總數
48	49	47	144

表 3-3-7　向量概念成效測驗的試題難度及鑑別度

測驗內容	題次	題型	難度	鑑別度
向量概念成效測驗 A 卷	1.(1)	填充題	0.95	0.12
	1.(2)	填充題	0.89	0.21
	1.(3)	填充題	0.85	0.30
	1.(4)	填充題	0.72	0.55
	2.(1)	多選題	0.92	0.16
	2.(2)	多選題	0.69	0.62
	2.(3)	多選題	0.71	0.57
	3.(1)	作圖題	0.87	0.26
	3.(2)	作圖題	0.82	0.35
	3.(3)	作圖題	0.79	0.41
向量概念成效測驗 B 卷	1.(1)	作圖題	0.65	0.69
	1.(2)	作圖題	0.65	0.69
	1.(3)	簡答題	0.62	0.75
	2.(1)	配合題	0.92	0.14
	2.(2)	配合題	0.84	0.32
	2.(3)	配合題	0.92	0.16
	2.(4)	配合題	0.93	0.14
	2.(5)	配合題	0.88	0.23
	3	選擇題	0.71	0.57
	4	選擇題	0.62	0.76
	5.(1)	填充題	0.87	0.26
	5.(2)	填充題	0.60	0.80
	5.(3)	填充題	0.59	0.81

表 3-3-8　向量概念成效測驗的信度、效度分析表

測驗對象	桃園縣的三所高級中學 99 學年度三年級社會組學生共 144 人	
測驗內容	向量概念成效測驗 A 卷	向量概念成效測驗 B 卷
測驗時間	15 分鐘	15 分鐘
Cronbach α 信度係數	0.72	0.86
效度	專家內容效度	專家內容效度
難度	0.69 ~ 0.95	0.59 ~ 0.92
鑑別度	0.12 ~ 0.62	0.14 ~ 0.81

第四節　資料分析的統計方法

本研究資料分析以 SPSS 19.0 電腦套裝軟體程式，進行資料的統計與分析，並以 0.05 為顯著水準，茲將實驗研究假設與所使用之統計方法整理如表 3-4-1。

表 3-4-1　實驗研究假設的資料分析方法

研究假設		不同型態的教學模式（使用教具教學、傳統方式教學）與不同學習成就（高、中、低）之間，在學習平面向量成效上沒有顯著的交互作用
資料分析	統計方法	二因子單變量共變數分析
	自變項	不同型態的教學模式（使用教具教學、傳統方式教學）與不同學習成就（高、中、低）
	共變項	這學期數學第一、二次段考成績的平均分數（前測）
	依變項	向量概念成效測驗分數（後測）
	控制變項	教學時數、教學進度、教材內容

註：若二因子共變數分析結果有交互作用，將進一步進行單純主要效果分析；若結果無交互作用，則針對二個因子分別討論主要效果，其中有顯著的因子將進行事後比較。

第四章　研究結果與討論

本研究的目的在於了解有無接受向量教具融入教學，對高中二年級學生學習平面向量成效的影響。本章欲探討的研究假設是不同型態的教學模式（使用教具教學、傳統方式教學）與不同學業表現（高、中、低）之間，在學習平面向量成效上沒有顯著的交互作用。最後將根據本實驗的研究假設進行分析與簡單歸納結論。

研究者以這三所高中「當屆入學的基測最低的PR值」作為不同學業表現的分組依據。甲高中的PR＝93分類為高學業表現組；乙高中的PR＝84分類為中學業表現組；丙高中的PR＝50分類為低學業表現組。本研究以「教學模式、學業表現」作為自變項，三組學生的「這學期數學第一、二次段考成績的平均分數(前測)」作為共變項，「向量概念成效測驗分數(後測)」作為依變項，並於教學實驗結束後進行二因子共變數分析。其分析步驟如下。

一、學生在前後測的成績表現

本研究於進行施測前即蒐集實驗組與控制組兩組學生這學期數學第一、二次段考成績，並將兩次段考分數取其平均值作為前測分數，如表4-1、4-2、4-3。施測之「向量概念學習成效測驗A卷」的滿分是 10 分，題型包括「多選題」、「填充題」及「作圖題」，而「向量概念學習成效測驗B卷」的滿分是 13 分，題型包括「作圖題」、「簡答題」、「配合題」、「選擇題」及「填充題」，學生得分愈高，表示學生之向量概念學習成效愈完善，反之，則愈不理想。這三組學生在「向量概念學習成效測驗A卷」與「向量概念學習成效測驗B卷」的成績表現分配表，如表4-4、4-5、4-6。以及學生在不同教學模式與不同學業表現在「向量概念學習成效測驗A卷」與「向量概念學習成效測驗B卷」的成績表現分配表，如表4-7、4-8。

從表4-4可知，高學業表現組的實驗組學生在「向量概念學習成效測驗A卷」成績的平均數（ 8.59 ）高於控制組的平均數（ 8. 29)，且實驗組學生在「向量概念學習成效測驗B卷」成績的平均數（ 11.39 ）高於控制組的平均數（ 10.44)。從表4-5可知，中學業表現組的實驗組學生在「向量概念學習成效測驗A卷」成績的平均數（ 8.57 ）高於控制組的平均數（ 7.96)，且實驗組學生在「向量概念學習成效測驗B卷」成績的平均數（ 10. 27 ）高於控制組的平均數（ 9.71)。從表4-6可知，低學業表現組的實驗組學生在「向量概念學習成效測驗A卷」成績的平均數（ 7.48 ）高於控制組的平均數（ 4.95)，且

實驗組學生在「向量概念學習成效測驗 B 卷」成績的平均數（ 6. 67 ）高於控制組的平均數（ 3.62 ）。

表 4-1　高學業表現組學生在「這學期數學第一、二次段考成績的平均分數（ 前測 ）」成績表現的摘要表

組別	這學期數學第一、二次段考成績的平均分數（ 前測 ）
實驗組	平均數　53.22　標準差　13.59
控制組	平均數　52.91　標準差　12.34

表 4-2　中學業表現組學生在「這學期數學第一、二次段考成績的平均分數（ 前測 ）」成績表現的摘要表

組別	這學期數學第一、二次段考成績的平均分數（ 前測 ）
實驗組	平均數　52.14　標準差　14.70
控制組	平均數　49.90　標準差　17.34

表 4-3　低學業表現組學生在「這學期數學第一、二次段考成績的平均分數（ 前測 ）」成績表現的摘要表

組別	這學期數學第一、二次段考成績的平均分數（ 前測 ）
實驗組	平均數　47.62　標準差　6.82
控制組	平均數　44.05　標準差　7.85

表 4-4　高學業表現組學生在「向量概念學習成效測驗(後測)」成績表現的摘要表

組別		向量概念學習成效測驗（ 後測 ）
A 卷	實驗組	平均數　8.59　標準差　1.72
	控制組	平均數　8.29　標準差　2.46
B 卷	實驗組	平均數　11.39　標準差　2.02
	控制組	平均數　10.44　標準差　2.89

表 4-5　中學業表現組學生在「向量概念學習成效測驗(後測)」成績表現的摘要表

組別		向量概念學習成效測驗（ 後測 ）
A 卷	實驗組	平均數　8.57　標準差　1.52
	控制組	平均數　7.96　標準差　2.60
B 卷	實驗組	平均數　10.27　標準差　3.07
	控制組	平均數　9.71　標準差　2.16

表 4-6　低學業表現組學生在「向量概念學習成效測驗(後測)」成績表現的摘要表

組別		向量概念學習成效測驗（ 後測 ）
A 卷	實驗組	平均數　7.48　標準差　2.27
	控制組	平均數　4.95　標準差　2.16
B 卷	實驗組	平均數　6.67　標準差　3.38
	控制組	平均數　3.62　標準差　2.78

表 4-7　不同教學模式與不同學業表現在「向量概念學習成效測驗 A 卷」的成績表現分配表

教學模式	學業表現	樣本數	平均數	標準差
實驗組	高	41	8.59	1.72
	中	42	8.57	1.52
	低	21	7.48	2.27
控制組	高	41	8.29	2.46
	中	49	7.96	2.60
	低	21	4.95	2.16

表 4-8　不同教學模式與不同學業表現在「向量概念學習成效測驗 B 卷」的成績表現分配表

教學模式	學業表現	樣本數	平均數	標準差
實驗組	高	41	11.39	2.02
	中	42	10.27	3.07
	低	21	6.67	3.38
控制組	高	41	10.44	2.89
	中	49	9.71	2.16
	低	21	3.62	2.78

