

國立中央大學

數學研究所

碩士論文

影像放大與直脊函數

研究生：秦芷翎

指導教授：單維彰博士

中華民國九十一年六月廿八日

摘要

對於數位訊號的處理，離散凌波轉換提供了完整的理論與方法。但是在電腦實做的時候，離散凌波轉換卻有一點小小的缺點，所以在 [1] 中提出了週期化的演算法，然而，我們也利用了一點小技巧，找到了一個新的演算法——`nilup` 來做影像放大。同時，在一維訊號合成的實驗中，我們發覺離散凌波轉換竟然會有類似超射現象發生，這是我們所不願見到的，但是試了幾種方法後卻還是避免不了，這個問題有待我們去解決。

同時，我們知道凌波轉換對於 `point singularities` 的表現是無庸置疑的，甚至連計算量 $O(N)$ 都略勝於快速傅立葉轉換的 $O(N \log N)$ ，但是 `point singularities` 只是眾多 `singularities` 的冰山一角，而且很明顯的，凌波轉換在二維影像的邊 (`edge`) 上確實表現不佳。對於這個問題 Donoho 提出了直脊函數 (`ridgelets`) 的想法，以針砭凌波轉換之不足。所以在第二章裡，我們取經於 Donoho，以解決我們的第二個問題。

`nilup` 在一維訊號處理上，算是令人滿意，然而對於二維訊號處理，我們用同樣的理論，先計算列向量後，再計算行向量，這個程式就寫在 `nilup2d.m` 檔案裡。然而，因為凌波轉換在邊上的處理本來就是先天不足，所以我們要引用 `ridgelets` 來改善這個問題，但是在這之前，必須先解決超射現象所帶來的麻煩，於是我們採用了 `Difference Wavelets`。所以在第三章裡我們要將要超射現象的問題，探討 `nilup2d` 在邊上的敗筆，以及 `ridgelets` 是否真能解決這個問題。

誌謝

論文的開始與結束，有冒險的成分，有中獎的快感，更多的是無以名狀的挫折。在這場精神消耗戰中，感謝一直指引我的單維彰老師，謝謝他不厭其煩的教導，讓我很紮實的完成這篇論文。

其次，謝謝我的家人與朋友，雖然整篇論文大概你們只看這一頁。謝謝你們時時的關心與體諒，尤其當我沮喪時，能夠適時的鼓勵我，每一句加油聲，對我都受益無窮，但是，請你們原諒，我不能巨細靡遺的列出這份感謝名單，因為我該感謝的人太多太多了，不管遺漏了哪一個對我而言都是一份愧疚，我想一切盡在不言中吧，有你們的支持，我是幸運的。

目錄

第一章 影像放大	1
1-1 離散凌波轉換與週期化方法	1
1-2 靠近邊界的插值處理	4
第二章 直脊函數	14
2-1 傅立葉轉換	14
2-2 Lemarié 的自格函數與 Meyer 的凌波函數	18
2-3 Radon 轉換	27
2-4 Radon Space 及它的基底	29
2-5 Radon space and Ridgelets	32
第三章 二維影像實驗	37
3-1 nilup 2D 實驗	37
3-2 Ridgelets 的數值實驗	45
參考書目	63

第一章 影像放大

對於數位訊號的處理，離散凌波轉換提供了完整的理論與方法。但是在電腦實做的時候，離散凌波轉換卻有一點小小的缺點，所以在 [1] 中提出了週期化的演算法，然而，我們也利用了一點小技巧，找到了一個新的演算法來做影像放大。同時，在一維訊號的實驗中，我們發覺離散凌波轉換竟然會有類似超射現象發生，這是我們所不願見到的，但是試了幾種方法後卻還是避免不了。

1.1 離散凌波轉換與週期化方法

在這一節中，我們要用向量與矩陣的運算來表達離散傅立葉轉換，並且介紹週期化方法。

令一數位訊號

$$v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

$N = 2^j$, $j \in \mathbb{N}$ 。將 v 做離散凌波轉換，則 $v \in V_j$ 被分解成

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix}_{\frac{N}{2} \times 1} \quad \text{和} \quad w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix}_{\frac{N}{2} \times 1}$$

且 $u \in V_{j-1}$, $w \in W_{j-1}$ 。分解的動作相當於兩個矩陣相乘

$$u = Lv$$

$$w = Hv$$

H 稱做高頻濾波器 (high-pass filter), L 稱做低頻濾波器 (low-pass filter), 所以凌波矩陣就是

$$W = \begin{pmatrix} L \\ H \end{pmatrix}_{N \times N}$$

故分解的過程相當於

$$Wv = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

1.2 靠近邊界的插值處理

現在我們捨棄了 [1] 提供的兩種方法，另外推導一個新的演算法來做訊號的合成，並且解決靠近邊界的合成問題。相較於週期化的合成，原則上，新的演算法也必須在低頻與高頻各增加兩個元素，而我們的技巧則是採用函數插值，先模擬函數 $g(x)$ ，該函數滿足 $v_k = \langle g(x), \phi(x-k) \rangle$ ，然後利用 $g(x)$ 來計算 v_{-1} 和 v_{-2} ，再將這兩個元素加入原來的低頻裡；高頻則增加兩個零，最後還是選擇離散凌波轉換來合成。下面就是演算法的大略說明：

首先，針對非邊界的訊號，我們還是採用離散凌波轉換合成，並沒有做其它特別的處理，討論的重心還是放在邊界的部分。假設我們收到了一組數位訊號 $v_k, k = 0, 1, \dots, N-1$ ，為了計算的方便，我們假設有一個函數 $g(x)$ ，使得

$$v_k = \langle g(x), \phi(x-k+1) \rangle \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

我們要利用這組訊號，把函數 $g(x)$ 找出來。為了讓插值可以保持二次多項式，假設 $g(x)$ 在 $x=0$ 附近為二次函數，故 $g(x) = ax^2 + bx + c$ ， a 、 b 、 c 為未知數。以下，用 v_0 、 v_1 、 v_2 來求解 a 、 b 、 c 。

令 ϕ 的 m 次動量 (mth moment) 為

$$M_k = \int x^k \phi(x) dx$$

則：

$$\begin{aligned} g_{-1} &= \langle g, \phi(x+1) \rangle = \langle g(x-1), \phi(x) \rangle \\ &= \int [a(x-1)^2 + b(x-1) + c] \phi(x) dx \\ &= aM_2 + (-2a + b)M_1 + (a - b + c) \\ &= v_0 \\ g_0 &= \langle g, \phi(x) \rangle = \int (ax^2 + bx + c) \phi(x) dx \\ &= aM_2 + bM_1 + c \\ &= v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= \langle g, \phi(x-1) \rangle = \langle g(x+1), \phi(x) \rangle \\
&= \int [a(x+1)^2 + b(x+1) + c] \phi(x) dx \\
&= aM_2 + (2a+b)M_1 + (a+b+c) \\
&= v_2
\end{aligned}$$

由於我們假設 $p = 3$ ，所以 $M_2 \approx 0.6681$ ， $M_1 \approx 0.8174$ ，這兩個數據可用 [1] 所附錄的 `getb.m` 求得。利用以上三個式子解聯立方程式就可以得到：

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}[2(v_2 - v_1) - v_2 + v_0] \\
b &= \frac{1}{2}(v_2 - v_0) - 2aM_1 \\
c &= v_1 - aM_2 - bM_1
\end{aligned}$$

這樣 $g(x)$ 就被我們“模擬”出來了。接下來的工作就是把函數 $g(x)$ 代入

$$\begin{aligned}
v_{-1} &= g_{-2} = \langle g(x), \phi(x+2) \rangle \\
v_{-2} &= g_{-3} = \langle g(x), \phi(x+3) \rangle
\end{aligned}$$

如此一來，我們的訊號資料多了兩筆

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_{-2} \\ v_{-1} \\ v_0 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix}_{(N+2) \times 1}$$

最後，將 $\tilde{\mathbf{v}}$ 代入低頻中。而高頻我們假設全為零，也就是令 $\tilde{\mathbf{u}}$ 是 $(N+2) \times 1$ 的零向量。而由 Daubechies 的 p 階正交凌波函數可知

$$\int x^m \psi(x) dx = 0, \quad \text{for } 0 \leq m \leq 2$$

因此，如果函數 $g(x)$ 是二次或線性多項式，則令高頻全為零，放大後依然會保持二次或線性多項式；但如果函數 $g(x)$ 是三次以上的方程式，則令高頻全為零的話，放大後的結果僅能算是逼近而已，畢竟我們無法得知 $g(x)$ 是一個什麼樣的方程式。

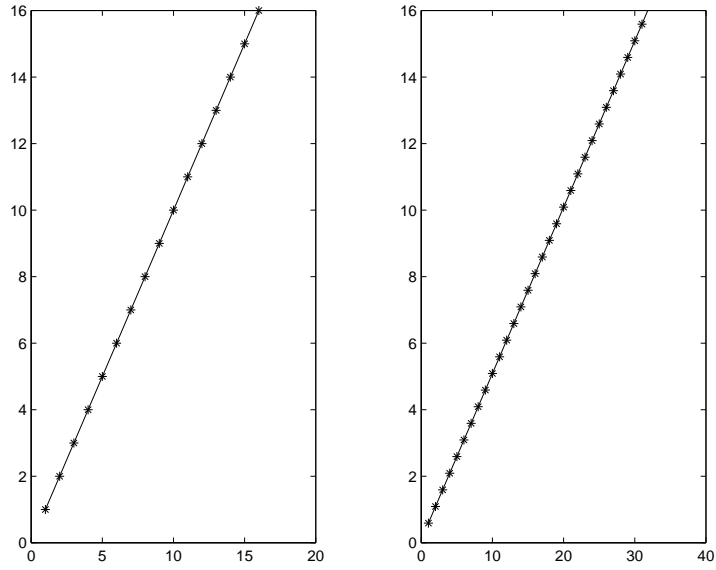


Figure 1 $f(x) = x$

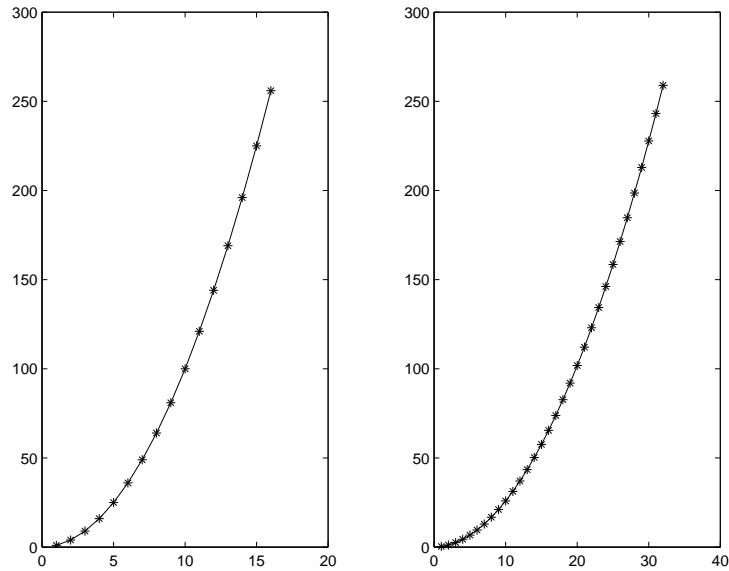


Figure 2 $f(x) = x^2$

接下來以 $f(x) = x^2$ 為例，來比較 `nilup` 演算法和線性內插 (`linear`) 及三階內插 (`cubic`) 的計算複雜度 (`computational complexity`) (Table 1)。在這裡我們選擇 Matlab 5.2 版的 `flops` 指令，因為 `flops` 定義每兩個浮點數之間做一次相加或相乘，就是一個 `flop`，這個定義較簡單。同時，我們也比較三者的相對均值誤差 (`relative mean error`) (Table 2)。

Operation Count

N	32	64	128	256	512
linear	769	1537	3073	6145	12289
cubic	2040	4088	8184	16376	32760
nilup	899	1731	3395	6723	13379

Table 1

Relative Mean Error

N	32	64	128	256	512
linear	0.37%	0.19%	0.10%	0.05%	0.02%
cubic	0.38%	0.19%	0.10%	0.05%	0.02%
nilup	0.73%	0.37%	0.19%	0.09%	0.05%

Table 2

相對均值誤差的計算方式：

$$\frac{|\text{合成後的平均值} - \text{原訊號的平均值}|}{\text{原訊號的平均值}}$$

從 Table 2 中，不難發現我們的演算法誤差較大，最主要是因為內插法合成後有一半的訊號跟原來的一樣，所以誤差會比較小；而 **nilup** 做了一次合成後訊號值變成 $\langle g(x), \phi(2x - k) \rangle$ ，而 $\langle g(x), \phi(x - k) \rangle \neq \langle g(x), \phi(2x - k) \rangle$ ，因此造成誤差。此外，也因為這個原因使得訊號發生了平移的現象 (Figure 3)。產生訊號平移有兩個原因，其一就是因為合成後的訊號值和原來的訊號值不一樣，但是相去不遠；其二，就是因為我們模擬了左邊邊界的訊號，使得 $\text{supp } \phi(x)$ 向左平移。為了清楚地看到平移的現象，我們在 Figure 3 中，把合成後訊號的第二個元素和原來訊號的第一個元素疊在一起，就可以明顯看到兩者之間的些許差異。

我們再做一個有趣的實驗，因為內插法是在點與點之間再增加一個點，所以 N 點的訊號經過內插法後，就變成 $2N - 1$ 個點，但是 **nilup** 卻是將 N 個點變成 $2N$ 個點，這樣的設計似乎比較合理，但是多了一個點是否會影響相對誤差值的大小？所以現在我們將 **nilup** 合成後的第一個點去掉，然後再與內插法比較相對誤差值 (Table 3)。這個結果令人出乎意料，**nilup** 的相對誤差值比內插法小，而且隨著 N 的漸增，兩者的差距就越大，至此，我們真正感受到 **nilup** 合成後的第一個點帶給我們多大的傷害。

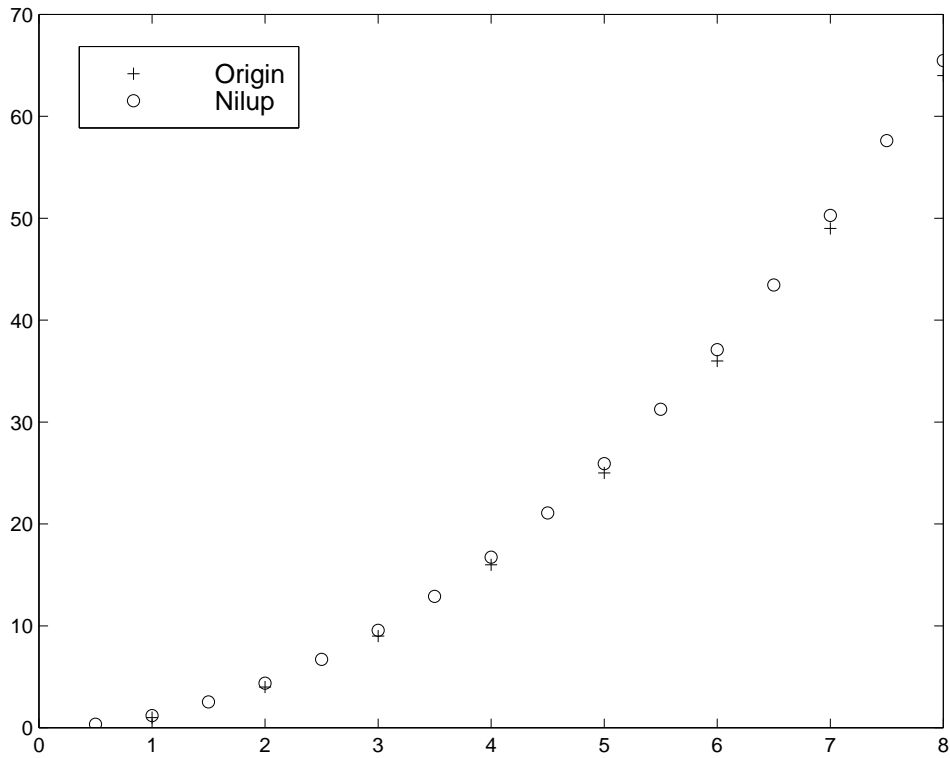


Figure 3

Relative Mean for 2N-1 Points

N	32	64	128	256	512
linear	0.367%	0.189%	0.096%	0.048%	0.024%
cubic	0.376%	0.191%	0.097%	0.049%	0.024%
nilup	0.050%	0.022%	0.010%	0.005%	0.002%

Table 3

繼續再做個測試，我們隨意地從自然圖片中取出一列向量來合成 (Figure 4)，可以發現放大後的情況不像二次函數那麼好，但雖不中亦不遠矣！另外，還有一個發現，就是在數值劇烈變化的附近發生了類似 Gibbs 的超射現象 (標示於 Figure 4 中畫 'o' 的點)。以這個例子而言，超射現象所產生的影響有兩個，先是在圖中大約第 5 點到第 14 點的附近，它會使得我們合成後的訊號反差增加，這也許是可以接受的效果。但在第 15 點的地方 (標示為 *) 發生的超射現象卻令人擔心，似乎在預告著即將在二維的實驗中面臨 linear singularities 產生的問題，也就是說，在有邊 (edge) 出現的地方，也會伴隨著「鬼影」出現。詳細情況我們會在二維實驗中說明。