二、組內迴歸係數同質檢定

首先進行組內迴歸係數同質性考驗，其結果如表 4-9、4-10 所示。若組內迴歸係數同質檢定結果不顯著，則表示各分組之迴歸線之斜率係數相等，即在共變項上均質，可進行共變數分析。

從表 4-9、4-10 中得知，因為組內迴歸係數同質性檢定之結果，均未達統計上的顯著差異（$P > 0.05$），表示二組之迴歸線斜率相同，即在共變項上均質，符合共變數組內迴歸係數同質性分析的前提假設，即進行二因子共變數分析。

表 4-9　不同教學模式與不同學業表現在「向量概念學習成效測驗 A 卷」的組內迴歸係數同質性檢定表

F 檢定	df1	df2	顯著性
1.821	5	209	0.110

表 4-10　不同教學模式與不同學業表現在「向量概念學習成效測驗 B 卷」的組內迴歸係數同質性檢定表

F 檢定	df1	df2	顯著性
3.056	5	209	0.072

三、二因子共變數分析

再來進行二因子共變數分析，其結果如表 4-11、4-12 所示。若二因子共變數分析中之交互作用項效果達顯著水準（$P < 0.05$），則進行單純主要效果的分析，並對有顯著者，進行事後比較。若交互作用項不顯著（$P > 0.05$），則針對各因子主要效果達顯著者，進行事後比較分析。

從表 4-11、4-12 的結果顯示，排除「這學期數學第一、二次段考成績的平均分數」的影響後，不同教學模式與不同學業表現在「向量概念學習成效測驗 A 卷」與「向量概念學習成效測驗 B 卷」的成績表現上皆有顯著的交互作用。「向量概念學習成效測驗 A 卷」已達到統計上的顯著差異（ $F = 3.972$，$P = 0.020 < 0.05$ ）；而「向量概念學習成效測驗 B 卷」已達到統計上的顯著差異（ $F = 3.194$，$P = 0.043 < 0.05$ ）。A、B 兩卷的二因子交互作用均達顯著，所以都需要再作單純主要效果檢定。顯示在不同的教學模式下，成績的高低會因為不同學業表現而呈現不同的結果。

表 4-11　不同教學模式與不同學業表現在「向量概念學習成效測驗 A 卷」成績之二因子共變數分析摘要表

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 檢定	顯著性
教學模式組別	62.455	1	62.455	13.390	0.000
學業表現組別	155.052	2	77.526	16.621	0.000
教學模式組別*學業表現組別	37.052	2	18.526	3.972	0.020
誤差	974.834	209	4.664		
總數	14695.000	215			

表 4-12　不同教學模式與不同學業表現在「向量概念學習成效測驗 B 卷」成績之二因子共變數分析摘要表

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 檢定	顯著性
教學模式組別	109.975	1	109.975	15.066	0.000
學業表現組別	980.755	2	490.378	67.180	0.000
教學模式組別*學業表現組別	46.635	2	23.317	3.194	0.043
誤差	1525.595	209	7.299		
總數	21648.000	215			

以下將分別對「向量概念學習成效測驗 A 卷」與「向量概念學習成效測驗 B 卷」中，A 因子（學業表現）與 B 因子（教學模式）作單純主要效果檢定。

（一）對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 A 因子作單純主要效果檢定，限定 B 因子中的實驗組

從表 4-13、4-14 的結果顯示，單純主要效果檢定已達到統計上的顯著差異（$F = 3.259$，$p = 0.042 < 0.05$）。顯示在「向量概念學習成效測驗 A 卷」的學習成效上，對實驗組而言，不同的學業表現有顯著的差異，由於有高、中、低學業表現三個比較水準，因此需要查看事後比較。

再從表 4-15 中，事後比較的結果顯示，在「向量概念學習成效測驗 A 卷」的學習成效上，高、中、低學業表現組兩兩之間皆無顯著差異。高學業表現組的平均數優於中學業表現組，而中學業表現組也優於低學業表現組。因為學業表現即代表學習能力的表現情形，所以高學業表現組的學生在數學學習上的表現比低學業表現組的學生來得較好，即使達到顯著差異也是自然現象，因此，並無討論的意義。於是從這之後，A、B 兩卷就不再重複作 A 因子的單純主要效果檢定，只針對 B 因子作單純主要效果檢定。

表 4-13　對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 A 因子作單純主要效果檢定，限定 B 因子中的實驗組之摘要表

		個數	平均數	標準差	標準誤	平均數的 95% 信賴區間 下界	上界	最小值	最大值	成份間變異數
高		41	8.5854	1.71720	.26818	8.0434	9.1274	4.00	10.00	
中		42	8.5714	1.51646	.23399	8.0989	9.0440	4.00	10.00	
低		21	7.4762	2.27198	.49579	6.4420	8.5104	2.00	10.00	
總和		104	8.3558	1.80570	.17706	8.0046	8.7069	2.00	10.00	
模式	固定效果			1.76735	.17330	8.0120	8.6996			
	隨機效應				.32579	6.9540	9.7575			.21182

表 4-14　對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 A 因子作單純主要效果檢定，限定 B 因子中的實驗組之變異數分析摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	20.362	2	10.181	3.259	.042
組內	315.475	101	3.124		
總和	335.837	103			

表 4-15　對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 A 因子作單純主要效果檢定，限定 B 因子中的實驗組之多重比較摘要表

(I)學業表現	(J)學業表現	平均差異 (I-J)	標準誤	顯著性	95% 信賴區間 下界	95% 信賴區間 上界
高	中	.01394	.38801	.999	-.9501	.9780
	低	1.10918	.47426	.070	-.0691	2.2875
中	高	-.01394	.38801	.999	-.9780	.9501
	低	1.09524	.47234	.073	-.0783	2.2688
低	高	-1.10918	.47426	.070	-2.2875	.0691
	中	-1.09524	.47234	.073	-2.2688	.0783

（二）對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的高學業表現組

從表 4-16、4-17 的結果顯示，單純主要效果檢定未達到統計上的顯著差異（F = 0.390，p = 0.534 ＞ 0.05）。顯示在「向量概念學習成效測驗 A 卷」的學習成效上，對高學業表現組而言，不同的教學模式沒有顯著的差異。這也表示高學業表現組的同學有無接受向量教具融入教學沒有顯著的差異。

表 4-16　對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的高學業表現組之摘要表

		個數	平均數	標準差	標準誤	平均數的 95% 信賴區間 下界	上界	最小值	最大值	成份間變異數
實驗組		41	8.5854	1.71720	.26818	8.0434	9.1274	4.00	10.00	
控制組		41	8.2927	2.46215	.38452	7.5155	9.0698	1.00	10.00	
總和		82	8.4390	2.11460	.23352	7.9744	8.9037	1.00	10.00	
模式	固定效果			2.12261	.23440	7.9725	8.9055			
	隨機效應				.23440	5.4606	11.4174			-.06706

表 4-17　對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的高學業表現組之變異數分析摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	1.756	1	1.756	.390	.534
組內	360.439	80	4.505		
總和	362.195	81			

（三）對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的中學業表現組

從表 4-18、4-19 的結果顯示，單純主要效果檢定未達到統計上的顯著差異（$F = 1.804$，$p = 0.183 > 0.05$）。顯示在「向量概念學習成效測驗 A 卷」的學習成效上，對中學業表現組而言，不同的教學模式沒有顯著的差異。這也表示中學業表現組的同學有無接受向量教具融入教學沒有顯著的差異。

表 4-18　對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的中學業表現組之摘要表

		個數	平均數	標準差	標準誤	平均數的 95% 信賴區間 下界	平均數的 95% 信賴區間 上界	最小值	最大值	成份間變異數
實驗組		42	8.5714	1.51646	.23399	8.0989	9.0440	4.00	10.00	
控制組		49	7.9592	2.59775	.37111	7.2130	8.7053	.00	10.00	
總和		91	8.2418	2.17736	.22825	7.7883	8.6952	.00	10.00	
模式	固定效果			2.16770	.22724	7.7902	8.6933			
	隨機效應				.30602	4.3534	12.1302			.08353

表 4-19　對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的中學業表現組之變異數分析摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	8.477	1	8.477	1.804	.183
組內	418.204	89	4.699		
總和	426.681	90			

（四）對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的低學業表現組

從表 4-20、4-21 的結果顯示，單純主要效果檢定已達到統計上的顯著差異（F = 13.636，p = 0.001 ＜ 0.05）。顯示在「向量概念學習成效測驗 A 卷」的學習成效上，對低學業表現組而言，不同的教學模式有顯著的差異。這也表示低學業表現組的同學有無接受向量教具融入教學有顯著的差異。由於只有實驗組、控制組兩個比較水準，因此只需要比較兩組的平均數即可。

再從表 4-20 中，比較兩組的平均數結果顯示，在「向量概念學習成效測驗 A 卷」的學習成效上，對低學業表現組而言，實驗組的平均數優於控制組。這就表示低學業表現組的同學接受向量教具融入教學的學習成效有顯著的提昇。

表 4-20　對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的低學業表現組之摘要表

		個數	平均數	標準差	標準誤	平均數的 95% 信賴區間		最小值	最大值	成份間變異數
						下界	上界			
實驗組		21	7.4762	2.27198	.49579	6.4420	8.5104	2.00	10.00	
控制組		21	4.9524	2.15583	.47044	3.9711	5.9337	1.00	10.00	
總和		42	6.2143	2.53306	.39086	5.4249	7.0036	1.00	10.00	
模式	固定效果			2.21467	.34173	5.5236	6.9049			
	隨機效應				1.26190	-9.8197	22.2483			2.95125

表 4-21 對「向量概念學習成效測驗 A 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的低學業表現組之變異數分析摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	66.881	1	66.881	13.636	.001
組內	196.190	40	4.905		
總和	263.071	41			

（五）對「向量概念學習成效測驗 B 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的高學業表現組

從表 4-22、4-23 的結果顯示，單純主要效果檢定未達到統計上的顯著差異（$F = 2.981$，$p = 0.088 > 0.05$）。顯示在「向量概念學習成效測驗 B 卷」的學習成效上，對高學業表現組而言，不同的教學模式沒有顯著的差異。這也表示高學業表現組的同學有無接受向量教具融入教學沒有顯著的差異。

表 4-22　對「向量概念學習成效測驗 B 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的高學業表現組之摘要表

		個數	平均數	標準差	標準誤	平均數的 95% 信賴區間 下界	平均數的 95% 信賴區間 上界	最小值	最大值	成份間變異數
實驗組		41	11.3902	2.02334	.31599	10.7516	12.0289	4.00	13.00	
控制組		41	10.4390	2.89006	.45135	9.5268	11.3512	2.00	13.00	
總和		82	10.9146	2.52494	.27883	10.3598	11.4694	2.00	13.00	
模式	固定效果			2.49463	.27549	10.3664	11.4629			
	隨機效應				.47561	4.8714	16.9578			.30062

表 4-23　對「向量概念學習成效測驗 B 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的高學業表現組之變異數分析摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	18.549	1	18.549	2.981	.088
組內	497.854	80	6.223		
總和	516.402	81			

（六）對「向量概念學習成效測驗 B 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的中學業表現組

從表 4-24、4-25 的結果顯示，單純主要效果檢定未達到統計上的顯著差異（F = 0.949，p = 0.333 ＞ 0.05）。顯示在「向量概念學習成效測驗 B 卷」的學習成效上，對中學業表現組而言，不同的教學模式沒有顯著的差異。這也表示中學業表現組的同學有無接受向量教具融入教學沒有顯著的差異。

表 4-24　對「向量概念學習成效測驗 B 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的中學業表現組之摘要表

		個數	平均數	標準差	標準誤	平均數的 95% 信賴區間 下界	平均數的 95% 信賴區間 上界	最小值	最大值	成份間變異數
實驗組		49	10.2653	3.07392	.43913	9.3824	11.1482	.00	13.00	
控制組		42	9.7143	2.15594	.33267	9.0424	10.3861	4.00	13.00	
總和		91	10.0110	2.68946	.28193	9.4509	10.5711	.00	13.00	
模式	固定效果			2.69023	.28201	9.4506	10.5713			
	隨機效應				.28201	6.4277	13.5943			-.00820

表 4-25　對「向量概念學習成效測驗 B 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的中學業表現組之變異數分析摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	6.867	1	6.867	.949	.333
組內	644.122	89	7.237		
總和	650.989	90			

（七）對「向量概念學習成效測驗 B 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的低學業表現組

從表 4-26、4-27 的結果顯示，單純主要效果檢定已達到統計上的顯著差異（$F = 10.169$，$p = 0.003 < 0.05$）。顯示在「向量概念學習成效測驗 B 卷」的學習成效上，對低學業表現組而言，不同的教學模式有顯著的差異。這也表示低學業表現組的同學有無接受向量教具融入教學有顯著的差異。由於只有實驗組、控制組兩個比較水準，因此只需要比較兩組的平均數即可。

再從表 4-26 中，比較兩組的平均數結果顯示，在「向量概念學習成效測驗 B 卷」的學習成效上，對低學業表現組而言，實驗組的平均數優於控制組。這就表示低學業表現組的同學接受向量教具融入教學的學習成效有顯著的提昇。

表 4-26　對「向量概念學習成效測驗 B 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的低學業表現組之摘要表

		個數	平均數	標準差	標準誤	平均數的 95% 信賴區間		最小值	最大值	成份間變異數
						下界	上界			
實驗組		21	6.6667	3.38132	.73786	5.1275	8.2058	1.00	12.00	
控制組		21	3.6190	2.78345	.60740	2.3520	4.8861	1.00	10.00	
總和		42	5.1429	3.42567	.52859	4.0753	6.2104	1.00	12.00	
模式	固定效果			3.09685	.47785	4.1771	6.1086			
	隨機效應				1.52381	-14.2190	24.5047			4.18730

表 4-27　對「向量概念學習成效測驗 B 卷」的 B 因子作單純主要效果檢定，限定 A 因子中的低學業表現組之變異數分析摘要表

	平方和	自由度	平均平方和	F	顯著性
組間	97.524	1	97.524	10.169	.003
組內	383.619	40	9.590		
總和	481.143	41			

研究者推論其原因，對「向量概念學習成效測驗 A 卷」而言，可能是因為其試題都是平面向量中最基礎的概念題，對高學業表現、中學業表現的學生而言，教師使用教具或用傳統教法，效果沒有明顯的差異。但是對低學業表現的學生而言，實驗組的平均數顯著優於控制組，可見教師使用教具輔助教學，對學業表現較弱的學生，學習最基礎的概念，其學習成效會明顯大為提升。

另外，對「向量概念學習成效測驗 B 卷」而言，可能是因為其試題大多屬於平面向量的進階題，對高學業表現、中學業表現的學生而言，教師使用教具或用傳統教法，效果還是沒有明顯的差異。但是對低學業表現的學生而言，實驗組的平均數顯著優於控制組，可見教師使用教具輔助教學，對學業表現較弱的學生，學習較進階的概念，其學習成效也是會明顯大為提升。

本研究結果表示，低學業表現的學生在接受「向量教具融入教學」後，在「向量概念學習成效測驗」A、B 兩卷的學習成效表現上，皆顯著優於沒有接受「向量教具融入教學」的學生。亦即本研究針對「平面向量」單元所做的向量教具融入教學設計是有利於提升低學業表現學生的學習成效。顯示使用向量教具融入教學對低學業表現學生學習向量概念的相關教材是有幫助的。

研究者推論，「向量教具融入教學」能有效提昇學生學習「平面向量」的單元之成效原因，可能是在「向量教具融入教學」的教學策略中，教師主要使用向量教具作教學表徵，隨意平移實體的向量，並搭配在黑板上傳統的書寫及畫圖方式，讓學生了解向量的概念與其運算性質。再加上邀請學生親身體驗操作向量教具解決問題，這能讓學生印象深刻，促進觀念理解，進而加深學習記憶。

綜合上述，由於「向量教具融入教學」的教學策略運用具體與抽象之教學表徵，相互輔助，創造多元之學習情境及輕鬆和諧之教學氣圍，使學生對於教師的教學表徵有較深的印象，則較易於接受教材內容，將有助於學生的理解與記憶，因而有較佳之學習成效。

第五章　結論與建議

本研究旨在探討研究者設計製作的向量教具及教學方法融入教學，對高中二年級學生學習向量概念之成效的提升程度。本章分為二節，第一節為結論，根據研究結果提出本研究的結論，第二節為建議，主要是針對本研究的發現，提供教學、教材設計的建議，以及未來研究的方向。

第一節　結論

根據本研究的研究結果與討論，作出以下的研究結論。

不同型態的教學模式與不同學業表現之間，在學習平面向量的成效上有顯著的交互作用。雖然對高學業表現與中學業表現的學生而言，教師使用教具或用傳統教法，在「向量概念學習成效測驗」A、B兩卷的學習成效上並沒有顯著的差異。但對低學業表現的學生而言，使用「向量教具融入教學」的模式比「傳統方式教學」的模式，在「向量概念學習成效測驗」A、B兩卷的學習成效上，有顯著的差異且有較佳的學習成效表現。顯示本研究使用「向量教具融入教學」的方式，能有效提昇低學業表現的學生學習「平面向量」的單元之成效。