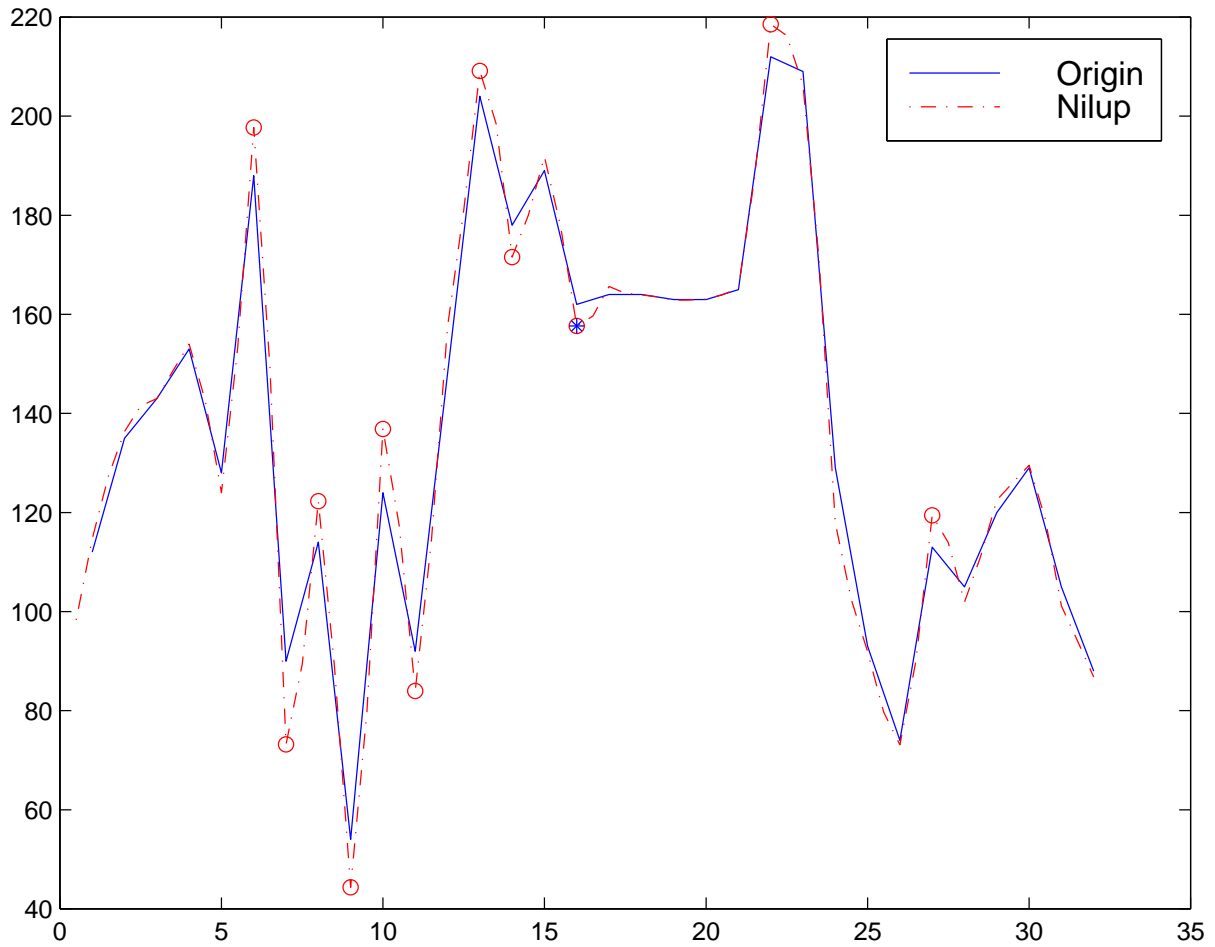


Figure 4

爲了減緩超射的問題，我們曾試著在高頻上“動點手脚”，希望在低頻全部不改變的情況下，僅僅改變一個高頻的值，而使得超射的問題能夠趨緩或解決；但隨著實驗次數的增加，我們不由得也增加了高頻異動的個數，但最後仍然失敗了，不過，我們也找出了這個假設失敗的原因。敘述於下。

我們以一個最簡單例子來說明 (Figure 5 左圖)。原始的訊號有一半是 0，另一半是 1，於是在第 8、9 點之間就會有一個 jump，所以 nilup 合成後就會發生超射現象，我們可以在 Figure 5 右圖的第 18 點附近看到，我們就擷取這一段的數值來討論 (Table 4)。然而，我們還需要一項預備知識，就是當我們把

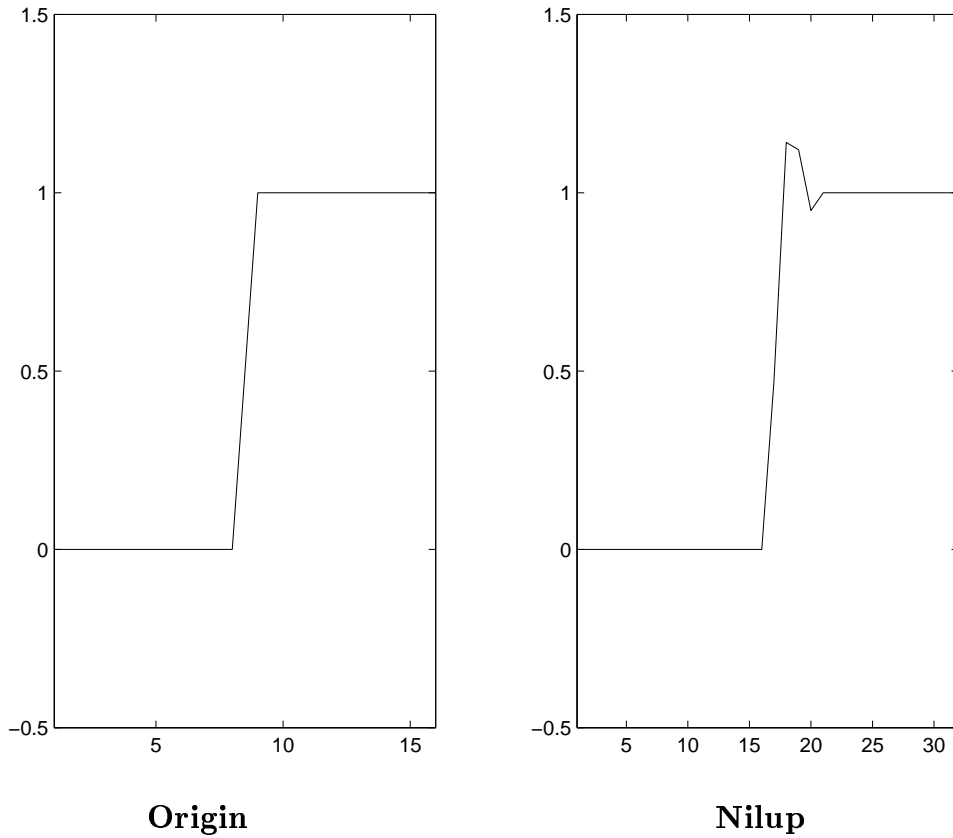


Figure 5

一個高頻的值從 0 改為 α ，其實就相當於把 **nilup** 合成後的連續 6 個點分別加上了

$$\begin{pmatrix} \alpha q_0 \\ \alpha q_1 \\ \alpha q_2 \\ \alpha q_3 \\ \alpha q_4 \\ \alpha q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0498\alpha \\ 0.1208\alpha \\ -0.1909\alpha \\ -0.6504\alpha \\ 1.1411\alpha \\ -0.4705\alpha \end{pmatrix}$$

一開始我們先考慮只改變一個高頻的情況，所以這連續六個點就可能被加在四個位置 (Table 4)。以下就這四個位置分別來討論。

type1：加在第 13 點到第 18 點之間，這個方法的唯一好處就是可以讓第 18 點的值小一點，但是對於超射並沒有多大的助益，反而使得第 13 到 16 點產生震盪。

type2：這個位置可以同時改變第 17 點到第 20 點，但是要趨緩超射現象就必須把第 18、19 點同時變小，但是 **type2** 加到這兩點的值剛好一正一負 $(-0.6504\alpha, 1.1411\alpha)$ 所以要同時縮小這兩點，根本是

<i>Point</i>	<i>Value</i>		<i>type1</i>	<i>type2</i>	<i>type3</i>	<i>type4</i>
13	0		0.0498α			
14	0		0.1208α			
15	0		-0.1909α	0.0498α		
16	0		-0.6504α	0.1208α		
17	0.4705		1.1411α	-0.1909α	0.0498α	
18	1.1411	+	-0.4705α	-0.6504α	0.1208α	
19	1.1208			1.1411α	-0.1909α	0.0498α
20	0.9502			-0.4705α	-0.6504α	0.1208α
21	1				1.1411α	-0.1909α
22	1				-0.4705α	-0.6504α
23	1					1.1411α
24	1					-0.4705α

Table 4

不可能。

type3: 如同 **type2** 的理由, 0.1208α 和 -0.1909α 異號, 改變不了超射的情況, 而且更嚴重的是它會讓第 21 點劇烈變化, 因為它要加上 1.1411α , 這個值不但和前後異號, 還是一個蠻大的數, 所以它產生的震盪可不輸給原來超射的震盪。

type4: 理由和 **type3** 一樣, 加上 1.1411α 會給第 23 點帶來麻煩, 而超射的問題仍然存在。

經過以上的討論知道改變一個高頻是行不通的, 那再改變多一些高頻可以嗎? 假設我們再改變一個高頻的值為 β , 位置就在 α 的下一個, 則相當於是 **nilup** 合成後再加上了

$$\begin{pmatrix} 0.0498\alpha \\ 0.1208\alpha \\ -0.1909\alpha + 0.0498\beta \\ -0.6504\alpha + 0.1208\beta \\ 1.1411\alpha - 0.1909\beta \\ -0.4705\alpha - 0.6504\beta \\ 1.1411\beta \\ -0.4705\beta \end{pmatrix}$$

而由加上的 $-0.1909\alpha + 0.0498\beta$, $-0.6504\alpha + 0.1208\beta$ 可以知道, β 必須大於 α 很多, 才可以彌補 α 所造成的影響, 然而, 還是有一個點必須加上 1.1411β , 所以如果 β 太大也是另一種“災害”的開始。因此不管改變幾個高頻的值, 對於超射的趨緩是沒有幫助的。那我們接著再問, 是否因為我們挑選的

例子很“特別”才會這樣呢？事實上，選擇這個例子是為了解說方便，但為了洗脫以一概全的嫌疑，我們提出了證明，如下。

先回顧一個式子

$$\sum v_k \phi(2^j x - k) = \sum u_k \phi(2^{j-1} x - k) + \sum w_k \psi(2^{j-1} x - k)$$

所以進一步可以推得合成就是

$$\begin{aligned} v_n &= 2 \sum u_k \langle \phi(x - k), \phi(2x - k) \rangle + w_k \langle \psi(x - k), \phi(2x - k) \rangle \\ &= \sum u_k p_{n-2k} + w_k q_{n-2k} \end{aligned}$$

現在我們假設存在另一組低頻與高頻

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{pmatrix}$$

也可以合成 v

$$v_n = \sum \hat{u}_k p_{n-2k} + \hat{w}_k q_{n-2k}$$

但是因為 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是正則基底 (orthonormal basis)，所以根據線性無關我們只會找到一組 $(u, w)^T$ 可以合成 v ，易言之就是

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{pmatrix}$$

更進一步來講，就是除了從原訊號分解下來的低頻與高頻外，我們不可能再找到另一組低頻與高頻來合成原來的訊號。因此我們空有一個合成後想像的藍圖，儘管輸入的低頻不變，而高頻怎麼做變化，還是不能合成我們想要的樣子，更擺脫不了超射現象的惡夢。

第二章 直脊函數

凌波轉換對於 **point singularities** 的表現是無庸置疑的，甚至連計算量 $O(N)$ 都略勝於快速傅立葉轉換的 $O(N \log N)$ ，但是 **point singularities** 只是眾多 **singularities** 的冰山一角，而很明顯的，凌波轉換在二維影像的邊 (**edge**) 上確實表現不佳。對於這個問題 Donoho 提出了直脊函數 (**ridgelets**) [2], [3] 的想法，以針砭凌波轉換之不足。在這一章裡，我們要取經於 Donoho。

2.1 傅立葉轉換

由於往後的計算中我們需要做 **Meyer wavelets** 基底的傅立葉轉換，所以在這一節我們先推導離散傅立葉轉換的公式，以及利用 Matlab 內建的 **fft** 與 **ifft** 來完成我們需要的程式。

我們說函數 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 的傅立葉轉換就是

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (2.1)$$

而傅立葉逆轉換就是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

現在我們要用梯形法在 $[-A\pi, A\pi]$ 區間內逼近 (2.1)。令 N 為偶數， $\Delta x = \frac{2A\pi}{N}$ ，

$$x_i = -A\pi + \frac{2A\pi}{N}(i + \frac{N}{2}), \quad i = \frac{-N}{2}, \dots, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

則

$$\begin{aligned} F(\omega) &\approx \int_{-A\pi}^{A\pi} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ &\approx \frac{\Delta x}{2} [f(\frac{-A}{2}\pi)e^{i\omega \frac{A}{2}\pi} + f(\frac{A}{2}\pi)e^{-i\omega \frac{A}{2}\pi} + 2 \sum_{n=\frac{-N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_n)e^{-i\omega x_n}] \end{aligned}$$

而為了計算的方便，我們令

$$f(A\pi)e^{i\omega A\pi} = f(-A\pi)e^{-i\omega A\pi}$$

在 $[-A\pi, A\pi]$ 的範圍內，這樣的假設不會影響積分值，而且在 N 很大的時候對梯形法的積分值也是無傷大雅的。因此

$$F(\omega) \approx \Delta x \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(x_n) e^{-i\omega \frac{2A\pi}{N} n}$$

由於取樣頻率為：

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{N}{2A\pi}$$

而由單農取樣定理 (Shannon Sampling Theorem) 可知，可測頻寬應為取樣頻寬的一半，也就是 $\frac{N}{4A\pi}$ ，所以，只有當

$$|\omega| \leq 2\pi \cdot \frac{N}{4A\pi} = \frac{N}{2A}$$

的頻率才可測。因此， $F(\omega)$ 只有在 $\omega \in [\frac{-N}{2A}, \frac{N}{2A}]$ 可測，然而，我們希望輸入與輸出都是 N 個值，於是，令

$$\omega_k = \frac{k}{A}, \quad k = \frac{-N}{2} + 1, \frac{-N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{2A\pi} = \frac{1}{A}$ ， $f_n = f(x_n)$ ， $\omega_{N,k} = e^{-i\frac{2k\pi}{N}n}$ 所以

$$\begin{aligned} F(\omega_k) &\approx F_k := \frac{2A\pi}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(x_n) e^{-i\frac{2k\pi}{N}n} \\ &= \frac{2A\pi}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n \omega_{N,k}^n \end{aligned}$$

這就是 $f_n \rightarrow F_k$ 的離散傅立葉轉換 (DFT : Discrete Fourier Transform)。

如果把它寫成矩陣的樣子就是：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} F_{\frac{-N+2}{2}} \\ F_{\frac{-N+4}{2}} \\ \vdots \\ F_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_N \mathbf{f} \\
 &= \begin{pmatrix} \omega_{N, \frac{-N}{2}+1}^{\frac{-N}{2}+1} & \omega_{N, \frac{-N}{2}+1}^{\frac{-N}{2}+2} & \cdots & \omega_{N, \frac{-N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \\ \omega_{N, \frac{-N}{2}+2}^{\frac{-N}{2}+1} & \omega_{N, \frac{-N}{2}+2}^{\frac{-N}{2}+2} & \cdots & \omega_{N, \frac{-N}{2}+2}^{\frac{N}{2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega_{N, \frac{N}{2}}^{\frac{-N}{2}+1} & \omega_{N, \frac{N}{2}}^{\frac{-N}{2}+2} & \cdots & \omega_{N, \frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\frac{-N+2}{2}} \\ f_{\frac{-N+4}{2}} \\ \vdots \\ f_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \Delta x e^{\frac{-2\pi}{N}i} \begin{pmatrix} e^{(\frac{-N+2}{2})(\frac{-N+2}{2})} & e^{(\frac{-N+2}{2})(\frac{-N+4}{2})} & \cdots & e^{(\frac{-N+2}{2})(\frac{N}{2})} \\ e^{(\frac{-N+4}{2})(\frac{-N+2}{2})} & e^{(\frac{-N+4}{2})(\frac{-N+4}{2})} & \cdots & e^{(\frac{-N+4}{2})(\frac{N}{2})} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e^{(\frac{N}{2})(\frac{-N+2}{2})} & e^{(\frac{N}{2})(\frac{-N+4}{2})} & \cdots & e^{(\frac{N}{2})(\frac{N}{2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\frac{-N+2}{2}} \\ f_{\frac{-N+4}{2}} \\ \vdots \\ f_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

因為矩陣 \mathbf{T}_N 是可逆的矩陣，事實上

$$\mathbf{T}_n^{-1} = \frac{1}{n} \mathbf{T}_n^H$$

因此，離散傅立葉逆轉換 (IDFT : Inverse Discrete Fourier Transform) 就是

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_N^{-1} \mathbf{F}$$

在 Matlab 裡有內建的傅立葉轉換的快速算法 `fft()`，傅立葉逆轉換也在 `ifft()` 裡，但無論是 `fft()` 還是 `ifft()`，它們都是以 $[0, 2A\pi]$ 作為計算的範圍，而我們所推導的範圍卻是 $[-A\pi, A\pi]$ ，再加上 Matlab 的足標都是從 1 開始，所以執行 `fft` 或 `ifft` 後所得到的結果，和我們推導出來的矩陣是不一樣的，除了需要再乘上一個常數 Δx 外，在順序上還需要做些微的修改，不是僅僅做平移就可以解決的。以下，就是我們修正的方法，我們把程式寫在

dft.m idft.m

檔案裡，只需輸入想要傅立葉轉換或逆轉換的向量，但是，在程式一開始我們會要求輸入的向量長度是偶數的，如果不然，將會立即終止計算。Code-1 是從 dft.m 這個檔案中攫取下來的。

Matlab Code-1

```
f=[f(N/2:N) f(1:N/2-1) ];
g=fft(f);
g=[g(N/2+2:N) g(1:N/2+1)];
g= $\frac{N}{2A\pi}$ *g;
```

當檔案收到輸入的向量 f 後，它的順序是 $f_{-\frac{N}{2}+1}, f_{-\frac{N}{2}+2}, \dots, f_{\frac{N}{2}}$ ，但是 Matlab 的順序卻是 $f(1), f(2), \dots, f(N)$ ，所以第一步就是必須把 f 分成兩個部分，第一部分就是順序從 $f(\frac{N}{2})$ 到 $f(N)$ ，其餘的 $f(1)$ 到 $f(\frac{N}{2} - 1)$ 則是另一部份。然後，將這兩部分前後對調，這樣一來我們的計算範圍一致了，都是 $[0, 2A\pi]$ ，接著就可以執行 `fft`；`fft` 執行完畢後，我們必須把順序還原，也就是把範圍還原，所以最後一個步驟就是再把順序換回來，於是，將 $f(\frac{N}{2} + 2)$ 到 $f(N)$ 這一半的向量和 $f(1)$ 到 $f(\frac{N}{2} + 1)$ 的向量相互對調位置，範圍就還原了。最後，再乘上常數 $\Delta x = \frac{N}{2A\pi}$ ，輸出的結果就和我們推導的矩陣是一樣的了。逆轉換也是一樣的道理。