第二節　建議

根據本研究的結果，以及研究者在研究過程中的發現和經歷，在教學、教材設計及未來研究上，提出下列建議，可提供欲發展實體教具融入數學教學時之參考。

一、　研究者在研究過程中的發現和經歷

根據研究者在三所高中實驗組與控制組的教學現場所作的觀察，分述如下。

（一）實驗組學生的學習情況

研究者在實驗組教學過程中觀察學生的學習狀況，剛開始當老師攜帶著教具

走進教室時，幾乎全班同學都注意到老師手上多了樣東西，有同學顯得很有興趣的問，想知道老師拿這個東西來教室作什麼。在上課過程中，大多數的同學都專注在看老師展示教具教學。過程中有請學生上台自行操作教具解題，在台下的同學有些反應非常熱烈，大聲的指導在台上的同學，全班的氣氛很愉快又熱鬧。就連老師自己也被課堂中的氣氛感染到，覺得蠻開心的。有實驗組的學生反應對老師的上課方式、問答互動，覺得較有趣及活潑，顯示出「向量教具融入教學」對於吸引學生之學習意願，有明顯的助益。

另外，發現在「向量教具融入教學」的教學情境中，教具較能吸引學生的目光與注意力，可能是因為教師能隨意平移實體向量教具，使得此教具能讓學習者有動態、視覺化的明顯感受。再加上隨著教師在課堂上的引導，使得學生容易觀察到向量平移後所產生的變化，進而吸引學生的目光與注意力。並且使用「向量教具融入教學」的教學模式，也改變了原來傳統教學講述的上課方式，讓學生不再只是被動的背誦與記憶概念，而是能夠以動態、視覺化的方式學習，利用向量教具可隨意平移所帶來的變化，提供學生探索向量概念與其運算性質的一種方式。學生可以明顯看到操弄向量教具所帶來的變化，將有助於心像的建構，且可從中觀察向量教具在變動過程中產生的一些性質。如此，不僅可改變學生對數學的看法，也可提高學習數學的興趣。

（二）控制組學生的學習情況

研究者在控制組教學過程中觀察學生的學習狀況，在上課過程中，多數同學依然是認真聽講且願意回答問題，但有少數同學不太認真聽講，有的人東看西看，也有些趴在桌上好像要睡覺了。後來請同學上台解題時，在台下的同學有些似乎不太想參與這種互動，而在台下作自己的事情。明顯感覺到學生的學習情緒是較平淡的，全班的氣氛也很普通。老師上完課也沒有很開心的感覺。

研究者推論其背後可能的原因，如下所述。

1. 教師使用不同教學策略，對受試者之學習態度造成影響之肇因，有可能是因為實驗組的學生由於是使用向量教具學習，學習心態是輕鬆愉快，達到寓教於樂之功效。而控制組是由教師傳統講述上課，對於有較高學習成就的學生而言，多數學生依然是認真聽講且願意回答問題，但對較低學習成就的學生而言，有許多學生上課時作自己的事，也有人東張西望，也有人與身旁的同學講話嬉鬧，當然還是會有少部分同學認真聽講。尤其大部分低學習成就的學生在學習數學的動機皆較為低弱，其中一個重要的原因，即是課程無法引起學生的學習興趣。因此，若能改變傳統講述的教學方法，提供學生另一種學習數學的方式，則學習興趣將能有所提升。

研究者在教學過程中感受到教師使用不同教學策略，對較低學習成就的學生有非常明顯的差異，顯示出「向量教具融入教學」對於「向量概念」的學習態度有顯著的提昇。由此可見，在本研究中教師使用不同教學策略，會對受試者之學習態度造成影響。

2. 本研究把向量教具融入高中平面向量的概念教學中，採用教師操作向量教具進行展示與引導,與讓學生親自操作的方式。教師先將所要教授的向量概念，經過一系列的動態畫面呈現出來，讓學生感受到具體的圖形動態視覺變化，協助觀察與記憶，使其對向量概念有較具體、深刻的理解。在課堂中，有請學生上台動手操作向量教具，籍由親自操作可強化學生對向量概念的認知，增進動態視覺化互動的機會。學生在學習過程中對於向量的相關概念較能透過具體的操作而建構，也較能提升學生正確的認知思維，並提高學習動機，使學習事半功倍。

因此，研究者認為向量教具運用在高中向量概念教學中，可發揮其動態視覺化的特性，對學生學習的注意力、理解力、記憶力，以及解題策略的應用，均有所助益，將有助發展學生的思考及提升學習成效。

二、對教學方面的建議

（一）本研究結果顯示,「向量教具融入教學」確實能提升低學業表現學生的學習成效。尤其是教師能隨意平移實體向量教具,使得此教具能讓學生感受到具體的圖形動態視覺變化。教師可以運用向量教具能隨意平移的優勢，針對不同程度學生設計符合的學習活動以增進學生的向量觀念。另外，研究者發現「向量教具融入教學」的模式較容易協助學生透過具體的操作而建構觀念，有效增進認知思維，並提高學習動機。因此，本研究建議高中教師在向量基礎概念的課程中，可以參考採用「向量教具融入教學」的方式作為教學模式。

（二）研究者詢問參與實驗組的學生在教學活動過程中的心得,大都認為操作實體教具學習數學，更能引發他們學數學的興趣。因此，本研究建議教師在使用實體教具進行教學時，可以注意以下事項。

1. 教師若想採用實體教具融入教學的模式,首先應掌握課程知識的重點，考量課程中那些概念可以善用實體教具的優勢加以呈現。因實體教具能強化學生的動態視覺化效果，因此教師需在教學前熟悉教具的操作方式，並

設計於教學過程中，才能引領學生獲得知能，以發揮其教學效果。例如：教師在操作實體教具進行教學時，可以按照教師的教學構想引導學生思考，並在觀念建構的過程中適時給予提示，誘導學生回答。或者在教學活動過程中設計讓學生能夠自行操作教具學習，使其探索發現課程中重要的概念及性質。

2. 研究者發現使用「向量教具融入教學」比「傳統講述法教學」需要較多的時間，尤其是在學生自由操弄的時間，則容易延誤事先規劃的教學進度。本研究建議在採用實體教具融入教學時，教師可以協助在台上操作教具的學生，適時給予提示，引導學生操作，以求教學時間更加完整與足夠。還可以考量不同程度學生的學習需求，再安排實體教具融入教學的適當時機，這才能發揮到有效教學的重點。

（三）從開發經驗、實際教學及學生使用心得詢問結果發現，實體教具在教學上是良好的輔助學習工具，可將其融入數學教學活動之中，透過實體教具的融入，使學習更具多元化、適性化，使學習效果更為提升。本研究選擇高中數學「平面向量」單元中的向量概念設計實體的向量教具，讓教學者與學習者皆可自行操作此教具，可使互動學習的機會增加，學習者透過動手操作的體驗更加容易了解向量概念，達到有效學習的目的。由教學實驗發現，透過向量教具的輔助，有助於提升高中數學向量概念的學習成就，建議有興趣的老師，可嘗試選擇適當課程，設計開發實體教具融入數學教學，以提升數學領域的學習效果。

（四）本研究的結果顯示，使用向量教具融入教學的模式確實可以提高教學成效，但當教師引用教具輔助教學之際，必須意識到教具是幫助其達成教學目標的工具。因教師是主導整個教學活動的主體，而主要影響學生學習的關鍵是教師搭配教具使用適宜的教學方法，因此教具搭配教法才能真正提升學生之學習成效。

總之，教師要多充實在專業方面的能力，以提昇自己的教學專業，才能給孩子最好的教育。也許這樣的改變教學模式對於教師來說是一種嘗試和負擔，但學生要是能從中提昇學習動機、態度，以及學習成就，教師應該也會認為這樣做是值得的。我們正身處於知識爆炸的時代，身為知識傳播者的教師若能跟上時代的腳步，改變自己的教學思維，以及改善傳統教學的限制，也能讓自己隨時充實新知，不僅是教師之福，也是學生之福。

三、對教材設計方面的建議

（一）研究者在教材設計的過程中，難免有些設計者不易發現不完善的地方，透過教授的批評與指導，以及同儕間的回饋，讓本研究教材更適用。因此，研究者建議未來應以團隊合作的方式，設計教材者先初步按照課程分析設計出教材，之後再透過教學觀摩與研討，及他人回饋與指教，可讓教材更完備。

（二）研究者建議教師在採用教具融入教學前，應考量其教學成效，及不同程度學生的學習需求，不應只是為了想融入教學而融入。由於數學教學的概念都不盡相同，因此教師需採用的教學策略也該有所不同，所以並不是融入教具的教學方法能適用於所有教材，有些數學概念可能需要教師多一點講解說明與示範練習，而有些則可能需要輔以實體教具多讓學生實際操作體驗，將會更有教學成效。

（三）本研究發現「向量教具融入教學」的確能提昇學生向量概念的建構。因此，本研究建議教師在向量相關課程中，可提供學生觀察向量相關概念的具體教材（如：實體教具）或虛擬教材（如：Java App），將能幫助學生提升向量相關概念的學習態度與成效。

四、對未來研究方面的建議

（一）因本研究採方便取樣，僅以桃園縣的三所高中 215 位學生為研究樣本進行教學實驗。若要將研究結果對其他地區作推論，必須更加謹慎。建議未來研究可將樣本的選取擴展到其他地區，能以城市、鄉村多所學校一同進行，擴大樣本人數進行教學實驗，以了解在不同地區的學生是否會有不同的結論，這樣才能讓研究結果產生一般性的結論。

（二）本研究以量的方法分析研究結果，然而有些變項如學生的能力、態度等等，皆易受學習環境、時空變化而有所改變，想要控制所有可能影響變項的因素，是無法幾近完善。因此若能輔以質的研究，對學生進行觀察、訪談或記錄等等，將使研究結果可獲得更詳細、更精確的解釋。

（三）研究者希望在之後的研究中，最好能實施向量概念學習成效測驗的延後測，能針對向量教具融入教學是否能提升學生的延宕學習成效，可作進一步的驗證，相信更能了解有接受向量教具融入教學的學生學習延宕效果是否較

為理想，使該教學策略之發展更趨完善。

（四）研究者建議日後為了解學習者對於不同教學策略之態度與意見，以及對於「向量教具」的反應，應於實驗教學後，即刻對進行實驗教學之兩組學生施行問卷調查，並將所蒐集到的資料利用描述性統計的方法加以說明，以作為未來對於「向量教具融入教學」的參考。

參 考 文 獻

一、中文部分

[1] 王淵智（2001）。**國小數學低成就學童分數表徵研究：以五個個案為例**。革新國民中小學數學教育議題。高雄：復文。

[2] 江淑美（1985）。高一學生的向量概念發展。**科學教育月刊，79**，16-33。

[3] 余民寧（2002）。**教育測驗與評量—成就測驗與教學評量（第二版）**。台北：心理。

[4] 吳武雄（1981）。國中學生認知發展與科學及數學課程學習之相關研究。**教育學院學報，6**，257-277。

[5] 李永貞（2008）。**高二學生在向量概念學習上的主要錯誤類型及其補救教學之研究**。國立臺灣師範大學數學系在職進修碩士班碩士論文，未出版，台北市。

[6] 林生傳（1996）。概念教學對概念發展的實驗效果一階次理論模式的概念教學實驗。**國立高雄師範大學教育學系教育學刊，12**，31-70。

[7] 林邦傑（1981）。國中及高中學生具體運思、形式運思與傳統智力之研究。**中華心理學刊，12**（2），33-49。

[8] 林宗翰、周文忠（2009）。**實體與虛擬教具於教學上之初探**。台灣教育傳播暨科技學會。2009 年 12 月國際學術研討會，銘傳大學，台灣。

[9] 林進發(2001)。**桃園地區高中學生向量內積之運算及應用錯誤類型之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄市。

[10] 林碧珍（1985）。數學概念的形成與學習。**國教世紀月刊，21**（1），1-4。

[11] 林福來、黃敏晃、呂玉琴（1996），分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。**科學教育學刊，4**（2），161-196。

[12] 林福來(1987)。**國中生反射、旋轉、平移概念發展研究**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告(編號：NSC 75-0111-S003-01，NSC76-0111-S003-12)，未出版。

[13] 林福來（1991）。數學的診斷評量。**教師天地**，**54**，32-38。

[14] 林福來（1992）。**數學學習理論之辨證**。國立台北師範學院數理教育系數學教育專題演講手冊。國立台北師範學院數理教育系。

[15] 林福來（1997）。**教學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法（1／3）**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告，未出版。

[16] 施良方（1996）。**學習理論**。高雄市：麗文文化公司。

[17] 洪郁雯，楊德清（2006）。具體表徵融入數學教學之探究。**屏東教大科學教育**，**23**，30-38。

[18] 洪素敏、楊德清（2002）。創意教學～分數的補救教學。**科學教育研究與發展季刊**，**29**，33-52。

[19] 洪素敏（2004）。**國小五年級學童分數迷思概念補救教學之研究**。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文。

[20] 徐于婷（2005）。**國小六年級學童平面幾何屬性知覺之探討**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。

[21] 張川木（1996）。促進概念改變教學法（II）。**科學教育月刊**，**186**，10-18。

[22] 張惠博（1999）。**迷思概念的研究方法**。發表於行政院國科會主辦「科學概念研究」研習會。台北市：國立台灣師範大學。

[23] 張景媛（1995）。國中生建構幾何概念之研究暨統整式合作學習的幾何教學策略效果之評估。**教育心理學報**，**28**，99-144。

[24] 教育部（2008）。**高中課程綱要（99）－ 必修數學**。台北市：教育部。
http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/MCenter/Ctrl/OpenFileContent.ashx?id=B3CTD4TD44RF8846673XCQRR3QQ4RRTH4J6H33Q3R33Q43RTT44J6832CBRD3T4D

[25] 許志農(主編)(2007)。**普通高級中學數學第三冊**。台北縣：龍騰文化。

[26] 許志農(主編)(2007)。**普通高級中學數學第三冊教師手冊**。台北縣：龍騰文化。

[27] 許紋菁(2007)。**七巧板融入國小數學教學之研究~~以四年級分數補救教學為例**。國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版。

[28] 郭生玉(1990)。**心理與教育研究法**。台北：精華書局。

[29] 郭祝武(1995)。**五專學生向量概念的錯誤分析與補救教學**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告(編號：NSC 84-2511-S252-001)。

[30] 陳俊生(1990)。高中數學實驗工具可行性之研究。**彰化師範大學學報**，**1**，349-364。

[31] 陳俊廷(2002)。**高中學生空間向量學習困難的診斷測驗工具發展研究**。國立高雄師範大學數學系碩士班碩士論文。

[32] 陳啟明(2000)。**不同題目表徵型式及相關因素對國小五年級學生解題表現之影響**。國立嘉義大學教育研究所碩士論文，未出版。

[33] 陳霈頡、楊德清(2005)。數學表徵應用在教學上的探究。**科學教育研究與發展**，**40**，48-61。

[34] 陳澤民譯(Skemp, R. R. 著)(1987)。**數學學習心理學**。台北：九章。

[35] 陳耀茂，石村貞夫(2005)。**統計分析的 SPSS 使用手冊(第一版)**。台北：鼎茂圖書。

[36] 章建躍，陶維林(2010)。概念教學必須體現概念的形成過程—「平面向量的概念」的教學與反思。**數學通報**，**1**。

[37] 游自達(1995)。數學學習與理解之內涵－從心理學觀點分析。**初等教育研究集刊**，**3**，31-45。

[38] 黃永和(1997)。「教學表徵」－教師的教學法寶。**國教世紀**，**178**，17-24。

[39] 黃芳玉(2003)。**國小六年級學生數學表徵能力與計算能力之研究**。國立嘉

義大學數學教育研究所碩士論文，未出版。

[40] 黃家鳴（1997）。淺談數學概念表象在數學教學上的一些問題（上）。**香港數學教育學會刊物，5**。

[41] 楊弢亮（1982）。**中學數學教學法通論**。台北：九章。

[42] 楊瑞智（1994）。**國小五六年級不同能力學童數學解題的思考過程**。國立台灣師範大學科學教育研究所博士論文，未出版。

[43] 楊德清（2000）。數學教具與教學。**科學教育研究與發展季刊，20**，47-52。

[44] 葉安琦（2000）。**促進國小學童創造性問題解決能力的個案研究－發展問題表徵**。國立高雄師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版。

[45] 廖秀桔（2010）。**以「發展解題能力教學模式」探索國小二年級學童乘法概念之行動研究**。朝陽科技大學幼兒保育系碩士論文，台中縣。

[46] 劉秋木（1996）。**國小數學科教學研究**。台北：五南。

[47] 劉秋木譯（Davis , R. B. 著）（1990）。**數學學習**。台北：五南。

[48] 蔣治邦（1994）。**由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計**。載於臺灣省國民教師研習會主編：國民小學數學科新課程概說(低年級)，60-76。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。

[49] 蔡宜芳，楊德清（2007）。數學表徵融入數學教學之經驗分享。**台灣數學教師電子期刊，9**，26-35。

[50] 蔡承哲（1996）。**高雄地區高二學生空間向量之解題歷程分析研究**。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版。