2.2 Lemarié 的自格函數與 Meyer 的凌波函數

在有限解析度的空間底下談轉換，不得不先介紹它定義的基底為何。ridgelets 定義的基底在低層時，是採用 Lemarié 的自格函數所引申出來的正則基底；而在高層時，則是引用 Meyer wavelets 的正則基底。下面我們將介紹這兩種函數。

簡而言之，Battle – Lemarié wavelets 就是利用正交化的原理，將基本樣條函數 (B – spline) 造成 wavelets，現在我們只討論它的自格函數。

令 $\phi(x)$ 是 Battle – Lemarié wavelets 的自格函數， $\phi_s(x)$ 為 p 階的基本樣條函數，而且令 $\text{supp}\phi_s(x)$ 對稱於 $x=0$ (若 p 為偶數)，或對稱於 $x = \frac{1}{2}$ (若 p 為奇數)。因此 $\{\phi_s(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 是線性獨立的。為了方便，在這裡我們的編號 p 和 [1] 一樣；亦即當 $p=1$ 時，就是一般的零階樣條函數，也就是方盒函數。

根據 [1, 性質3.4]，如果要讓 $\phi(x)$ 是一個正則基底，就必須要

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_s(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$$

但是當 $p \geq 2$ 的時候，這個等式是不成立的，所以令

$$H(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_s(\xi + 2k\pi)|^2$$

$H(\xi)$ 是一個週期為 2π 而且恆正的連續函數，因此令 $\hat{\phi}$ 與 $\hat{\phi}_s$ 之間的關係是

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{H(\xi)}} \hat{\phi}_s(\xi)$$

由於我們已知

$$\hat{\phi}_s = e^{-i\frac{\xi}{2}\sigma} \left(\frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\frac{\xi}{2}} \right)^\sigma \quad (2.2)$$

其中

$$\sigma = \begin{cases} 1, & p \text{ 是奇數} \\ 0, & p \text{ 是偶數} \end{cases}$$

而且從 [6, p.88] 也可以知道

$$H(2\xi) = -\frac{\sin^{2p}(\xi)}{(2p-1)!} \frac{d^{2p-1}}{d\xi^{2p-1}} \cot \xi \quad (2.3)$$

例如

$$\begin{aligned} p=2, \quad H(\xi) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\xi \\ p=3, \quad H(\xi) &= \frac{8}{15} + \frac{12}{30} \cos \xi + \frac{1}{30} \cos^2 \xi \end{aligned}$$

因此令 $m_0(\xi)$ 是 $\phi(x)$ 的特徵函數，我們可以得到

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \frac{\hat{\phi}(2\xi)}{\hat{\phi}(\xi)} \\ &= \frac{\sqrt{H(\xi)}\hat{\phi}_s(2\xi)}{\sqrt{H(2\xi)}\hat{\phi}_s(\xi)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

於是把式子 (2.2)(2.3) 代入 (2.4) 中，就可以找到 c_k 了。Figure 6 和 Figure 7 就是 $p=2$ 、 3 的 $\phi(x)$ 。

c_k 是無窮多個非零係數，但屬於多項式消散， c_k 對稱於 $k=0$ (當 p 是偶數時)，或對稱於 $k = \frac{1}{2}$ (當 p 是奇數時)。Table 5、Table 6 列出 $p=2$ 及 $p=3$ 時的 c_k ，我們的取舍方法為

$$\left| \sum_{k=-n}^n c_k - 2 \right| \leq 5 \times 10^{-6}$$

所以 $p=2$ 時， $n=16$ ，共取 33 項； $p=3$ 時， $n=25$ ，共取 50 項。它們的數值在 `lemarie.mat` 這個檔案裡。

在 1986 年，Meyer 的凌波函數 ψ 第一次與世人見面，由於它的傅立葉轉換 $\hat{\psi}$ 是有限函蓋函數，故 ψ 是一個很平滑的函數。在接下來的篇幅裡，我們要證明 Meyer 的自格函數及凌波函數是正則基底，但直接證明它們是正則基底比較困難，所以我們打算從自格函數的特徵函數開始。

$\phi(x)$ for $p=2$

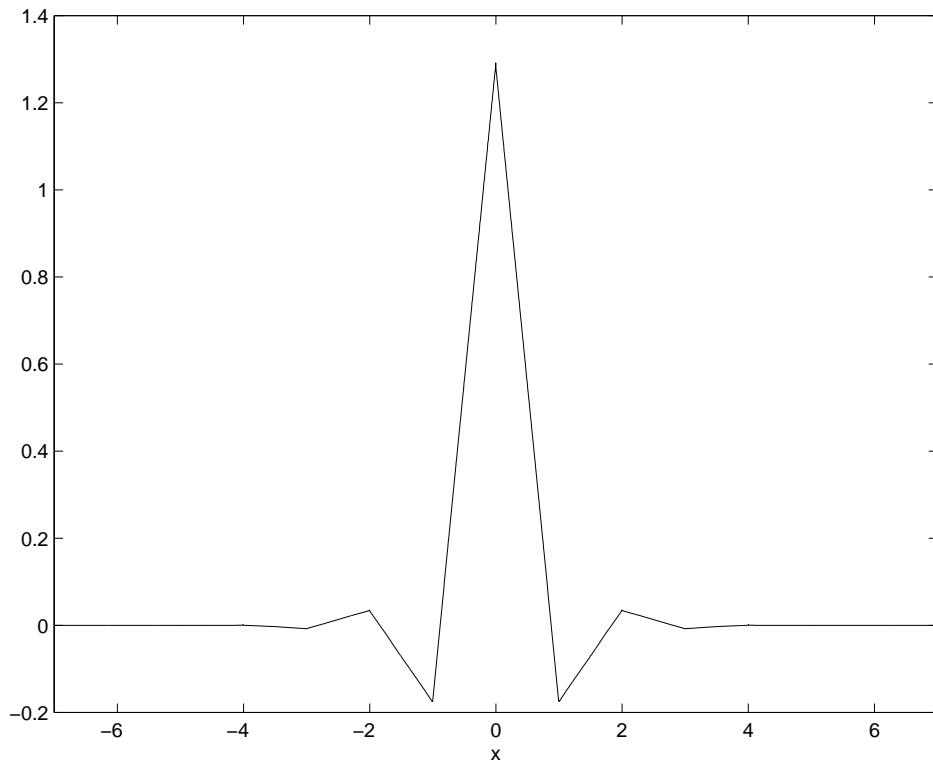


Figure 6

$\phi(x)$ for $p=3$

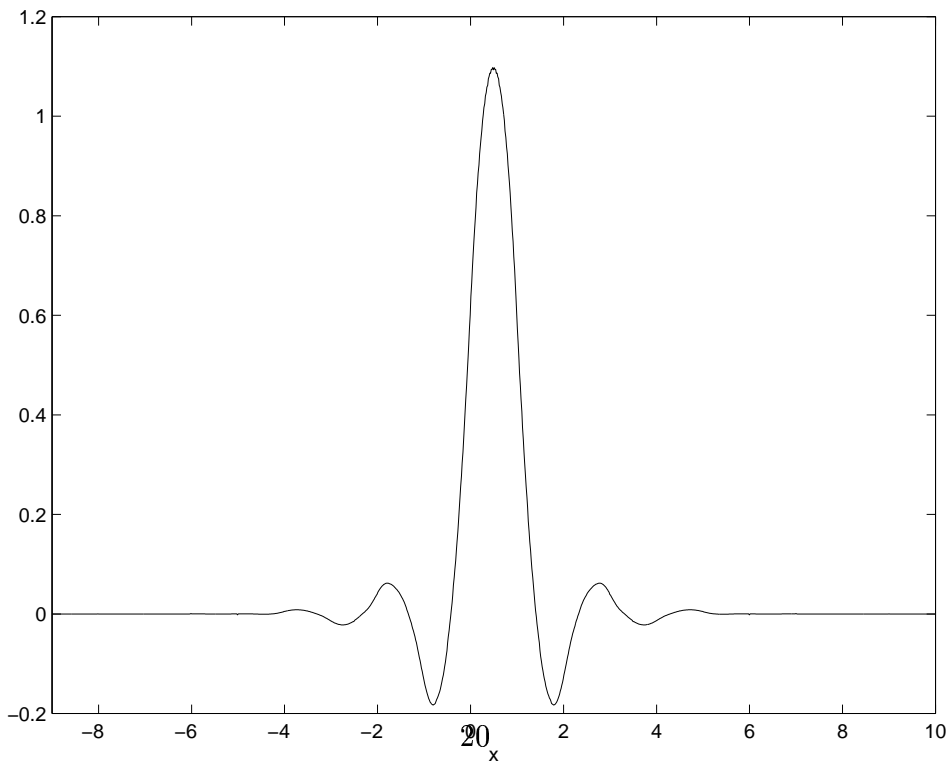


Figure 7

p=2

k	c_k	k	c_k
0	1.15632663044579	9	0.00072356251301
1	0.56186292858765	10	-0.00031720285555
2	-0.09772354847998	11	-0.00017350463597
3	-0.07346181335547	12	0.00007828566487
4	0.02400068439163	13	0.00004244222575
5	0.01412883469138	14	-0.00001954273439
6	-0.00549176158313	15	-0.00001052790655
7	-0.00311402901546	16	0.00000492117905
8	0.00130584362611		

Table 5

p=3

k	c_k	k	c_k
1	0.96218850337647	14	0.00005149189024
2	0.19510923625013	15	-0.00049372120202
3	-0.17654342735281	16	-0.00001800199152
4	-0.02934097454448	17	0.00019929573525
5	0.05937163254037	18	0.00000645605761
6	0.00599366802040	19	-0.00008104108370
7	-0.02137287194074	20	-0.00000236237046
8	-0.00158880221461	21	0.00003314796576
9	0.00806884459996	22	0.00000087836723
10	0.00047350887755	23	-0.00001362322068
11	-0.00312788862797	24	-0.00000033091386
12	-0.00015251802585	25	0.00000562112308
13	0.00123483234718		

Table 6

令 m_0 是自格函數 ϕ 的特徵函數，則 m_ξ 是 2π 週期函數，對 Meyer 凌波而言，定義為

$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leq \frac{\pi}{3} \\ \beta(\xi), & \frac{\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{2\pi}{3} \\ 0, & \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \pi \end{cases} \quad (2.5)$$

根據 [1, 性質3.5]，選擇 $\beta(\xi)$ 使得 $m_0(\xi)$ 滿足

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

因此若 ϕ 滿足

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

則 $\{\phi(x - k)\}$ 是正則基底。所以將上面的等式繼續推演，可以得到

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{p=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^p}\right) \quad (2.6)$$

但是由於

$$\begin{aligned} m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) &= 0, \quad |\xi| \geq \frac{4\pi}{3} \\ m_0\left(\frac{\xi}{2^2}\right) &= m_0\left(\frac{\xi}{2^3}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2^4}\right) = \dots = 1, \quad |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

所以 (2.6) 就簡化成

$$\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} m_0\left(\frac{\xi}{2}\right), & |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0, & |\xi| > \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

令 $\phi(x)$ 是 $\hat{\phi}(\xi)$ 的傅立葉逆轉換，則 $\{\phi(x - k)\}$ 是正則基底。

同樣的想法，令 $m_1(\xi)$ 是 $\psi(\xi)$ 的特徵函數，根據 [1, (3.77)] 得知

$$m_1(\xi) = -e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)}$$

則

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)m_0\left(\frac{\xi}{4}\right), & |\xi| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0, & |\xi| > \frac{8\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad |\xi| \leq \frac{2\pi}{3} \\ m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) & , \quad \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \\ e^{-i\frac{\xi}{2}} m_0\left(\frac{\xi}{4}\right) & , \quad \frac{4\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & , \quad |\xi| > \frac{8\pi}{3} \end{cases}$$

令 $\psi(x)$ 是 $\hat{\psi}(\xi)$ 的傅立葉逆轉換，則 $\{\psi(x - k)\}$ 也是一組正則基底。

由以上的推導，可見 Meyer 的正則基底是不唯一的，只要選擇適當的 $\beta(\xi)$ 符合 (2.5)，就可以導出一組正則基底。現在我們找一個例子來看看。

令

$$\beta(\xi) = \cos\left[\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3|\xi|}{\pi} - 2\right)\right], \quad \frac{\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$$

其中 ν 是平滑的函數並且滿足

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

和

$$\nu(x) + \nu(1 - x) = 1$$

我們選擇了 $\nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$ ，如 Figure 8。

因此

$$\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} 1 & , \quad |\xi| \leq \frac{2\pi}{3} \\ \cos\left[\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3|\xi|}{2} - 1\right)\right] & , \quad \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0 & , \quad |\xi| \geq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} e^{\frac{i\xi}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\xi| - 1\right)\right] & , \quad \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \\ e^{\frac{i\xi}{2}} \cos\left[\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{4\pi}|\xi| - 1\right)\right] & , \quad \frac{4\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

$\hat{\phi}$ 、 $|\hat{\psi}|$ 如 Figure 9、Figure 10 所示 ($\hat{\phi}(\xi)$ 是實值的偶函數)。

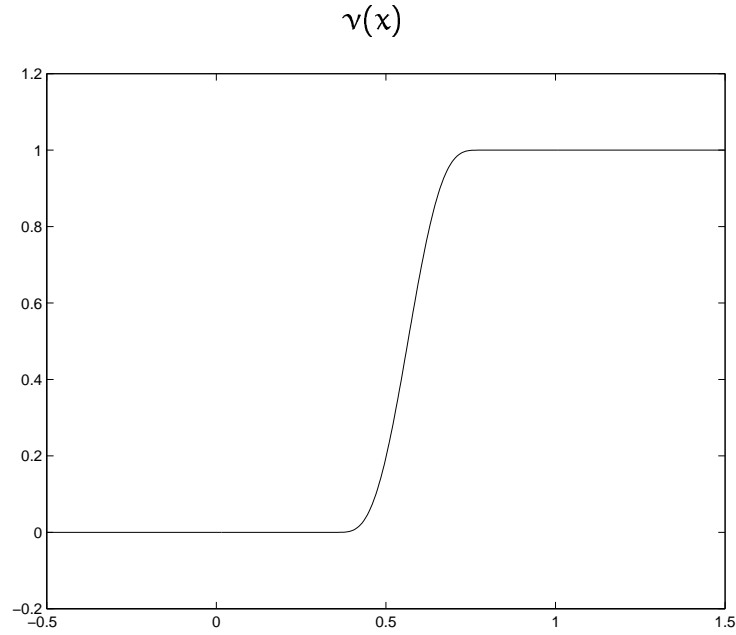


Figure 8

同時，我們利用上一節介紹的 `idft()` 將 $\hat{\phi}(\xi)$ 及 $\hat{\psi}(\xi)$ 做傅立葉逆轉換，就可以得到 $\phi(x)$ 、 $\psi(x)$ 。這兩個函數是無限涵蓋的， $\phi(x)$ 對稱於 $x = 0$ ， $\psi(x)$ 對稱於 $x = \frac{1}{2}$ ，不過隨著 $|x|$ 的漸增，它們的值就會越接近 0，如 Figure 11、Figure 12，因此我們可以假設 $\phi(x)$ 及 $\psi(x)$ 是有限函蓋。由於

$$|\phi(5)| \approx 0.0005$$

$$|\psi(5.5)| \approx 0.0022$$

所以

$$\text{supp}\phi(x) \approx [-5, 5]$$

$$\text{supp}\psi(x) \approx [-4.5, 5.5]$$

以上這些 ϕ 、 ψ 、 $\hat{\phi}$ 及 $\hat{\psi}$ 的數據全部存在 `Meyer.mat` 中。

前面 Lemarié 的自格函數我們討論到 $p = 3$ ，但是 Meyer 凌波無所謂的 p 值，因為 $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ ，所以 $\int x^{(k)}\psi(x) dx = 0$ ， $k = 0, 1, 2, \dots$ ，也就是 Meyer 凌波正交於所有多項式，因此無需討論 p 值。