[51] 鄭昭明（1993）。**認知心理學：理論與實踐**。台北：桂冠。

[52] 鄭英豪（1999）。**學生教師數學教學概念的學習：以「概念啟蒙例」的教學概念為例**。國立台灣師範大學數學研究所博士論文。

[53] 鄭惟厚、單維彰（2011）。**高級中學數學第三冊**。台北市：三民書局。

[54] 鄭惟厚、單維彰（2011）。**高級中學數學第三冊教師手冊**。台北市：三民書

局。

[55] 鄭毓信（1998)。**數學教育哲學**。台北：九章。

[56] 鄭麗玉（2000)。**認知與教學**。台北：五南。

[57] 謝青龍（1995)。從「迷失概念」到「另有架構」的概念改變。**科學教育月刊**，**180**，3-29。

[58] 鍾聖校（1994)。不同教學法對錯誤概念修正的影響。**台北市立師範學院學報**，**7**，169-204。

[59] 鍾聖校（1994)。對科學教育錯誤概念研究之省思。**教育研究資訊**，**2**（3），89-110。

[60] 羅素真（1996)。問題表徵與問題解決。**國立屏東師院學報**，**9**，149-176。

[61] 蘇明俊、洪振方（2007)。**科學實習教師專業成長：教具的運用**。
http://best-pdm.blogspot.tw/2007/04/blog-post_11.html

二、英文部分

[1] Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.92-126). London, England: Academic Press.

[2] Behr., Wachsmuch. & Post. (1984). Order and Equivalence of rational numbers : A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15* (5), 323-341.

[3] Behr., Wachsmuch. & Post. (1985). Construct a sum : A measure of children’ s understanding of fracation size. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16* (2), 120-131.

[4] Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1977). Learning by understanding : The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, *34*, 663-689.

[5] Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z. & Zimmer, J. M. (1999). Cross-national comparison of representational competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30* (5), 541-547.

[6] Bruner, J. S., Goodnow, J. J., & Austin, G. A. (1956). *A study of thinking*. New York: Wiley.

[7] Bruner. J. S. (1966).*Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University.

[8] Cai, J. (2001). Improving mathematics learning: Lessons from cross-national studies of u.s and chinese students. *Phi Delta Kappan*, *82* (5), 400-405.

[9] Cifarelli, V.V. (1998). The development of mental representation as a problem solving activity. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*, 239-264.

[10] Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.420-464). New York：Macmillan Publishing Company.

[11] Cramer K. A., Post T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students : a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33* (2), 111-144.

[12] Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist to representational view of mind in mathematics education , *Journal for Research in Mathematical Education*, *123* (1), 2-33.

[13] Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics : The Cognitive Science approach to mathematics education*. Norwood, New Jersy : Ablex Publishing Corporation.

[14] Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J.Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.). *The nature of mathematical thinking* (pp.253-284). Mahwah, NJ : Erlbaum.

[15] Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

[16] English, L. & Halford, G. (1995). *Mathematics education: Models and processes.* Mahwah, NJ: Lawerence Erlbaum.

[17] Fennell, F. & Rowan, T. (2001). Representation : An Important Process for Teaching and Learning Mathematics. *Teaching Children Mathematics (January)*, 288-292.

[18] Greeno, J.G. (1987). Instructional Representations Based on Research about Understanding. In A.H.Schoenfeld (Ed.). *Cognitive Science and Mathematics*

Education (pp.1-31). Hillsdale, NJ：Lawrence Erlbaum Associates.

[19] Greeno, J. G. & Roger, B. H. (1997). Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms. *Phi Delta Kappan* ,*79*, 361-367.

[20] Heddens, J. W. (1984). *Today’s Mathematics*. 5thed. Chicago : Science Research Associates.

[21] Henderson, K. B. (1970). Concepts. In M. F. Rosskopf (Ed.). *The teaching of secondary school mathematics*, Thirty－third Yearbook of the National Council of Teacher of mathematics. Washington, D.C.: NCTM.

[22] Hiebert J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A.Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York : Macmillan.

[23] Hiebert, J. & Wearne, D. (1988). Instruction and cognitive change in mathematics. *Educational Psychologist*, *23* (2), 105-117.

[24] Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.). *Problem of representation in teaching and learning of mathematics* (pp.4l-58). Hillsdale, NJ : Erlbaum.

[25] Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ：Lawrence Erlbaum.

[26] Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Consideration for identification, diagnosis, and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. G.Kantowski (Eds.). *Applied mathematics problem solving* (pp.235-264) Columbus.

[27] Mayer, R. E. (1985). *Educational psychology：Cognition approach*. New York：Freeman.

[28] Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York : Freeman.

[29] Moyer, P. S., & Jones, M. G. (2004), Controlling choice : Teacher, student, and manipulatives in mathematics classroom. *School Science and Mathematics,104* (1),16-31.

[30] National Council of Teachers of Mathematics (1989).*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA : NCTM.

[31] National Council of Teachers of Mathematics (2000).*The principles and standards for school mathematics, Reston* , VA : NCTM.

[32] Parham, J. L. (1983). *A meta-analysis of the use of manipulative materials and student achievement in elementary school mathematics.*Auburn University .

[33] Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child*. New York : Basic Books.

[34] Piaget, J. (1971). *Biology and Knowledge*. Chicago : University of Chicago Press.

[35] Piaget, J. (1977). Problems in equilibration. In M. Apple & S. Goldberg (Eds.), Topics in cognitive development: Vol. Ⅰ. *Equilibration: Theory, research, and application* (pp.3-13). New York : Plenum.

[36] Posner, G. J., Strike, K.A., Hewson, P. W., and Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception : toward a theory of conceptual change. *Science Education*, *66* (2), 211-227.

[37] Rosch, E. (1977). Human categorization, In N. Warren (Ed.), *Advances in Cross-cultural Psychology,1*. London: Academic Press.

[38] Rowan, T. E., Payne, J. N., & Towsley, A. E. (1990). Implementing the standards : Implica-tions of NCTM' s standards for teaching fractions and decimals. *Arithmetic Teacher*, *37* (8), 23-26.

[39] Sowder, L. K. (1980). Concept and principle learning. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 215-233). Reston VA: National Council

of Teachers of Mathematics.

[40] Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

[41] Tall, D. (1988). Concept image and concept definition. In Jan de Lange, Michiel Doorman (Eds.). *Senior Secondary Mathematics Education* (pp.37-41), OW& OC Utrecht.

[42] Witzel, B. S. (2005). Using CRA to teach algebra to students with math difficulties in inclusive settings. *Learning Disabilities : A Contemporary Journal 3,150* (2),49-60.

[43] Yerushalmy, M.（1997）. Designing representations : Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 431-466.

附　錄

【附錄一】第一堂課教學活動

A. 教案設計

<table>
<tr><td>教學單元</td><td colspan="2">平面向量的概念</td><td>教學時間</td><td colspan="2">45 分鐘</td></tr>
<tr><td>教學設計者</td><td colspan="2">黃楷文</td><td>教學對象</td><td colspan="2">高中二年級社會組學生</td></tr>
<tr><td rowspan="2">教學場域</td><td>實驗組</td><td>班級教室</td><td rowspan="2">教學資源</td><td>實驗組</td><td>向量教具、板書、向量概念成效測驗 A 卷</td></tr>
<tr><td>控制組</td><td>班級教室</td><td>控制組</td><td>板書、向量概念成效測驗 A 卷</td></tr>
<tr><td>教學目標</td><td colspan="5">1. 認識向量的定義。
2. 能判別及使用符號表示向量。
3. 能判別及畫出圖形表示向量。
4. 能了解向量相等的意義。
5. 能判別兩向量是否相等。
6. 能運用向量相等的概念作向量平移。
7. 能了解向量與它所在的位置無關。
8. 認識反向量的定義。
9. 能判別及使用符號表示反向量。
10. 能判別及畫出圖形表示反向量。
11. 能了解向量係數積的意義。
12. 能判別及使用符號表示向量係數積。
13. 能判別及畫出圖形表示向量係數積。
14. 能了解向量加法的意義。
15. 能使用向量平移的方式作向量加法運算。</td></tr>
</table>

	16. 能了解向量減法的意義。 17. 能運用反向量的概念，及使用向量平移的方式作向量減法運算。

教學活動流程			
活動名稱	實驗組	控制組	時間
(一)向量的定義			10分
第一部分 認識「向量」	教師先放置一個代表線段的教具在黑板上，接著在此線段的其中一端放上一個代表箭頭的教具，這就是「向量」的具體表徵。	教師先在黑板上畫出一條線段，接著在此線段的其中一端畫上一個箭頭，這就是「向量」的圖形表徵。	
第二部分 向量的圖形與符號表示法	教師放置一個向量教具在黑板上，介紹向量的起始點與終點，再把實體向量拿下來，畫出向量的圖形表示法，並寫出向量的符號表示法。	教師先在黑板上畫出一個向量圖形，這就是向量的圖形表示法，再介紹向量的起始點與終點，並寫出向量的符號表示法。	
第三部分 認識「零向量」	教師說明形成零向量的條件，並畫出零向量的圖形表示法，及寫出零向量的符號表示法。	教師說明形成零向量的條件，並畫出零向量的圖形表示法，及寫出零向量的符號表示法。	
第四部分 向量相等的	1. 教師先放置一個向量教具在黑板上，另外再放置三個	1. 教師先在黑板上畫出一個向量，另外再畫出三個向	

概念	向量教具，接著引導學生觀察找出相等的向量。 2. 教師說明如何使用符號表示相等的向量，操作平移向量教具呈現向量相等的概念，並推論出向量與它的位置無關。 3. 教師說明所有的零向量皆相等的原因。	量，接著引導學生觀察找出相等的向量。 2. 教師說明如何使用符號表示相等的向量，以及向量相等的概念，再推論向量與它的位置無關。 3. 教師說明所有的零向量皆相等的原因。	
(二)反向量的意義	教師放置兩個長度相同，但方向相反的向量教具在黑板上，並說明反向量的符號表示法。	教師畫出兩個長度相同，但方向相反的向量在黑板上，並說明反向量的符號表示法。	2 分
(三)向量的係數積	教師先放置一個向量教具在黑板上，對此教具作連結與拆解，引導學生觀察它的長度變化情形，另外還有介紹反向量的狀況，並分別畫出它們的圖形表示法，及寫出符號表示法。	教師在黑板上畫出向量的連結與拆解，引導學生觀察它的長度變化情形，另外還有介紹反向量的狀況，並分別畫出它們的圖形表示法，及寫出符號表示法。	3 分
(四)向量的加法	教師放置兩個向量教具在黑板上，說明向量加法的運算方式，是先選定起始點，再把其中一個向量教具平移到起始點，接著再平移另一個，使得兩教具頭尾相接，最後畫出結果向量。	教師先在黑板上畫出兩個向量，說明向量加法的運算方式，是先選定起始點，再把其中一個向量平移到起始點，接著再平移另一個，使得兩向量頭尾相接，最後畫出結果向量。	3 分

（五）向量的減法	教師放置兩個向量教具在黑板上，介紹向量減法的運算原則，就是把要被減的向量看作是加上此向量的反向量，接著放置此向量的反向量教具在黑板上，說明最後使用向量加法的運算方式，即可畫出結果向量。	教師先在黑板上畫出兩個向量，介紹向量減法的運算原則，就是把要被減的向量看作是加上此向量的反向量，再畫出此向量的反向量在黑板上，說明最後使用向量加法的運算方式，即可畫出結果向量。	2 分
（六）向量加減法的練習	1. 老師使用向量教具示範一題兩向量的加法運算，在過程中分別選定四個不同點作為起始點，主要為了觀察向量加法運算與起始點的位置無關，不論起始點的位置在哪裡，最後所得的結果向量皆相同。並藉此說明在作向量加法運算時可任意選擇起始點的位置。 2. 邀請學生自行操作教具做一題兩向量的加法運算。 3. 老師使用向量教具示範一題兩向量的減法運算，在過程中說明先把要被減的向量看作是加上此向量的反向量，接著使用向量加法的	1. 老師使用在黑板上傳統的書寫及畫圖方式，示範一題兩向量的加法運算，在過程中分別選定四個不同點作為起始點，主要為了觀察向量加法運算與起始點的位置無關，不論起始點的位置在哪裡，最後所得的結果向量皆相同。並藉此說明在作向量加法運算時可任意選擇起始點的位置。 2. 邀請學生使用傳統的書寫及畫圖方式，做一題兩向量的加法運算。 3. 老師使用在黑板上傳統的書寫及畫圖方式，示範一題兩向量的減法運算，在過程	10分

	運算方式，求得結果向量。 4. 邀請學生自行操作教具做一題兩向量的減法運算。	中說明先把要被減的向量看作是加上此向量的反向量，接著使用向量加法的運算方式，求得結果向量。 4. 邀請學生使用傳統的書寫及畫圖方式，做一題兩向量的減法運算。	
(七)施測	實施向量概念成效測驗 A 卷	實施向量概念成效測驗 A 卷	15分

B. 課程教案的簡報檔

參見以下連結

http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/mathedu/kevin/planA.pdf

C. 部分的教學活動影片

參見以下連結

http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/mathedu/kevin/

【附錄二】第二堂課教學活動

A. 教案設計

<table>
<tr><td>教學單元</td><td colspan="2">平面向量的概念</td><td>教學時間</td><td colspan="2">45 分鐘</td></tr>
<tr><td>教學設計者</td><td colspan="2">黃楷文</td><td>教學對象</td><td colspan="2">高中二年級社會組學生</td></tr>
<tr><td rowspan="2">教學場域</td><td>實驗組</td><td>班級教室</td><td rowspan="2">教學資源</td><td>實驗組</td><td>向量教具、板書、向量概念成效測驗 B 卷</td></tr>
<tr><td>控制組</td><td>班級教室</td><td>控制組</td><td>板書、向量概念成效測驗 B 卷</td></tr>
<tr><td>教學目標</td><td colspan="5">1. 能了解向量的結合律、交換律的意義。
2. 能運用向量的結合律、交換律化簡運算。
3. 能了解向量的運算與其順序無關。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">教學活動流程</th></tr>
<tr><td>活動名稱</td><td>實驗組</td><td>控制組</td><td>時間</td></tr>
<tr><td>(一)向量加法的交換律</td><td>教師放置兩個向量教具在黑板上，先作兩向量的加法運算，即畫出結果向量。接著交換兩向量的相加順序，並使用相同的起始點作加法，最後得到相同的結果向量，說明向量的加法與先後順序無關。</td><td>教師先在黑板上畫出兩個向量，先作兩向量的加法運算，即畫出結果向量。接著交換兩向量的相加順序，並使用相同的起始點作加法，最後得到相同的結果向量，說明向量的加法與先後順序無關。</td><td>3 分</td></tr>
</table>

(二)用「平行四邊形法」作向量加法	教師引導學生觀察剛才在黑板上的圖形，發現它是一個平行四邊形，再說明如何用「平行四邊形法」作兩向量的加法運算。	教師引導學生觀察剛才在黑板上的圖形，發現它是一個平行四邊形，再說明如何用「平行四邊形法」作兩向量的加法運算。	2 分
(三)向量加法的結合律	1. 教師放置三個向量教具在黑板上，並操作教具展現向量加法的結合律，並引導學生了解向量加法的交換律與結合律，是造成三個向量相加的結果與它們的先後順序無關的原因。 2. 教師說明推廣到三個以上向量相加的結果，也與它們的先後順序無關。 3. 同時邀請兩位學生自行操作教具做一題四個向量的加法運算，並分別指定不同的先後順序作加法，最後帶領學生觀察相加的結果是否相同。	1. 教師先在黑板上畫出三個向量，介紹向量加法的結合律，並引導學生了解向量加法的交換律與結合律，是造成三個向量相加的結果與它們的先後順序無關的原因。 2. 教師說明推廣到三個以上向量相加的結果，也與它們的先後順序無關。 3. 同時邀請兩位學生使用傳統的書寫及畫圖方式，做一題四個向量的加法運算，並分別指定不同的先後順序作加法，最後帶領學生觀察相加的結果是否相同。	12分

(四)向量加法交換律、結合律的練習	1. 老師使用向量教具示範一題三個向量的加減綜合運算，在過程中運用到向量加法的交換律、結合律。 2. 分別邀請兩位學生自行操作教具各做一題三個與四個向量的加減綜合運算。	1. 老師使用傳統的書寫及畫圖方式，示範一題三個向量的加減綜合運算，在過程中運用到向量加法的交換律、結合律。 2. 分別邀請兩位學生使用傳統的書寫及畫圖方式，各做一題三個與四個向量的加減綜合運算。	8 分
(五)向量分解的練習	1. 老師使用向量教具示範如何用兩個向量來表示另一個向量。 2. 邀請一位學生自行操作教具做一題向量分解的練習題。	1. 老師使用傳統的書寫及畫圖方式，示範如何用兩個向量來表示另一個向量。 2. 邀請一位學生使用傳統的書寫及畫圖方式，做一題向量分解的練習題。	5 分
(六)施測	實施向量概念成效測驗 B 卷	實施向量概念成效測驗 B 卷	15分