$$\hat{\phi}(\xi)$$

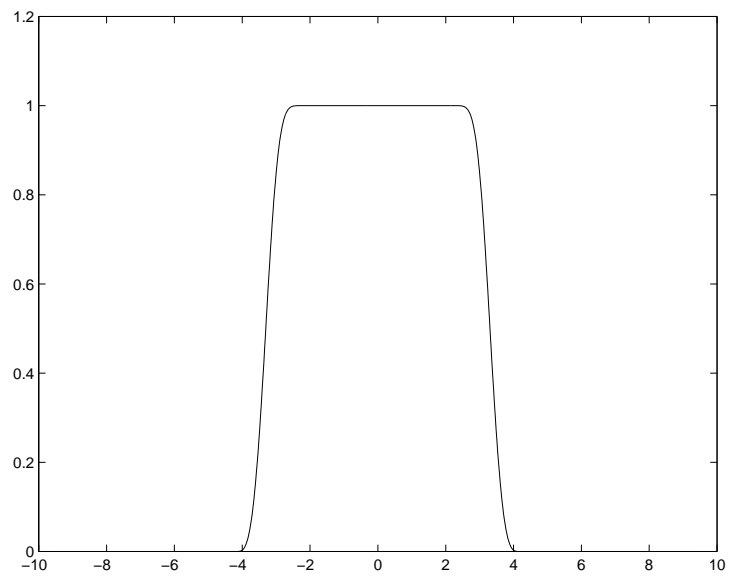


Figure 9

$$|\hat{\psi}(\xi)|$$

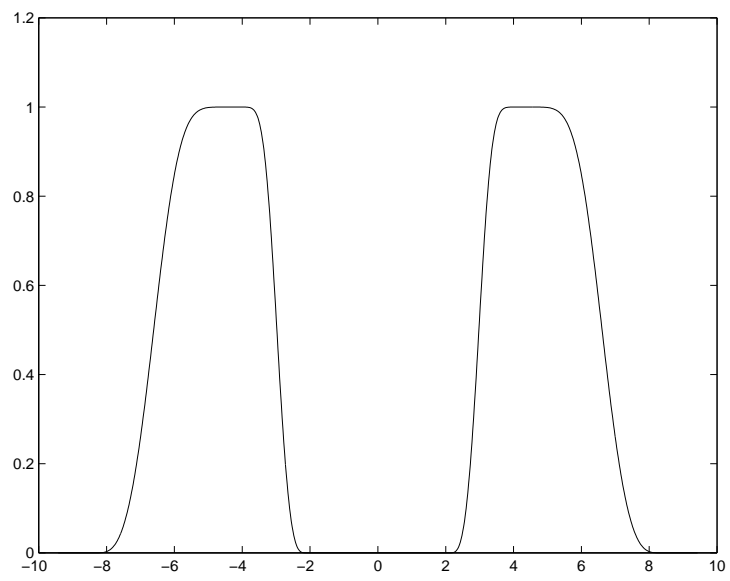


Figure 10

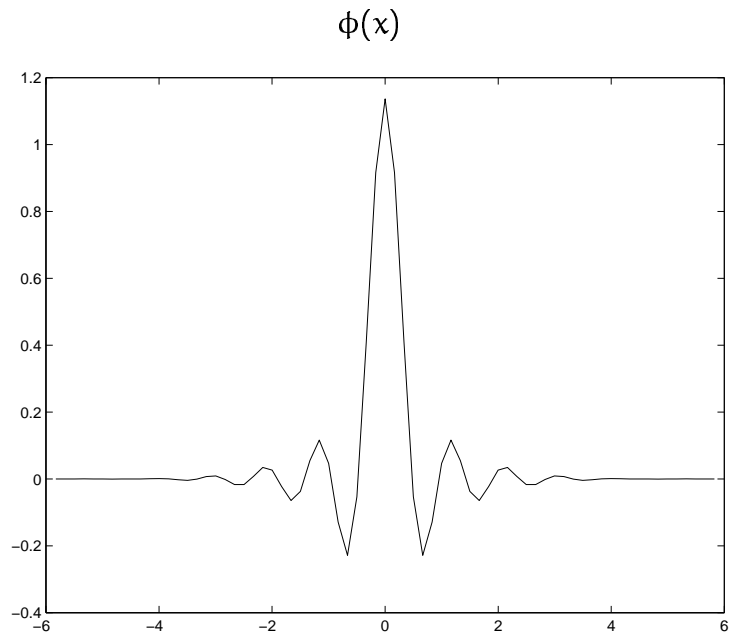


Figure 11

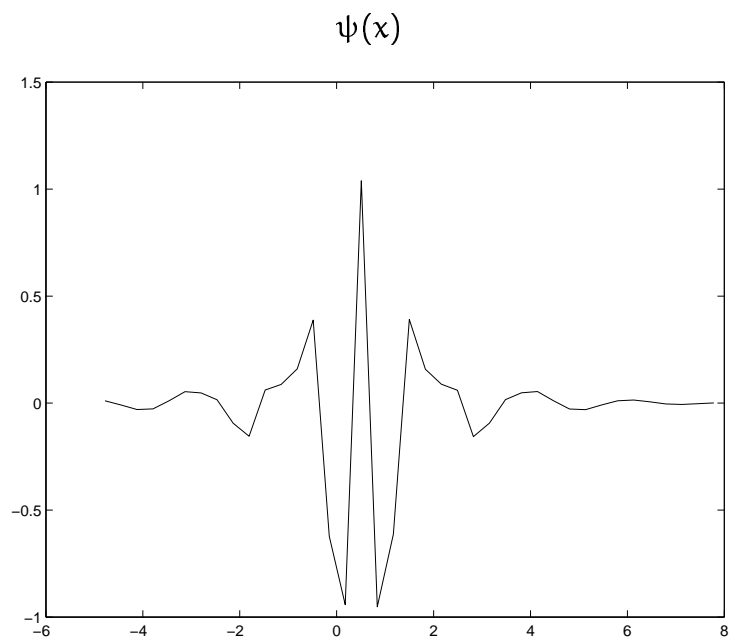


Figure 12

2.3 Radon 轉換

為了定義 Radon Space 的正則基底，在這一節我們先簡介 Radon Transform 及 antipodal 對稱性質。

令 $f(x, y)$ 是一個平滑且快速衰退的函數，定義 f 的 Radon transform 就是 f 沿著直線 $L_{(t, \theta)}$ 的積分值，記作 Rf ，也就是

$$(Rf)(t, \theta) = \iint f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy, \quad t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)$$

其中， $L_{(t, \theta)}$ 是直線方程式 $x \cos \theta + y \sin \theta - t = 0$ ，它是與 x 軸的夾角為 $\pi - \theta$ (也就是法線和 x 軸夾角為 θ) 與原點距離為 t 的一條直線，如下圖。

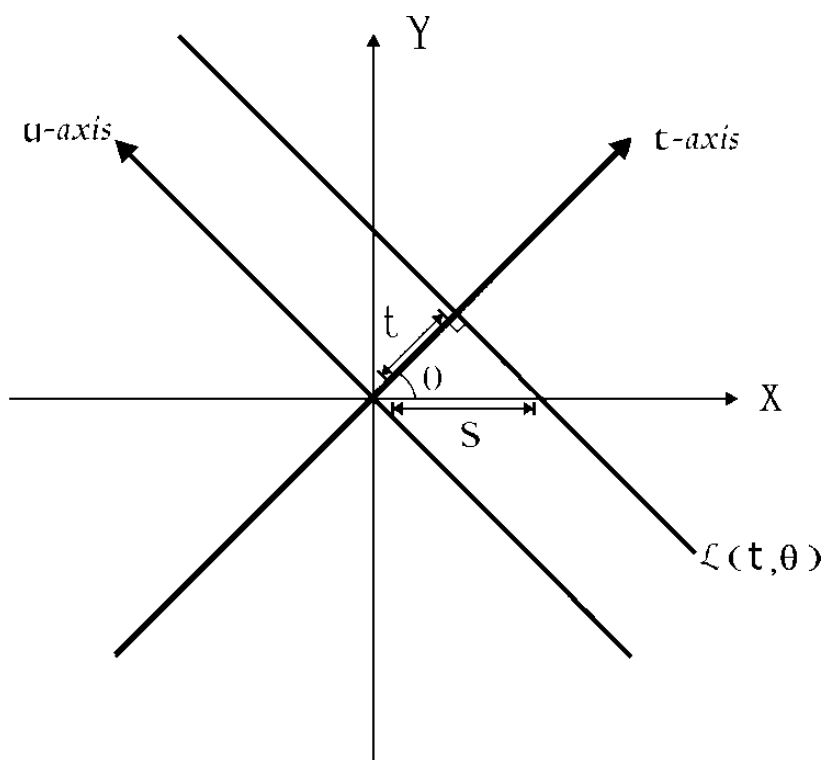


Figure 13

而 $\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t)$ 就是沿著 $L_{(t, \theta)}$ 的 unit impulse。由於把直線 $L_{(t, \theta)}$ 旋轉 180 度後是它“對面”的一條直線，如下圖，

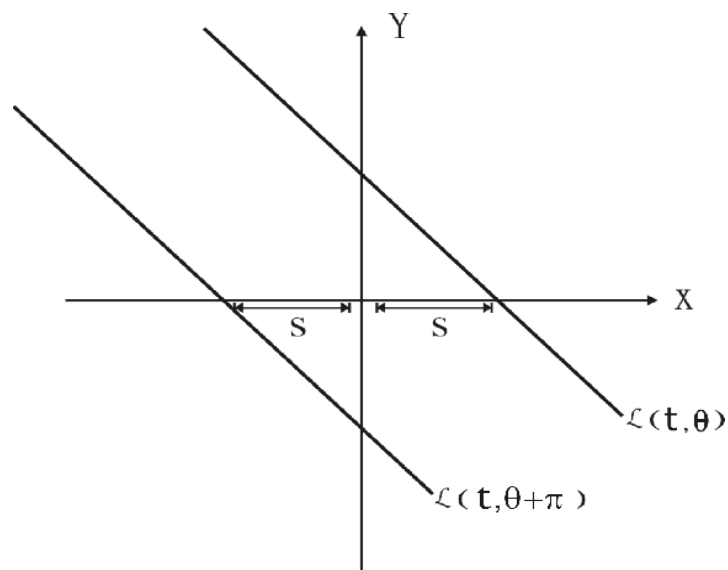


Figure 14

所以

$$L(t, \theta) = L(t, \theta + \pi)$$

也就是 $(Rf)(-t, \theta + \pi) = (Rf)(t, \theta)$ ，嚴格推導如下：

$$\begin{aligned}
 (Rf)(-t, \theta + \pi) &= \int f(x) \delta(x_1 \cos(\theta + \pi) + x_2 \sin(\theta + \pi) - t) dx \\
 &= \int f(x) \delta(-x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta + t) dx \\
 &= \int f(x) \delta(-(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t)) dx \\
 &= \int f(x) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx \\
 &= (Rf)(t, \theta)
 \end{aligned}$$

以上等式被稱為 Rf 的 **antipodal** 對稱性質。為了行文的方便，我們令 $F = Rf$ ， $F \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ ，所以 F 還是擁有 **antipodal** 對稱的性質，亦即

$$F(-t, \theta + \pi) = F(t, \theta)$$

Radon 轉換已被廣泛應用於各界，但由於我們要引用的性質不多，所以 **Radon** 轉換我們簡介於此。

2.4 Radon Space 及它的基底

首先，我們定義 Rodan 內積。令 $F, G : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$[F, G] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t, \theta) \bar{G}(t, \theta) dt d\theta \quad (2.7)$$

定義 F 的 $L^2(dt d\theta)$ norm 就是 $\|F\|_{L^2(dt d\theta)}^2 = [F, F]$ ，假若與前後文沒有混淆的時候，我們也用 $\|F\|^2$ 符號。因此可以定義一個函數空間

$$L^2(dt d\theta) := \{F : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \mid \|F\|_{L^2(dt d\theta)} < \infty\}$$

現在我們定義一個函數空間 \mathcal{R} 如下

$$\mathcal{R} := \{F \in L^2(dt d\theta) \mid F \text{ 是 antipodal 對稱}\}$$

$L^2(dt d\theta)$ 是一個完備的函數空間，而 \mathcal{R} 是 $L^2(dt d\theta)$ 的封閉子空間。若 $F \in L^2(dt d\theta)$ ，定義 F 對 \mathcal{R} 的正交投影 (orthoprojector) 算子， $P_{\mathcal{R}} : L^2(dt d\theta) \rightarrow \mathcal{R}$ 就是

$$(P_{\mathcal{R}}F)(t, \theta) = (F(t, \theta) + F(-t, \theta + \pi))/2$$

很明顯的， $P_{\mathcal{R}}F \in \mathcal{R}$ ，而且 $F - P_{\mathcal{R}}F \perp \mathcal{R}$ 。

\mathcal{R} 中的函數有 t 與 θ 兩個變量，對 θ 而言是 2π 週期函數。現在我們要介紹對 θ 變量的基底函數 $w_{i,\ell}^\sigma$ ，其中 $\sigma = 0$ 或 1 。

令 $\phi_{i_0,\ell}(\theta)$ 是 $p=3$ 的 Lemarié 自格函數， $\psi_{i,\ell}(\theta)$ 是 Meyer 的凌波函數，我們先將這兩個函數週期化，所以 $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \phi_{i_0,\ell}(\theta - 2h\pi) \in L_p^2([0, 2\pi])$ ， $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_{i,\ell}(\theta - 2h\pi) \in L_p^2([0, 2\pi])$ 。而我們知道某一解析度空間 V_i ，可以被一層層的分解，也就是

$$\begin{aligned} V_i &= W_{i-1} \oplus V_{i-1} \\ &= W_{i-1} \oplus (V_{i-2} \oplus W_{i-2}) \\ &\vdots \\ &= W_{i-1} \oplus W_{i-2} \oplus \cdots \oplus W_{i_0} \oplus V_{i_0} \end{aligned}$$

所以讓 $\sigma = 0$ 時，表示在最低的解析度空間 V_{i_0} 內，亦即 $i = i_0$ ，採用週期化的 Lemarié 自格函數為 $w_{i_0, \ell}^0(\theta)$ ；而 $\sigma = 1$ 時，則是在較高解析度空間 W_i 內， $i \geq i_0$ ，引用週期化的 Meyer wavelets 正則基底為 $w_{i, \ell}^1$ ，亦即

$$w_{i, \ell}^1(\theta) = \gamma_1 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_{i, \ell+h2^i}(\theta/2\pi), \quad i \geq i_0 > 0, \quad \ell = 0, \dots, 2^i - 1$$

$$w_{i_0, \ell}^0(\theta) = \gamma_2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \phi_{i_0, \ell+h2^{i_0}}(\theta/2\pi), \quad \ell = 0, \dots, 2^{i_0} - 1$$

$\sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_{i, \ell+h2^i}(\theta/2\pi)$ 、 $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \phi_{i_0, \ell+h2^{i_0}}(\theta/2\pi)$ 是週期化後再漲大 2π 倍。令 γ_1 、 γ_2 為常數，使得

$$\|\psi_{j, k}\|_{L^2} = \sqrt{2}, \quad \|w_{i, \ell}^\sigma\|_{L^2[0, 2\pi)} = 2\sqrt{\pi}$$

爲了待會兒的證明需要，我們必須再提一個平移產生的性質，但是，先說明的是這性質不是所有凌波系統都有。因爲 ϕ 是 $p = 3$ 的 Lemarié 自格函數，所以 ϕ 和 ψ 都對稱於 $\frac{1}{2}$ ，故有以下性質：

$$w_{i, \ell}^\sigma(\theta + \pi) = w_{i, \ell+2^{i-1}}^\sigma(\theta) \quad (2.8)$$

在 \mathcal{R} 中，對於變量 t 的基底函數，我們採用 Meyer 凌波，所以利用平移，也有下面的性質

$$\psi_{j, k}(-t) = \psi_{j, 1-k}(t) \quad (2.9)$$

由於 $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $w_{i, \ell}^\sigma(\theta) \in L^2([0, 2\pi))$ ，所以 $\psi(t) \otimes w_{i, \ell}^\sigma(\theta) \in L^2(dt d\theta)$ ，因此令 $j, k \in \mathbb{Z}$ ， $i \geq \max(i_0, j)$ ， $\ell = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$ ， $\sigma = 0, 1$

$$W_\lambda(t, \theta) = P_{\mathcal{R}}(\psi_{j, k}(t) \otimes w_{i, \ell}^\sigma(\theta))$$

其中 $\lambda = (j, k, i, \ell, \sigma)$ 。由 (2.8) 及 (2.9)，可以推導出 W_λ 是 antipodal 對稱，因此， $W_\lambda(t, \theta) \in \mathcal{R}$ 。

λ 的參數有五個， σ 表示是在 W 空間還是 V 空間中，而其他的參數， j 、 k 是表示 ridge position， i 、 ℓ 是表示 angular position，所以如果以 t 和 θ 爲軸， W_λ 是一塊矩形，而矩形左下角的座

標是 $(t_{j,k}, \theta_{i,\ell})$ ，其中， $t_{j,k} = k/2^j$ ， $\theta_{i,\ell} = \ell/2^i$ 。這個矩形的長是 2^{-j} ，寬是 $2^{-i}\pi$ 。然而，在 $(-t_{j,k}, \theta_{i,\ell} + \pi)$ 的位置還會有一個一模一樣的矩形，因為

$$\begin{aligned}
W_\lambda(t, \theta) &= (\psi_{j,k}(t)w_{i,\ell}^\sigma(\theta) + \psi_{j,k}(-t)w_{i,\ell}^\sigma(\theta + \pi))/2 \\
&= (\psi_{j,k}(t)w_{i,\ell}^\sigma(\theta + 2\pi) + \psi_{j,k}(-t)w_{i,\ell}^\sigma(\theta + \pi))/2 \\
&= (\psi_{j,k}(-t)w_{i,\ell}^\sigma(\theta + \pi) + \psi_{j,k}(t)w_{i,\ell}^\sigma(\theta + 2\pi))/2 \\
&= W_\lambda(-t, \theta + \pi)
\end{aligned}$$

上面的證明用到了 $w_{i,\ell}^\sigma(\theta) = w_{i,\ell}^\sigma(\theta + 2\pi)$ ，這是因為週期為 2π 的緣故。

W_λ 還有許多的性質，在 [3, 第2章] 裡都有，不便在此贅述，但最值得一提的，它還是一個正則基底，在 [3, Lemma 2.1] 裡有提供詳細的證明。最後還有一項值得注意的是為什麼要定義 $\ell < 2^{i-1}$ ，那是因為當 $\ell = 2^{i-1}, \dots, 2^i - 1$ 時，會有一個“重複”的 W_λ ，其推導如下：

$$\begin{aligned}
W_{i,j,k,\ell,\sigma}(t, \theta) &= W_{i,j,k,\ell,\sigma}(-t, \theta + \pi) \\
&= [\psi_{j,k}(-t)w_{i,\ell}^\sigma(\theta + \pi) + \psi_{j,k}(t)w_{i,\ell}^\sigma(\theta + 2\pi)]/2 \\
&= [\psi_{j,1-k}(t)w_{i,\ell+2^{i-1}}^\sigma(\theta + \pi) + \psi_{j,1-k}(-t)w_{i,\ell+2^{i-1}}^\sigma(\theta)]/2 \\
&= W_{i,j,1-k,\ell+2^{i-1},\sigma}(-t, \theta) \\
&= W_{i,j,1-k,\ell+2^{i-1},\sigma}(t, \theta + \pi) \\
&= W_{i,j,1-k,\ell+2^{i-1},\sigma}(t, \theta)
\end{aligned}$$

因此，我們令 $0 \leq \ell < 2^{i-1}$ ，這樣基底的元素就不會有重複出現的可能，保持線性獨立。

2.5 Radon space and Ridgelets

我們花了相當的篇幅，說了那麼多 Radon space，我們的主角 ridgelets (ρ_λ) 卻遲遲未上場，賣了那麼久的關子，其實是因為在 W_λ 和 ρ_λ 之間可以定義一個具有保長及保角 (isometry) 性質的算子 \mathcal{T} ，也就是 $\rho_\lambda = \mathcal{T}W_\lambda$ 。我們由上一節知道 W_λ 是 Radon space \mathcal{R} 的正則基底，而我們希望 ρ_λ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的正則基底，所以應該定義 $\mathcal{T} : \mathcal{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ ；一言以蔽之，就是只要我們能夠定義出算子 \mathcal{T} ，藉由 W_λ 就可以找出一組 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的正則基底，而這組正則基底就是 $\{\rho_\lambda\}$ 。然而，開門見山的說， $\mathcal{T} = \mathcal{F}_2^{-1} \circ C \circ \mathcal{F}_1$ ，以下我們分別介紹 \mathcal{F}_1 、 C 、 \mathcal{F}_2^{-1} 這三個算子以及和它們相關的空間定義，而後再藉由 \mathcal{T} 了解 W_λ 和 ρ_λ 之間更多的關係。