B. 課程教案的簡報檔

參見以下網址

http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/mathedu/kevin/planB.pdf

C. 部分的教學活動影片

參見以下連結

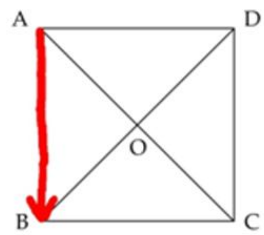
http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/mathedu/kevin/

【附錄三】向量概念成效測驗 A 卷

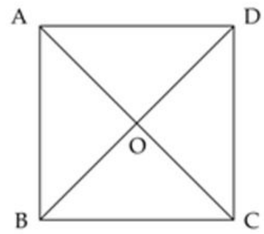
卷 A

1. (填充題) 如圖， O 為正方形 ABCD 對角線的交點。請用A、B、C、D形成的向量回答下列各題，並在右圖中畫出答案向量。

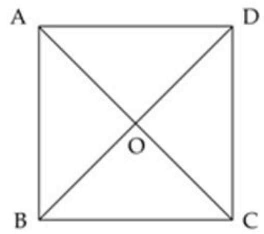
例如： $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=$ $\underline{\overrightarrow{AB}}$



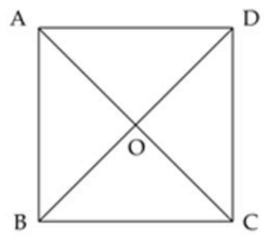
(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$ ______



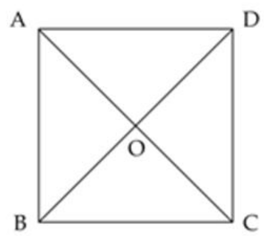
(2) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=$ ______



(3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$ ______



(4) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=$ ______

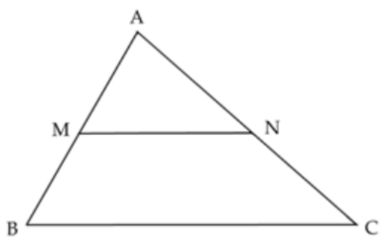


2. (多選題) 如圖，$\triangle ABC$ 中， M、N 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，下列選項哪些正確？

(1) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NC}$

(3) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{MB}$

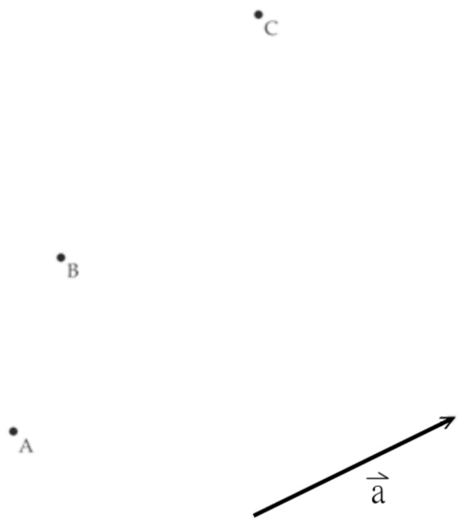


3. 請在下圖中，畫出下列各題指定的向量：

(1) 畫出 $2\overrightarrow{a}$ (以 A 點爲起始點)

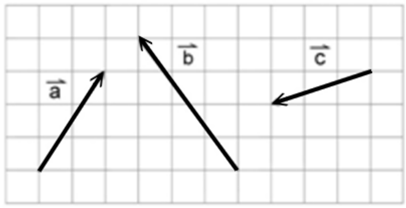
(2) 畫出 $\frac{2}{3}\overrightarrow{a}$ (以 B 點爲起始點)

(3) 畫出 $-\frac{5}{3}\overrightarrow{a}$ (以 C 點爲起始點)



【附錄四】向量概念成效測驗 B 卷

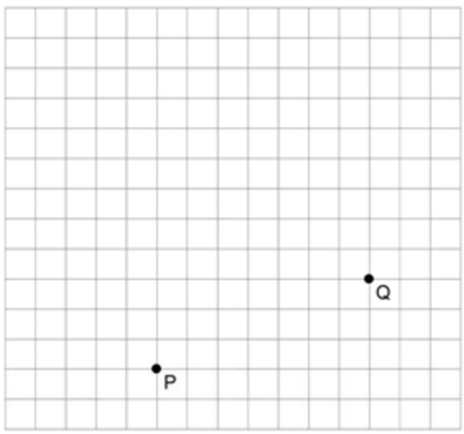
卷 B

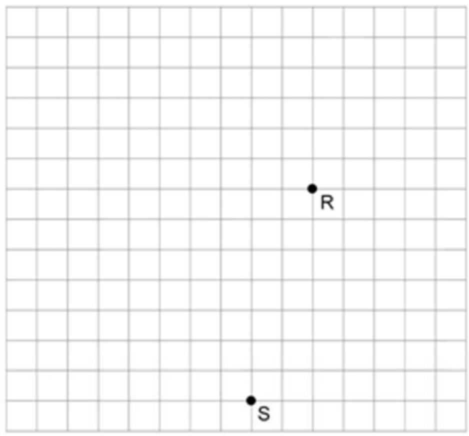


1. 如右圖，有三個向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$。

   (1) 在下面左側的方格圖中，先以 P 點爲起始點畫出 $\vec{a}+\vec{b}$，
   再以 Q 點爲起始點畫出 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$。

   (2) 在下面右側的方格圖中，先以 R 點爲起始點畫出 $\vec{b}+\vec{c}$，
   再以 S 點爲起始點畫出 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$。

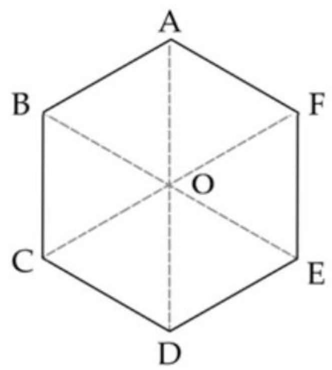




   (3) 上面兩個方格圖中，以 Q 點、S 點爲起始點的兩個向量是否相等？爲什麼？

2. 右圖爲一個正六邊形 ABCDEF ，連連看，把下面左右兩行相等的向量連起來。

(1) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ ●	● $2\overrightarrow{DC}$
(2) $\overrightarrow{EB}$ ●	● $\overrightarrow{FD}$
(3) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}$ ●	● $\overrightarrow{CO}$
(4) $\overrightarrow{BC}$ ●	● $\overrightarrow{DF}$
(5) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$ ●	● $\overrightarrow{AO}$
	● $2\overrightarrow{AF}$
	● $\overrightarrow{FC}$

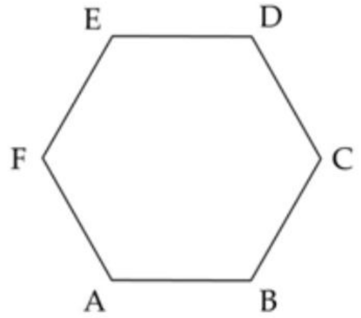


3. (單選題) 在正六邊形 ABCDEF 中，下列選項哪一個正確？

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EA}$

(2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}$

(3) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD}$



4. (單選題) 如右圖，下列哪一個選項正確？

(提示：建議先算出 $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}$)

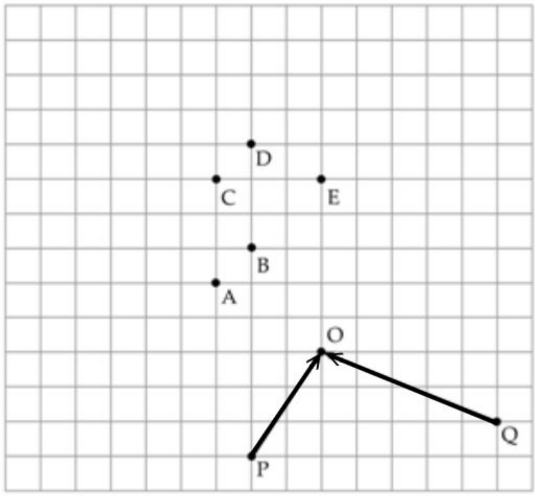
(1) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}=\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}=\vec{0}$

(3) $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}=\vec{0}$

(4) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}=\vec{0}$

(5) $\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}=\vec{0}$



5. (填充題) 在正六邊形 ABCDEF 中，令 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AF}$，

試以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示下列各向量，例如：$\overrightarrow{AO}=\vec{a}+\vec{b}$。

(1) $\overrightarrow{AD}=$ ____________

(2) $\overrightarrow{CB}=$ ____________

(3) $\overrightarrow{DF}=$ ____________