\mathcal{F}_t 表示對第一個變數的傅立葉轉換。對於 $F \in \mathcal{R}$ ，定義它第一個變數 (也就是 t) 的傅立葉轉換為

$$(\mathcal{F}_t F)(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t, \theta) e^{-i\omega t} dt$$

為了行文的方便，令 $\tilde{F}(\omega, \theta) = (\mathcal{F}_t F)(\omega, \theta)$ ， $\tilde{W}_\lambda = \mathcal{F}_t W_\lambda$ 。由於 F 是 antipodal 對稱，所以顯然可知 $\tilde{F}(\omega, \theta) = \tilde{F}(-\omega, \theta + \pi)$ ， \tilde{F} 也是 antipodal 對稱。接著定義一個空間為

$$\tilde{\mathcal{R}} := \{\tilde{F} \in L^2(d\omega d\theta) \mid F \in \mathcal{R}\}$$

故 $\tilde{W}_\lambda \in \tilde{\mathcal{R}}$ 。而 $\tilde{\mathcal{R}}$ 的內積就定義成

$$[\tilde{F}, \tilde{G}] = 2\pi[F, G]$$

其中 $[F, G]$ 是 $L^2(dt d\theta)$ 的內積見 (2.7)。從上面的式子，明顯看到經過傅立葉轉換後的內積，和原來的內積只差了 2π ，但角度還是一樣，所以我們可以說 $F \longleftrightarrow \tilde{F}$ 之間具有保角性質，亦即 \mathcal{F}_t 是保角算子。

定義 $C : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow L^2(d\xi d\eta)$

$$C(\tilde{F}) = \hat{\mathcal{F}}(\xi, \eta)$$

使得

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(\xi, \eta) &= \hat{F}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \\ &= \tilde{F}(\omega, \theta) |\omega|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ 。說穿了，其實 C 的功用“很像”是在做極座標到直角座標間的轉換。定義 $L^2(d\xi, d\eta)$ 空間如下：

$$L^2(d\xi, d\eta) := \{\hat{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|\hat{F}\|_{L^2(d\xi, d\eta)} < \infty\}$$

其中，

$$\|\hat{F}\|_{L^2(d\xi, d\eta)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{F}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta$$

在這裡有一點必須注意，當 $\omega = 0$ ，亦即 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ 時，若 $\tilde{F}(0, \theta) \neq 0$ ，則 \hat{F} 在 $(0, 0)$ 產生了一個奇異點。

由於 \tilde{F} 是 antipodal 對稱，所以可以推導出

$$\begin{aligned} \hat{F}(\xi, \eta) &= \tilde{F}(\omega, \theta) |\omega|^{-\frac{1}{2}} \\ &= \tilde{F}(-\omega, \theta + \pi) |-\omega|^{-\frac{1}{2}} \\ &= \hat{F}(-\omega \cos(\theta + \pi), -\omega \sin(\theta + \pi)) \\ &= \hat{F}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

也就是 \tilde{F} 在 (ω, θ) 、 $(-\omega, \theta + \pi)$ 的地方，經過變數變換後可以得到同一個 \hat{F} 。下面我們要推導 $\hat{F}(\xi, \eta) \in L^2(d\xi, d\eta)$ ：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{F}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |\tilde{F}(\omega, \theta) |\omega|^{-\frac{1}{2}}|^2 \omega d\omega d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |\tilde{F}(\omega, \theta)|^2 d\omega d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{F}(\omega, \theta)|^2 d\omega d\theta \\ &= \frac{1}{2} \|\tilde{F}\|_{L^2(d\omega, d\theta)}^2 < \infty \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}\|_{L^2(d\omega, d\theta)}^2 &= 2\|\hat{F}\|_{L^2(d\xi, d\eta)}^2 \\ &= 2\|C\tilde{F}\|_{L^2(d\xi, d\eta)}^2 \end{aligned}$$

C 具有保角性質，而且 well-defined，而由上面的式子我們還可以知道

$$\|C\|_{L^2(d\xi, d\eta)} = \sup \frac{\|C\tilde{F}\|}{\|\tilde{F}\|} = \frac{1}{2}$$

一個顯而易見的道理， \tilde{W}_λ 在 $|\omega| < \frac{2\pi}{3}2^j$ 時， $\tilde{W}_\lambda = 0$ ，這是因為當 $|\omega| < \frac{2\pi}{3}2^j$ 時， $\hat{\psi} = 0$ 的緣故，因此我們找到一個可以往下推導的理由： $C(\tilde{W}_\lambda)$ 在原點並沒有奇異點。所以我們定義

$$\hat{\rho}_\lambda = C(\tilde{W}_\lambda) = (C \circ \mathcal{F}_1)W_\lambda \quad (2.10)$$

也就是

$$\hat{\rho}_\lambda(\gamma) = |\gamma|^{-\frac{1}{2}}(\hat{\psi}_{j,k}(|\gamma|)w_{i,\ell}^\sigma(\theta) + \hat{\psi}_{j,k}(-|\gamma|)w_{i,\ell}^\sigma(\theta + \pi))/2$$

其中， $\gamma = (\xi, \eta)$ ，而且 $|\gamma| = |\omega|$ 。根據前面的推導，因為 $C \circ \mathcal{F}^1 : \mathcal{R} \rightarrow L^2(d\xi d\eta)$ ，而且 $W_\lambda \in \mathcal{R}$ ，所以， $\hat{\rho}_\lambda \in L^2(d\xi d\eta)$ 。故定義

$$\rho_\lambda = \mathcal{F}^{-1}\hat{\rho}_\lambda$$

\mathcal{F}^{-1} 是二維的傅立葉逆轉換， $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(d\xi d\eta)$ ，因此

$$\rho_\lambda = (\mathcal{F}^{-1} \circ C \circ \mathcal{F}_1)W_\lambda := \mathcal{T}W_\lambda$$

\mathcal{T} 是保角算子，而且

$$\mathcal{T} : \mathcal{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$$

接著，我們就可以推敲 ρ_λ 與 W_λ 之間的相關性質，包括保長性質：

$$\begin{aligned} \|\rho_\lambda\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \|\hat{\rho}\|_{L^2(d\xi d\eta)}^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |\hat{\rho}_\lambda(r \cos \theta, r \sin \theta)|^2 r dr d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |C(\tilde{W}_\lambda)(r \cos \theta, r \sin \theta)|^2 r dr d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |\tilde{W}_\lambda(r, \theta)|^2 |r|^{-1} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}_1 W_\lambda(r, \theta)|^2 dr d\theta \\ &= \frac{1}{8\pi^2} 2\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |W_\lambda(t, \theta)|^2 dt d\theta \\ &= [W_\lambda, W_\lambda] = \|W_\lambda\|_{L^2(dt d\theta)}^2 \end{aligned}$$

保角性質：

$$\begin{aligned}
\langle \rho_\lambda, \rho_\mu \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \langle \hat{\rho}_\lambda, \hat{\rho}_\mu \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{\rho}_\lambda(r \cos \theta, r \sin \theta) \overline{\hat{\rho}_\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widetilde{W}_\lambda(t, \theta) \overline{W}_\mu(t, \theta) \, dt \, d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \cdot 2\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty W_\lambda(t, \theta) \overline{W}_\mu(t, \theta) \, dt \, d\theta \\
&= [W_\lambda, W_\mu]
\end{aligned}$$

\langle, \rangle 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的內積。由於 $\{W_\lambda\}$ 是 \mathcal{R} 的正則基底，因此從上面兩個性質可以推得 $\{\rho_\lambda\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的正則基底。

我們已經證出 $\langle \rho_\lambda, \rho_\mu \rangle = [W_\lambda, W_\mu]$ ，現在我們要找出 R (Radon transform) 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 與 \mathcal{R} 兩種空間內的 adjoint 算子，所以令 $G \in \mathcal{R}$ ， $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ，則 $G, Rf: \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ ，它們的內積就是

$$\begin{aligned}
[Rf, G] &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Rf(t, \theta) \overline{G}(t, \theta) \, dt \, d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\iint f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) \, dx \, dy \right] \overline{G}(t, \theta) \, dt \, d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\iiint f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) \overline{G}(t, \theta) \, dt \, dx \, dy \right] \, d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\iint f(x, y) \overline{G}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \, dx \, dy \right] \, d\theta \\
&= \iint f(x, y) \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \overline{G}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \, d\theta \right] \, dx \, dy \\
&= \langle f, R^+G \rangle
\end{aligned}$$

以上爲了行文方便， \int 就代表 $\int_{-\infty}^\infty$ ，而其中

$$(R^+G)(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} G(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \, d\theta$$

因此若函數 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ，將它以 $\{\rho_\lambda\}$ 爲基底的線性組合就是 $f = \sum \alpha_\lambda \rho_\lambda$ ，而係數就是 $\alpha_\lambda = \langle f, \rho_\lambda \rangle$ 。以下將利用 R^+ 探討投影係數 α_λ 在空間 \mathcal{R} 的意義。根據上面的式子，我們先找到一個函數 G ，使得 $R^+G = \rho_\lambda$ ，然後就可以知道 $\alpha_\lambda = [Rf, G]$ 。

由於 $\rho_\lambda = \mathcal{F}^{-1}\hat{\rho}_\lambda$ ，亦即

$$\begin{aligned}\rho_\lambda(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \hat{\rho}_\lambda(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{-\frac{1}{2}} (\hat{\psi}_{j,k}(|\omega|) w_{i,\ell}^\sigma(\theta) + \hat{\psi}_{j,k}(-|\omega|) w_{i,\ell}^\sigma(\theta + \pi)) \\ &\quad e^{i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} |\omega| d\omega d\theta\end{aligned}$$

第二個等號是由 (2.10) 代入所得到的。令

$$\psi_{j,k}^+(t) = (\Delta^+ \psi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\frac{1}{2}} e^{it\omega} \hat{\psi}(\omega) d\omega$$

則

$$\begin{aligned}\rho_\lambda(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\hat{\psi}_{j,k}^+(x \cos \theta + y \sin \theta) w_{i,\ell}^\sigma(\theta) + \\ &\quad \hat{\psi}_{j,k}^+(-x \cos \theta - y \sin \theta) w_{i,\ell}^\sigma(\theta + \pi)) d\theta \\ &= R^+((\Delta^+ \otimes I)W_\lambda)\end{aligned}$$

在這裡 $(\Delta^+ \otimes I)W_\lambda$ 的意思是 Δ^+ 作用於 W_λ 的第一個變數 (t)， I 作用於 W_λ 的第二個變數 (θ)，故

$$\langle f, \rho_\lambda \rangle = \langle f, R^+((\Delta^+ \otimes I)W_\lambda) \rangle = [Rf, (\Delta^+ \otimes I)W_\lambda]$$

而且很顯然的 $\Delta^+ \otimes I$ 對 $[\cdot, \cdot]$ 內積是 **self-adjoint**，因此

$$\alpha_\lambda = [Rf, (\Delta^+ \otimes I)W_\lambda] = [(\Delta^+ \otimes I)Rf, W_\lambda]$$

Δ^+ 我們稱之為 $\frac{1}{2}$ 次微方算子，因為 $\mathcal{F}_t^{-1}[i\omega \hat{\psi}(\omega)] = \psi'(t)$ ，而 $(\Delta^+ \psi)(t)$ 在感覺上很像是 $\mathcal{F}_t^{-1}[i\omega^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}(\omega)]$ ，所以我們稱它為 $\frac{1}{2}$ 次微方算子。

最後，我們得到了一個結論：函數 f 經由 ρ_λ 的分解所得的係數，與該函數先經過 **Radon** 轉換後，再做 W_λ 凌波轉換所得的係數是非常接近的。換句話說，**ridgelet** 分解相當於在 **Radon domain** 裡作凌波轉換。我們知道凌波轉換處理一維訊號的奇異點表現非常好，不過在二維時就差強人意，但是有了 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的另一組正則基底 $\{\rho_\lambda\}$ 後，我們可以先將訊號經過 **Rodan** 轉換，將直線型式的奇異點轉成點狀的奇異點，而後再做凌波轉換，這樣子我們就可以改善凌波轉換在處理二維訊號時的缺點。

第三章 二維影像實驗

前面的章節我們介紹了兩種訊號處理的方法：一是 `nilup`，另一是 `ridgelets`。`nilup` 在一維訊號處理上，算是令人滿意，然而對於二維訊號處理，我們用同樣的理論，先計算列向量後，再計算行向量，這個程式就寫在 `nilup2d.m` 檔案裡。然而，因為凌波轉換在邊 (`edge`) 上的處理本來就是先天不足，所以引用 `ridgelets` 來改善這個問題，所以在這一章裡我們要探討 `nilup2d` 在邊上的敗筆，以及 `ridgelets` 是否真能解決這個問題。

3.1 `nilup` 2D 實驗

爲了能夠明顯的看見影像合成後在邊上的反應，我們先做一個測試用的八角形。首先，我們利用 `Matlab` 內建的色譜做一個 128×128 的 64 階灰階八角形，八角形的裡面定成 5，外面定成 60，如圖 `Figure 15`，它就是我們實驗的對照組。然後，我們再用 `naive` 方法將八角形縮小一倍。所謂的 `naive` 就是在每一行每一列中，隔幾個點後取一個點，這樣就可將影像縮小，例如：每隔兩個點取一點，就是把原圖縮小一倍。這是縮小影像最自然的方法 [`Figure 16`]。

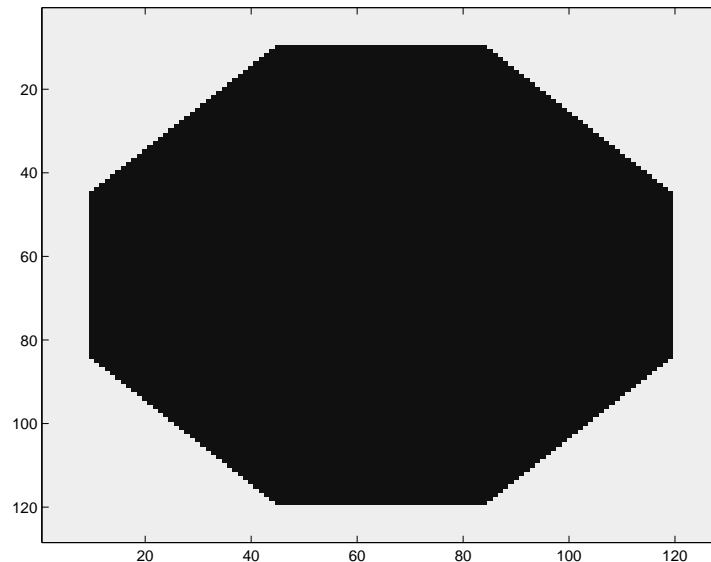


Figure 15

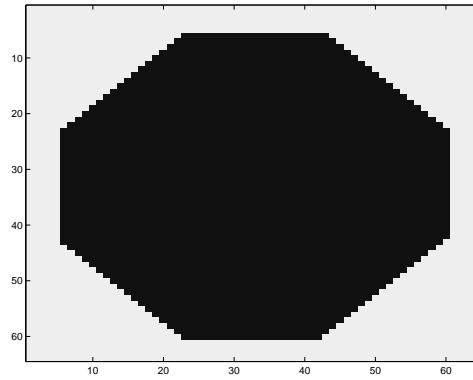


Figure 16

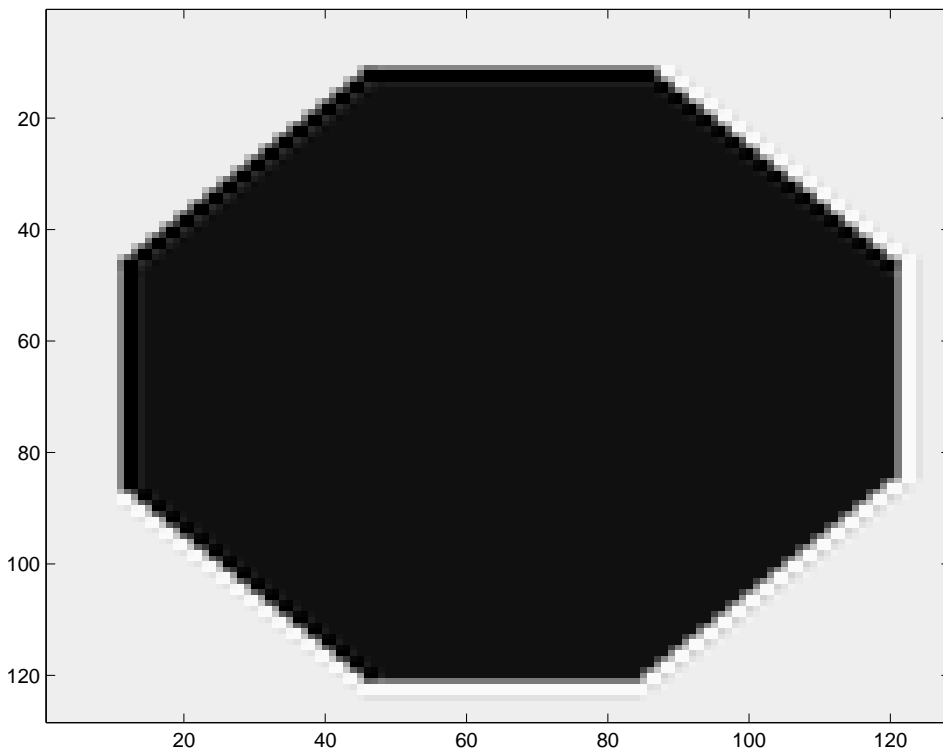


Figure 17

[Figure 17] 就是將縮小的圖用 `nilup2d` 放大的結果，我們很明顯的可以看到在八個邊上的“鬼影”。現在我們取 Figure 16 的第 15 列與 Figure 18 的第 16 列來看看 [Figure 18]，由於在每一列每一行中都有兩個突然上升及下降的地方，因此根據一維的實驗可知，在有 `jump` 的地方會有類似超射的現象發生，果不其然，而又因為凌波函數不是對稱的，所以只會在 `jump` 的右邊產生鬼影，因此從 Figure 18 中，我們看見的鬼影都在邊的右邊及下面，較特別的是右下方的斜邊，在做列運算的時候邊的右方已經出

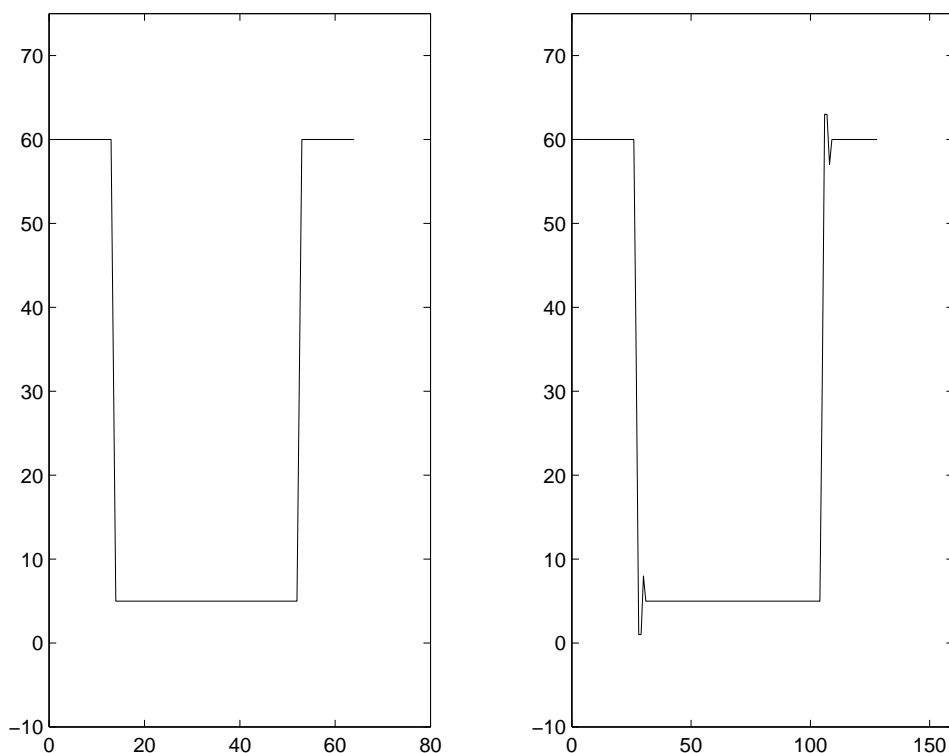


Figure 18

現鬼影，而在做行向量的時鬼影被運算了一次並且在同樣的地方產生新的鬼影，所以在 Figure 18 中明顯可以看到右下方的鬼影和其他地方不一樣。

現在我們用線性差分及三次差分來測試看看 [Figure 19]、[Figure 20]。結果很顯然的，在邊界上的鬼影仍然沒有改善。

由於我們無法從改變高頻而使得超射現象消失，因此我們現在利用 *differece wavelets* [7] 的原理，以原圖的偶數點 (v_{2n}) 為低頻，而採用 $\overline{v_{2n}v_{2n+1}} : \overline{v_{2n+1}v_{2n+2}}$ 的比例，將 $h = \frac{v_{2n+2}-v_{2n}}{2} - v_{2n+1}$ 均分成 h_{n1} 、 h_{n2} 兩段，它們就是我們要高頻。我們將這個程式寫在 *difwav.m* 檔案中。[Figure 21]、[Figure 22] 是一維的實驗結果，[Figure 23] 就是取 Figure 18 的第 15 列放大後的結果，值得注意的是超射現象在這個圖上已經沒有了。

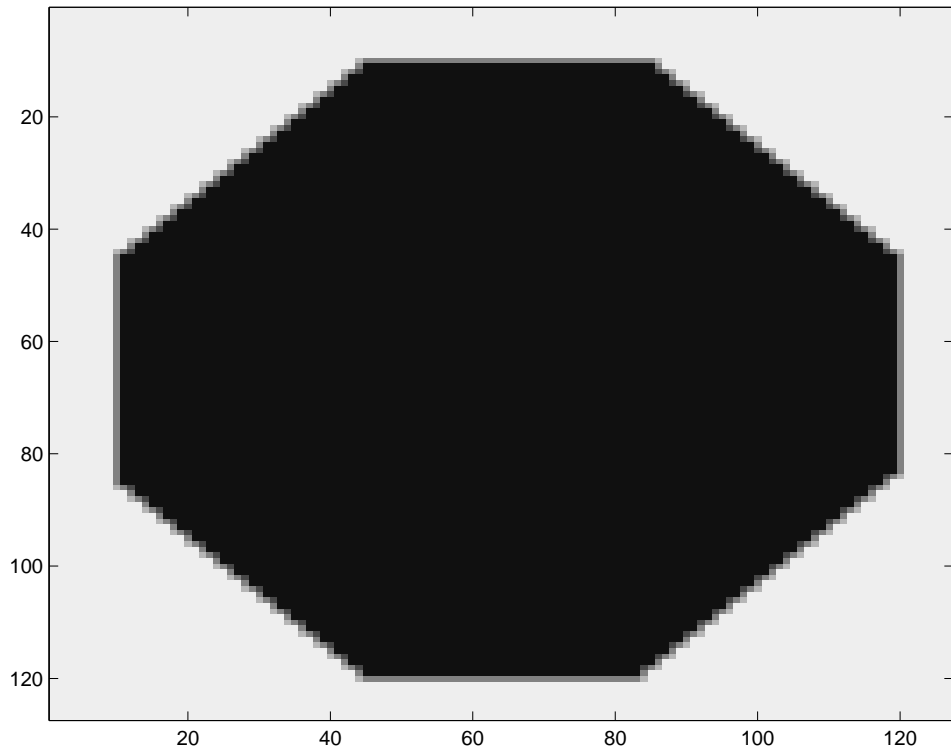


Figure 19

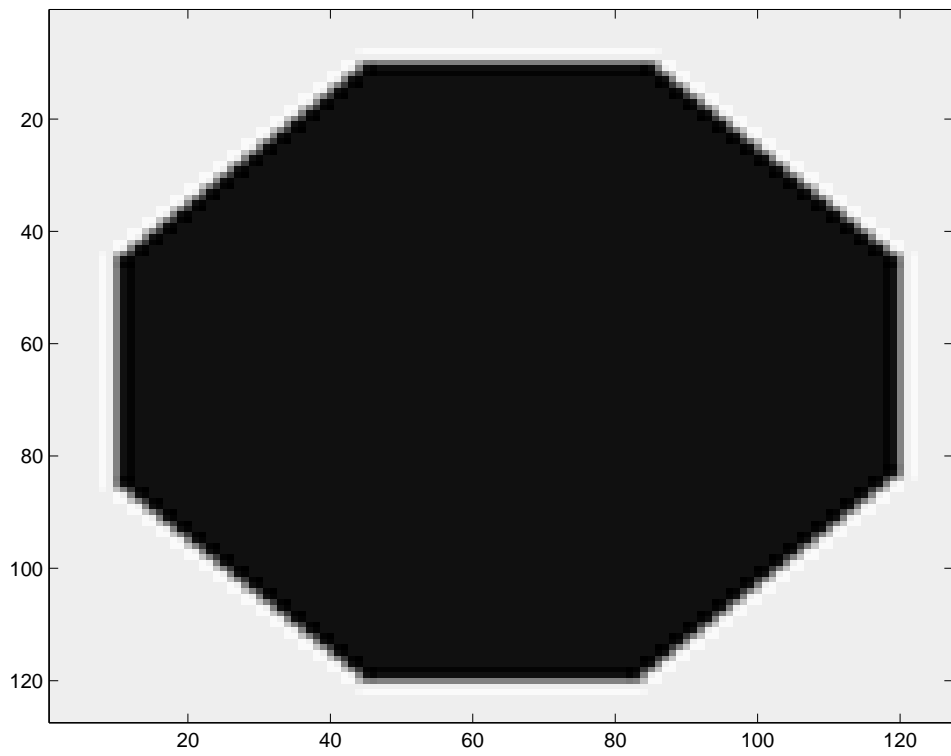


Figure 20

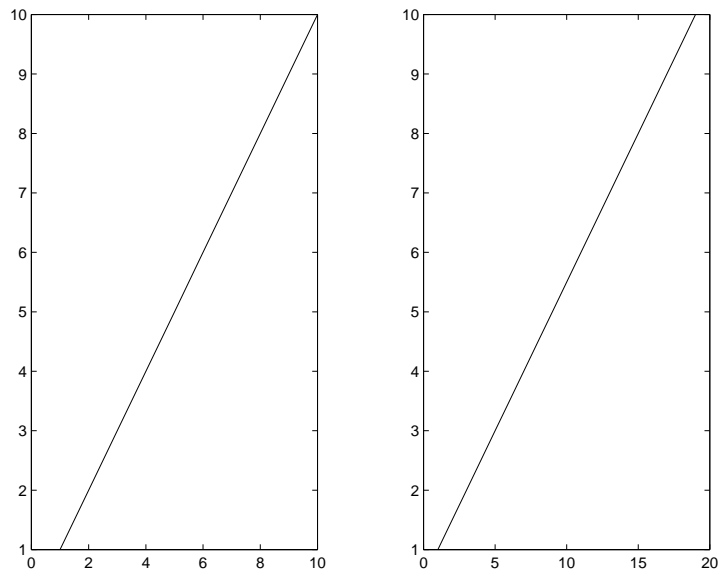


Figure 21

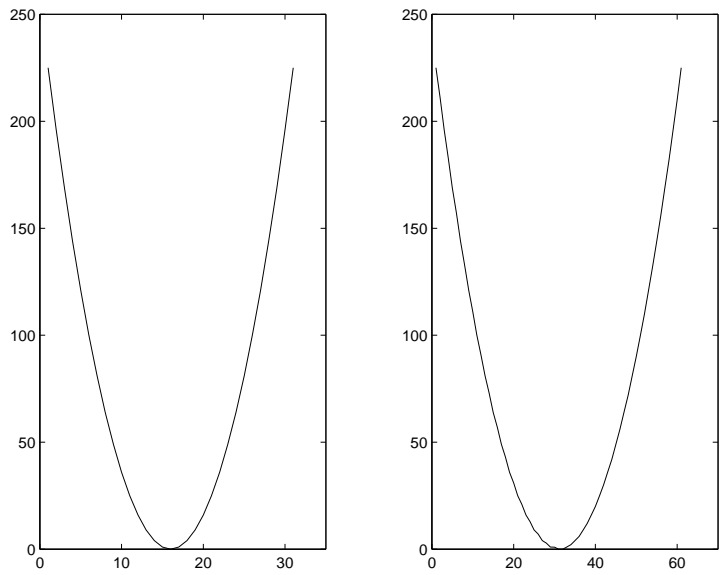


Figure 22

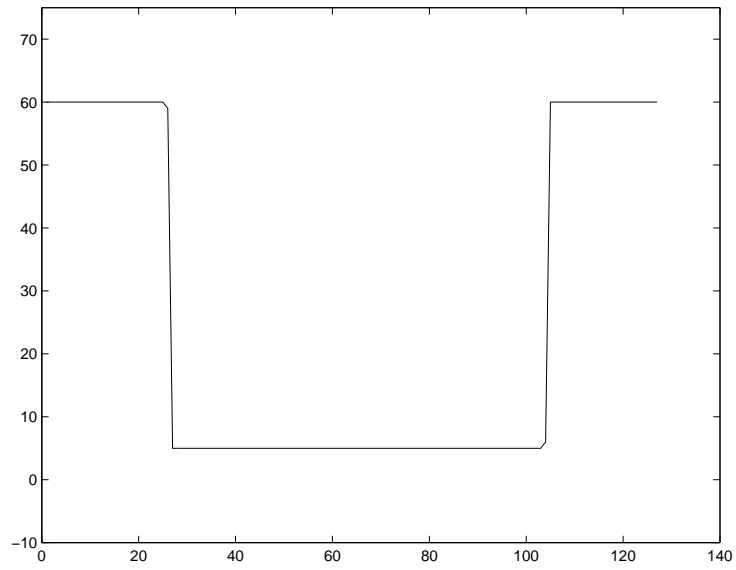


Figure 23

現在我們做二維的實驗，同樣的，我們先做列向量的運算再做行向量的運算 [Figure 24]。

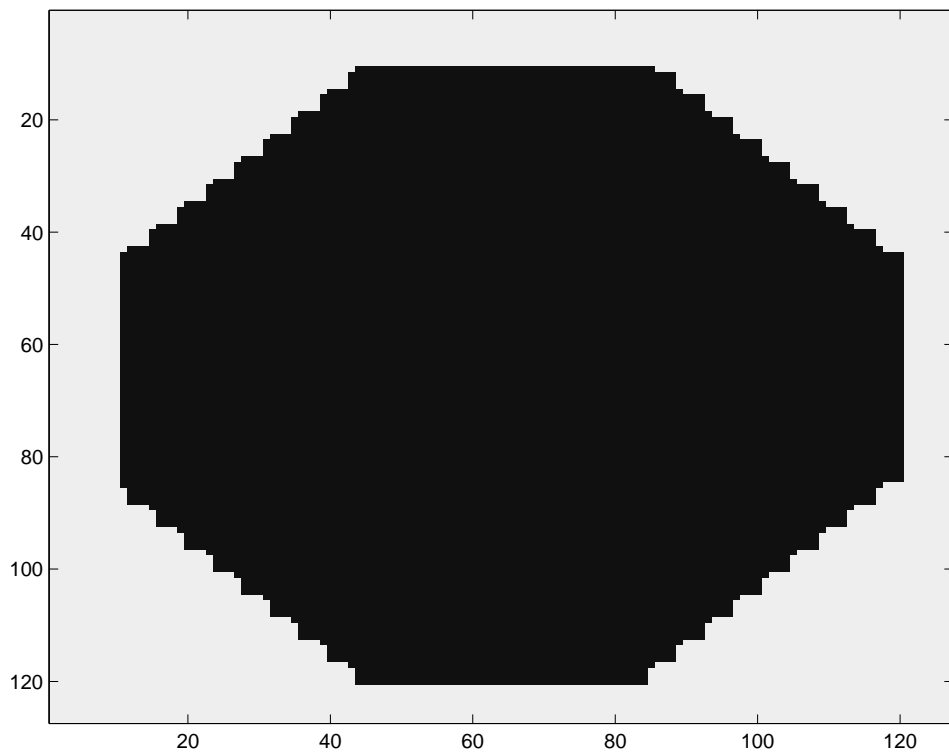


Figure 24

在平行及垂直邊上的鬼影已經不見了，但是在斜邊卻出現大小不一的鋸齒，所以現在我們拿一個斜邊來實驗。先做列向量的運算 [Figure 25]，我們發現它每隔兩列就增加了一個灰色的點在斜邊的右邊，如此一來，不只出現鬼影，斜邊的長寬比列已經和原來的不一樣了。我們再做行向量的運算 [Figure 26]，又發生同樣的情形，每隔兩行就出現一個灰色地帶，只是因為做列向量時已經出現過一次灰色的點，因此在做完行向量的運算後，總共多了三個不一樣數值灰色的點，這就是屬於我們說的鬼影部分。但是姑且不論鬼影的問題，事實上，在做完二維的放大後，我們已經將圖原來的樣子給改變了。

可見得，儘管我們運用技巧將超射現象消除了，但是在二維的斜邊上，依然會產生問題，所以當我們再做二維影像放大時，先做列向量的運算再做行向量運算的方法是不可行的，我們必須先探測到哪裡有斜邊後，再從該斜邊的垂直方向做放大的運算，這也是為什麼我們第二章要說明 **ridgelets** 的原因。

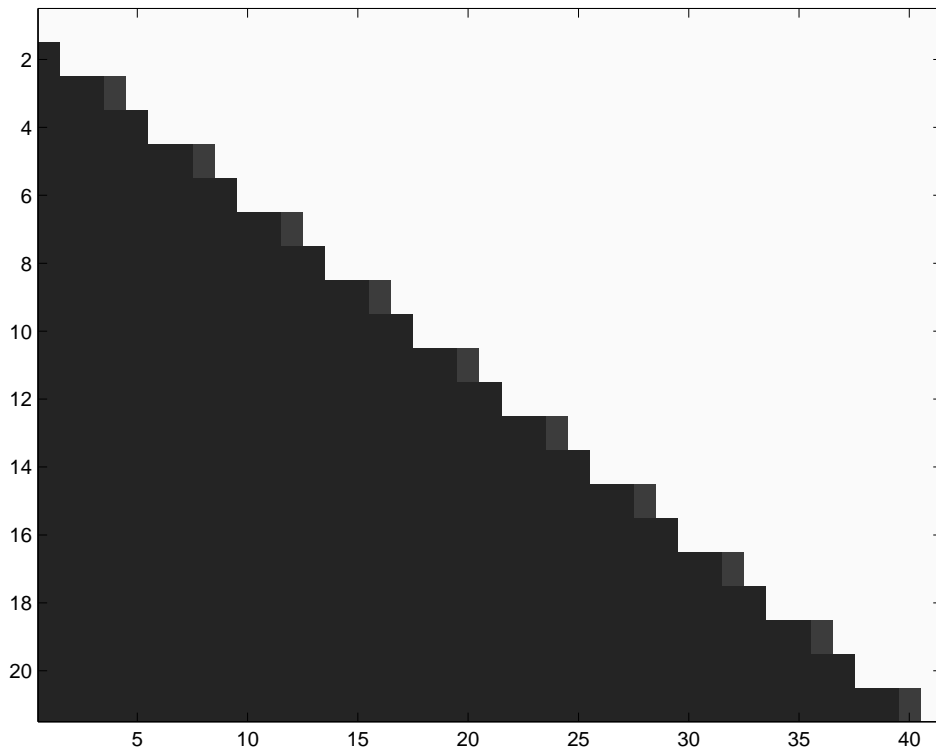


Figure 25

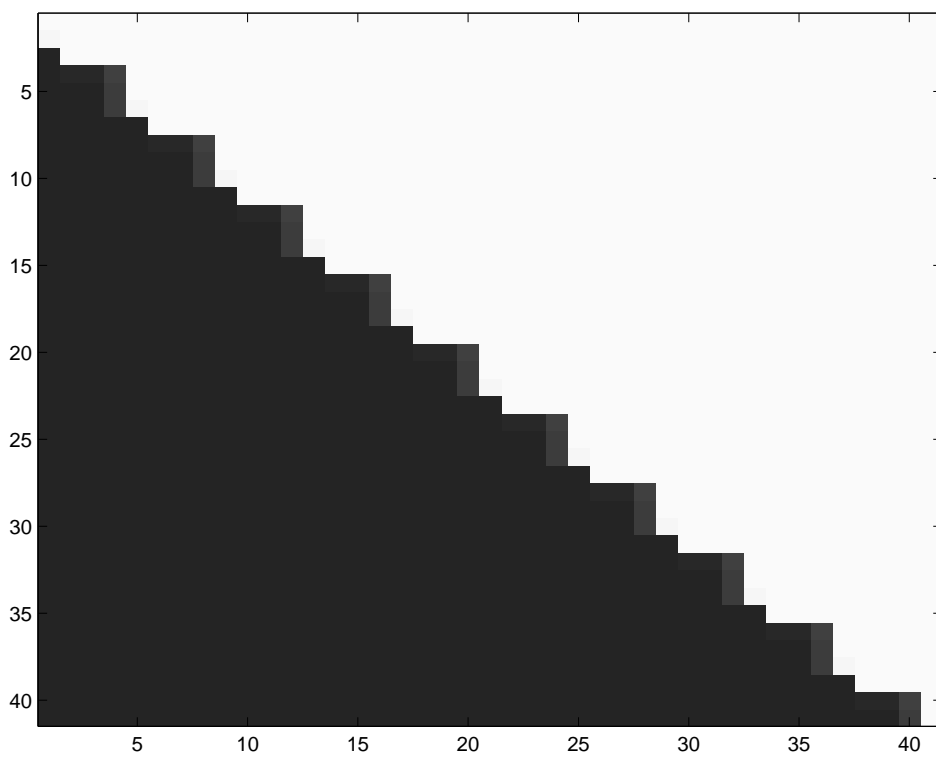


Figure 26

3.2 ridgelets 的數值實驗

在第二章中我們洋洋灑灑的寫了一堆定義，殊不見那些定義的“樣貌”為何，況且也不知道 ridgelets 的真正做用如何，因此，我們挑了幾個定義，將它數值化並呈現出來。而在最後的實驗中，我們找一些較特殊的例子做實驗，並從結果分析 α_λ 的特質。

由於我們的目標是 $\langle \rho_\lambda, f \rangle$ ，因此我們只挑選 $w_{i,\ell}^\sigma(\theta)$ ([Figure 27]、[Figure 28]) 及 $\psi_{j,k}^+(t)$ 做數值化。我們知道 $w_{i,\ell}^\sigma$ 是週期化的，而 $\psi_{j,k}^+$ 可以進一步推導，如下：

$$\begin{aligned}
 \psi_{j,k}^+(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_{j,k}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2^j}} e^{-i\frac{k}{2^j}\omega} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2^j}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-i\frac{k}{2^j}\omega} e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{2^j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}(\omega) e^{ik\omega} e^{i2^j t \omega} d\omega \\
 &= \frac{2^j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega(2^j t - k)} d\omega \\
 &= 2^j \psi^+(2^j t - k)
 \end{aligned}$$

因此，在數值實驗裡，我們只有將 $\psi^+(t)$ 以公式算出來，並存在 `psiplus.mat` 中，爾後，任何的 $\psi_{j,k}^+(t)$ 均可依查表的方式找出來，[Figure 29] 就是用這種方法做的。另外，在我們的實驗裡令 $j=4$ ，而且當 $|t| > 11.5$ 時， $|\psi^+| < 10^{-4}$ ，所以 $\psi^+(t)$ 的 essential support 為 $[-11.5, 11.5]$ 。

我們同樣的令 $\ell = 4$ ，而且當 $(-1.5, -1.5) < (x, y) < (1.5, 1.5)$ 時， $|\rho_\lambda(x, y)| < 10^{-2}$ ，所以 $\rho_\lambda(x, y)$ 的 essential support 就是 $[-1.5, 1.5] \otimes [-1.5, 1.5]$ 。由於我們的實驗對象都是 64×64 的矩陣，因此 $\rho_\lambda(x, y)$ 就必須是 64×64 的矩陣，我們把 $\sigma = 0$ 的存在 `rho0.mat` 檔案裡， $\sigma = 1$ 的就放在 `rho1.mat` 檔案裡，如果日後要再做 64×64 的矩陣實驗，就可以直接呼叫檔案，但是，如果實驗的對象不是 64×64 的矩陣，則將要從 $\psi^+(t)$ 開始，再做一個和實驗矩陣大小一樣的 $\rho_\lambda(x, y)$ 。

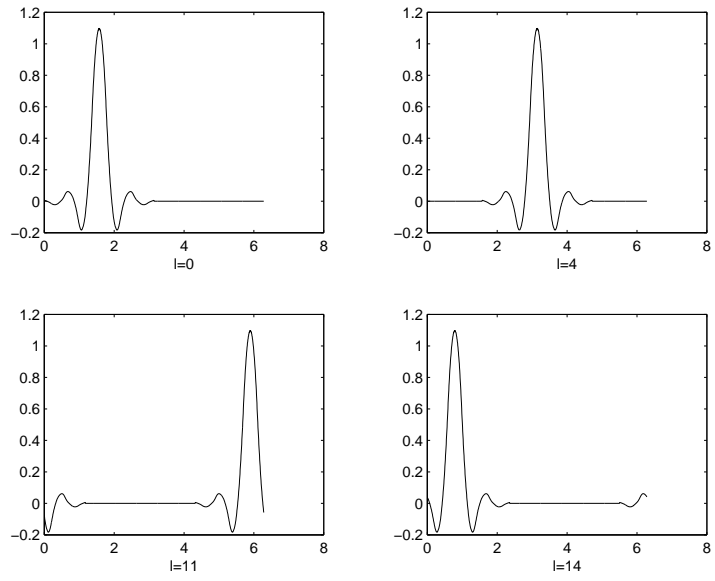


Figure 27 : $w_{4,\ell}^0(\theta)$

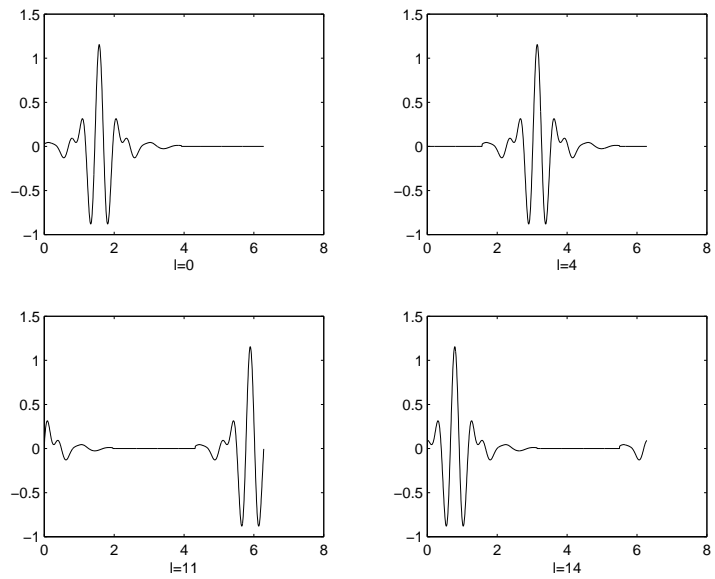


Figure 28 $w_{4,\ell}^1(\theta)$

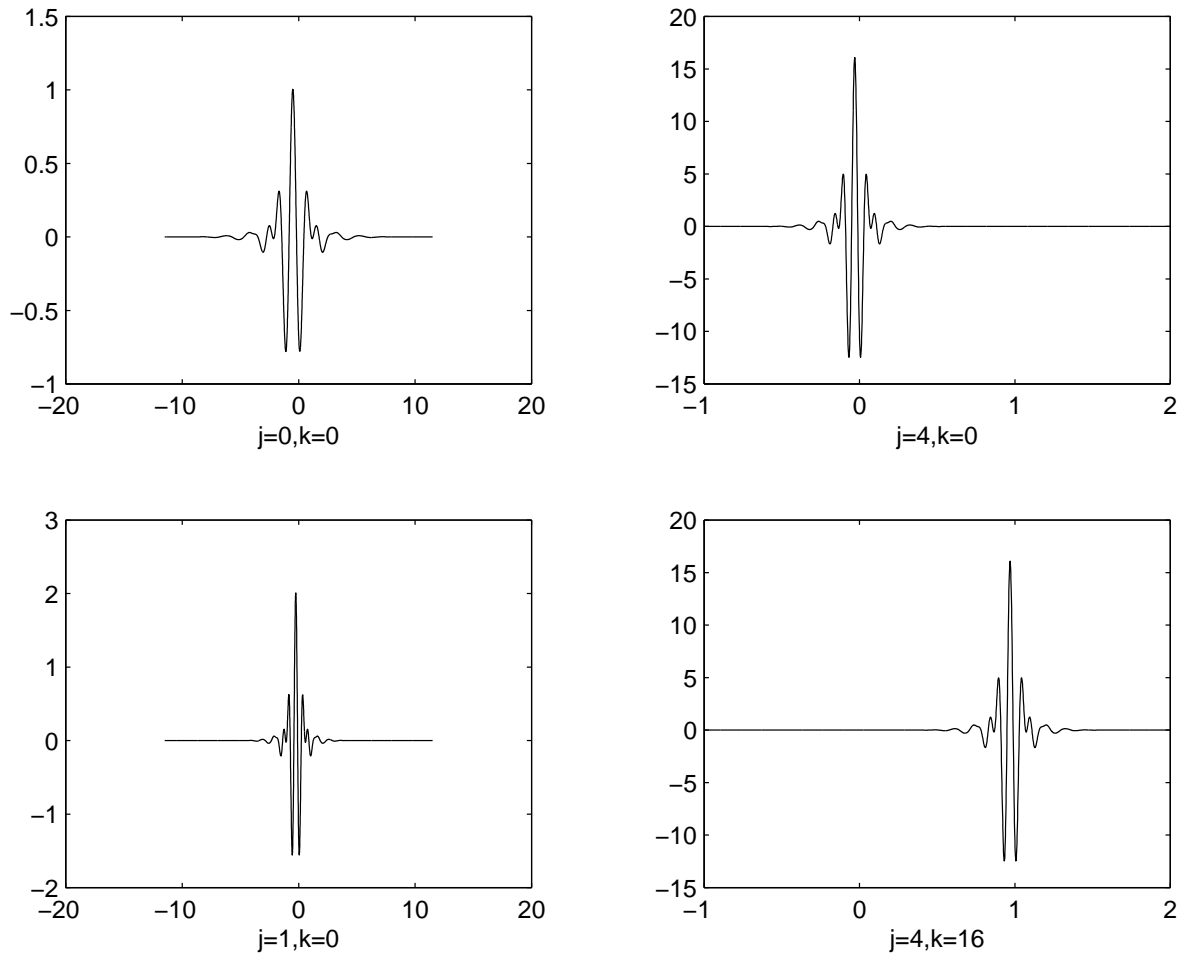


Figure 29 $\psi_{j,k}^+(t)$

以下的圖就是 $\rho_\lambda(x, y)$, $\lambda = (\sigma, 4, k, 4, \ell)$ 。[Figure 30]、[Figure 31] 是 $\sigma = 0$, 且固定 $k = 11$, $\ell = 1, 4, 9, 14$ 。[Figure 32]、[Figure 33] 是 $\sigma = 0$, 但固定 $\ell = 0$, $k = 1, 7, 11, 14$ 。而 [Figure 34]、[Figure 35] 是 $\sigma = 1$, 且固定 $k = 0$, $\ell = 2, 4, 7, 11$ 。[Figure 36]、[Figure 37] 是 $\sigma = 1$, 但固定 $\ell = 13$, $k = 2, 6, 9, 15$ 。從這些圖中可以看見, 當 k 固定時, 隨著 ℓ 漸漸變大, 圖形也會跟著旋轉一周。而當 ℓ 固定, k 漸漸變大, 圖形會以同一方向遠離原點, 並且非零的面積也跟著變大。

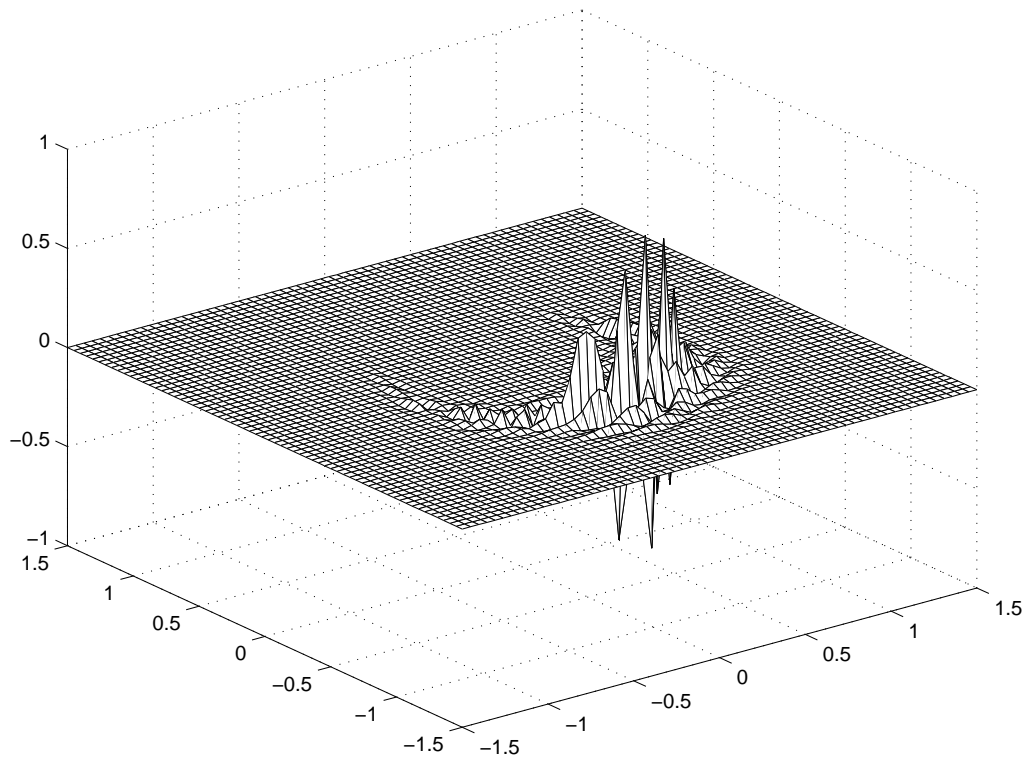
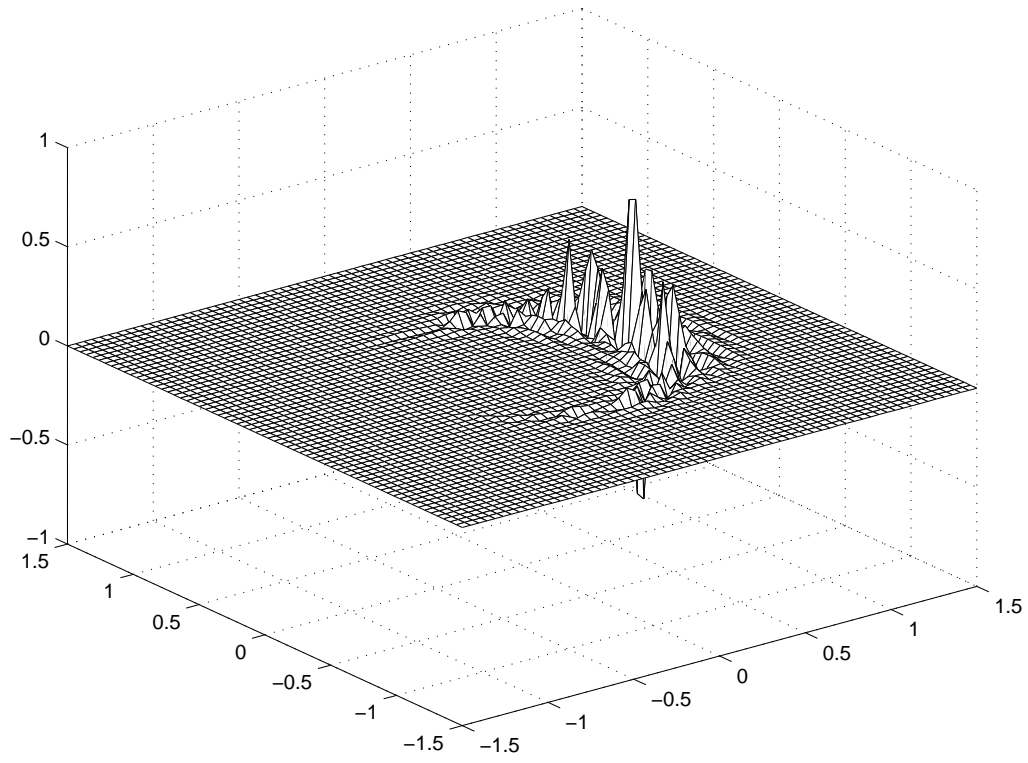


Figure 30 : $\sigma = 0$, $k = 1$, $\ell = 1, 4$

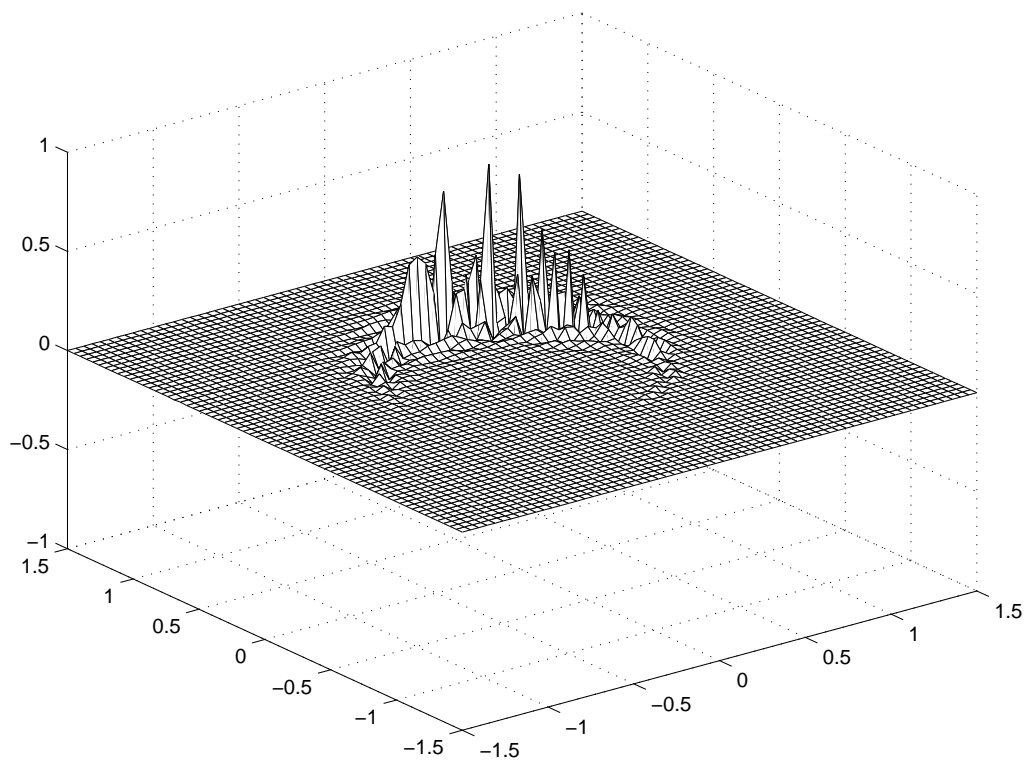
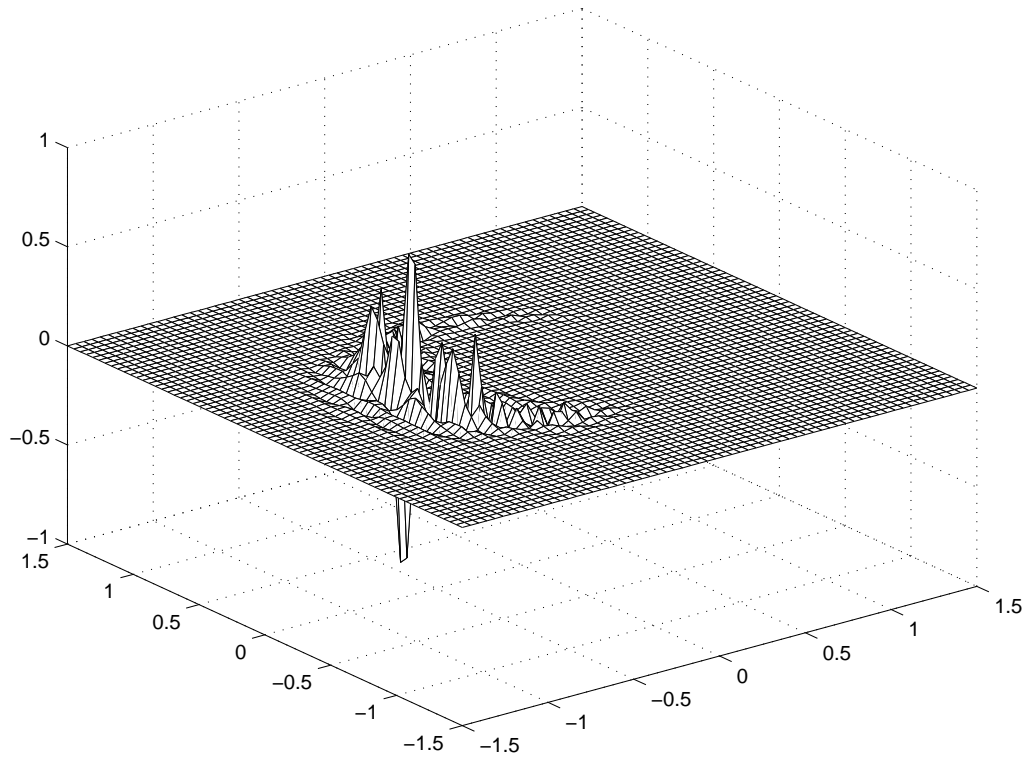


Figure 31 : $\sigma = 0$, $k = 1$, $\ell = 9, 14$

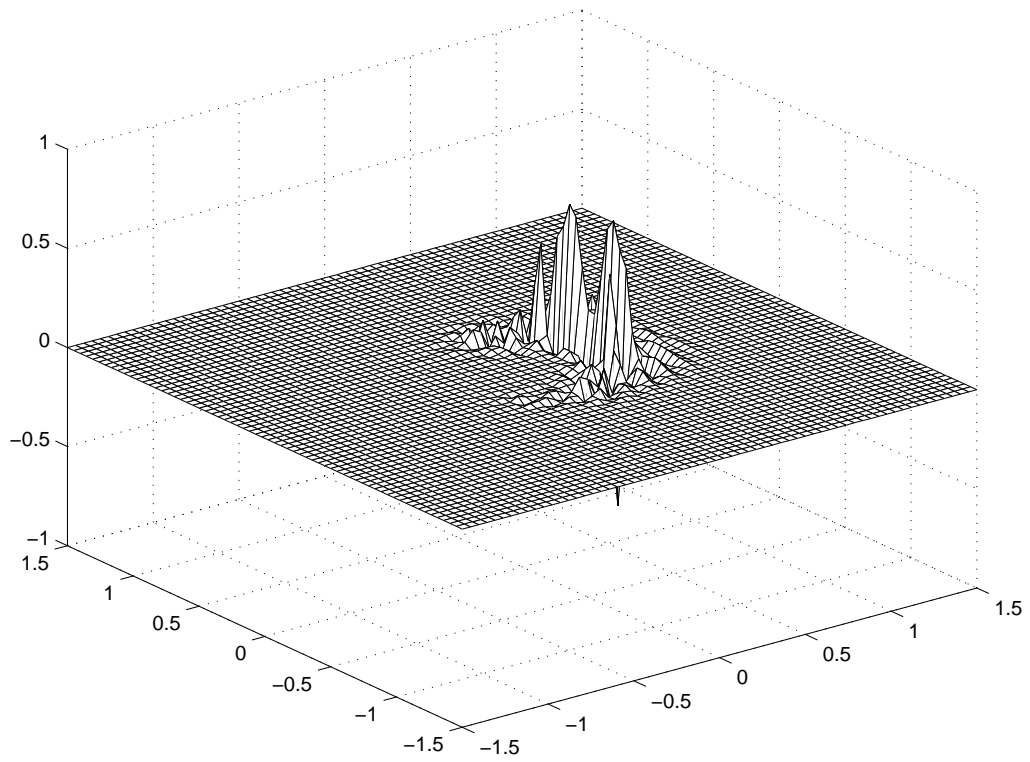
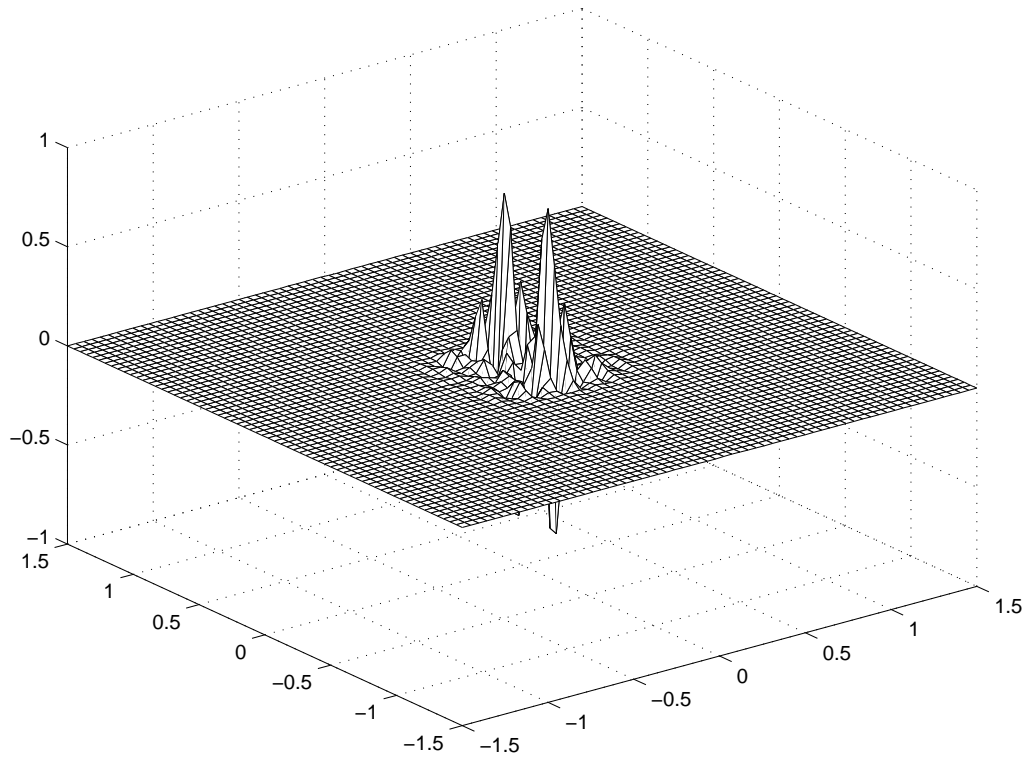


Figure 32 : $\sigma = 0, k = 1, 7, \ell = 0$

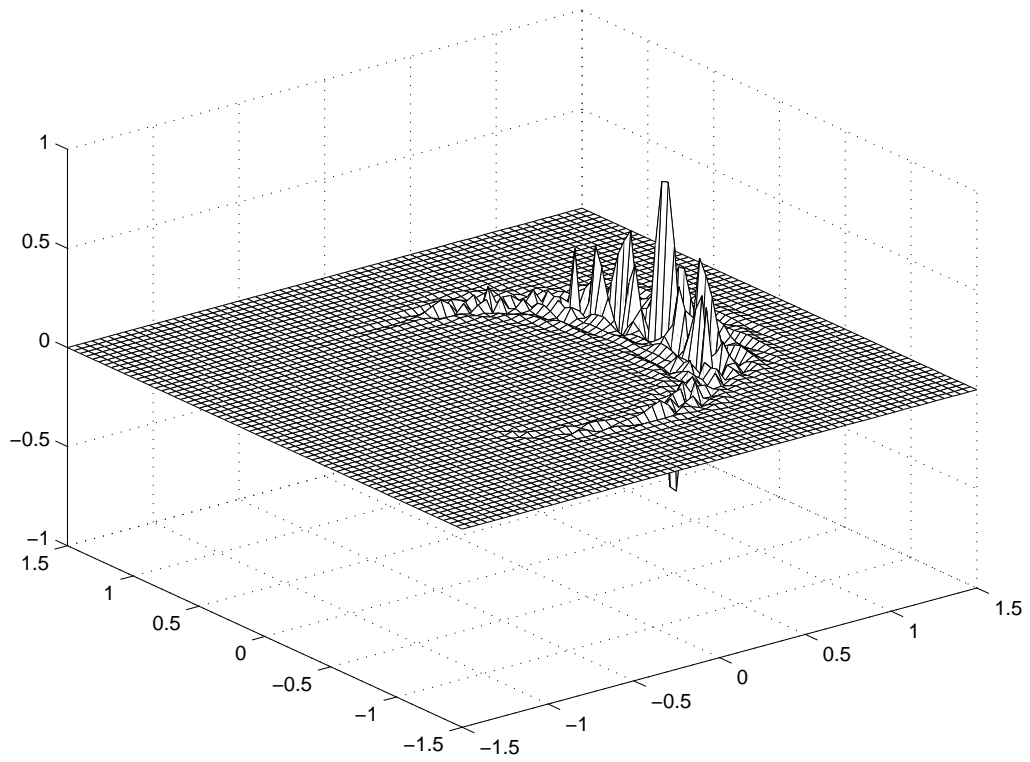
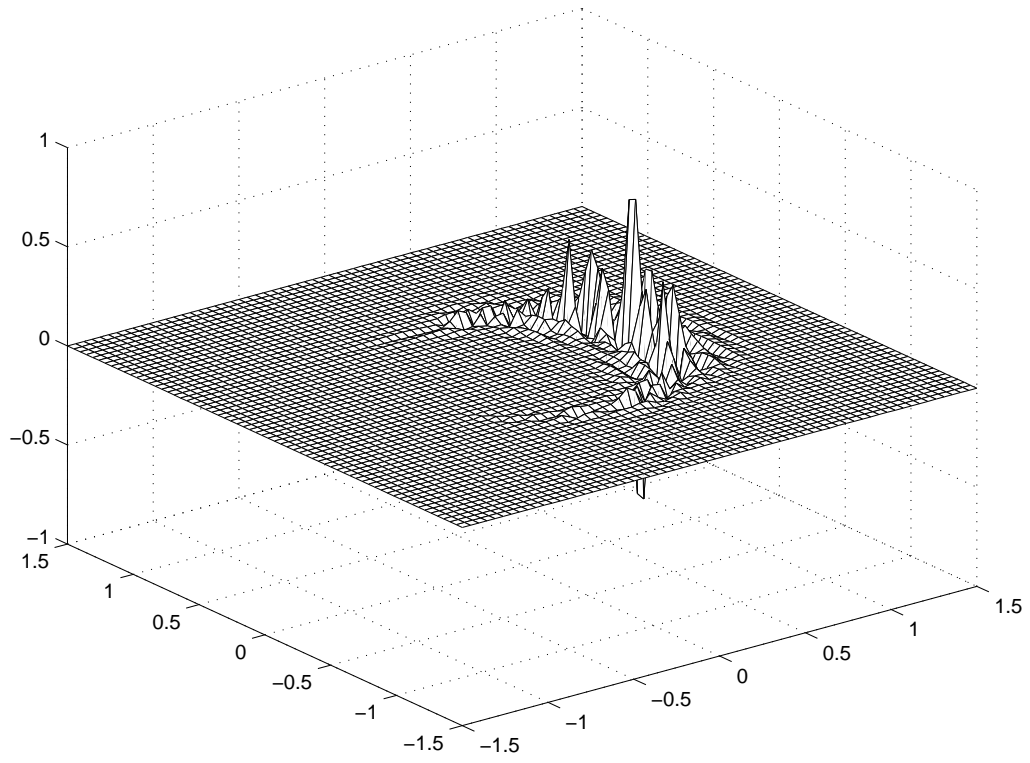


Figure 33 : $\sigma = 0$, $k = 11, 14$, $\ell = 0$

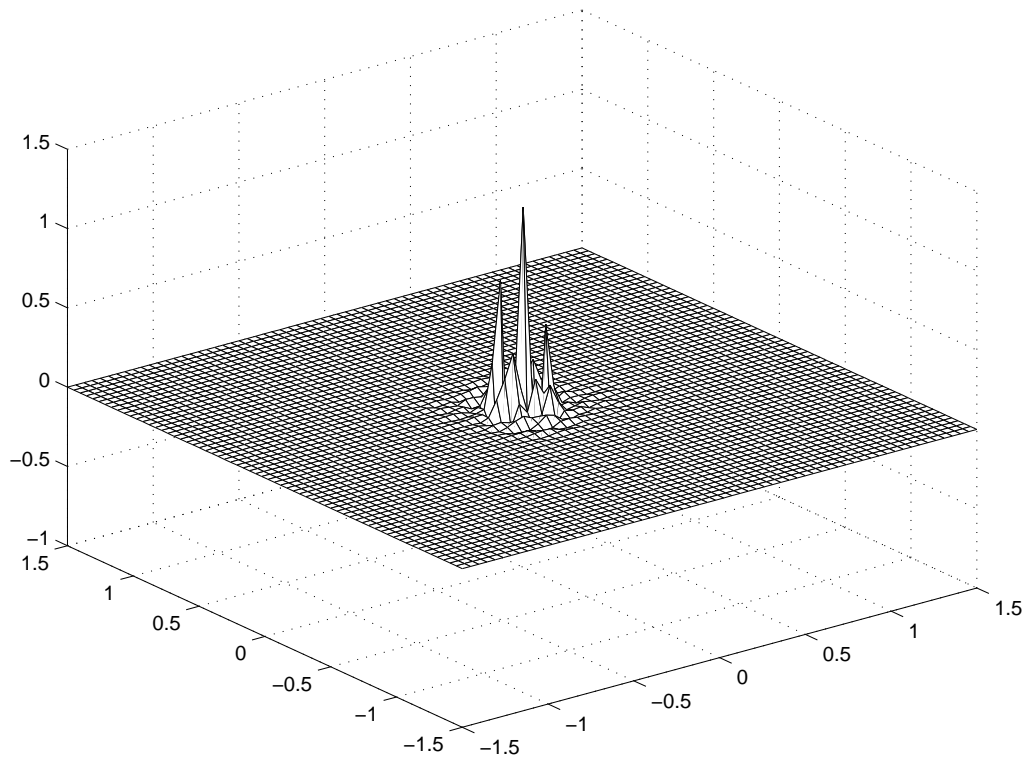
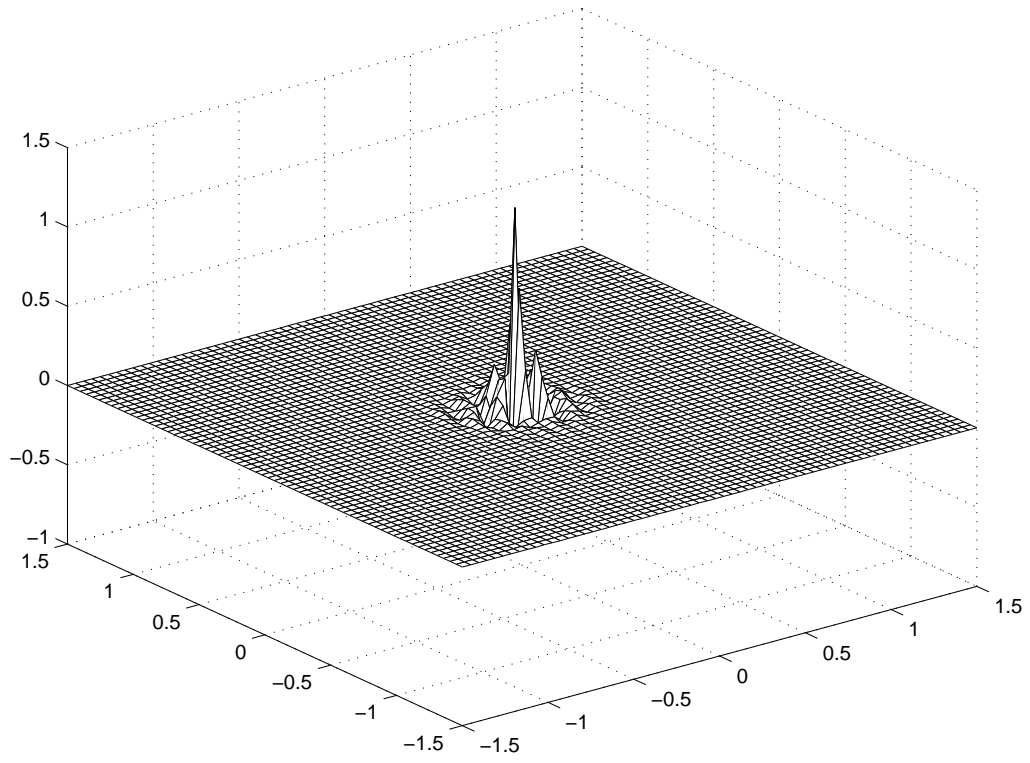


Figure 34 : $\sigma = 1$, $k = 0$, $\ell = 2, 4$

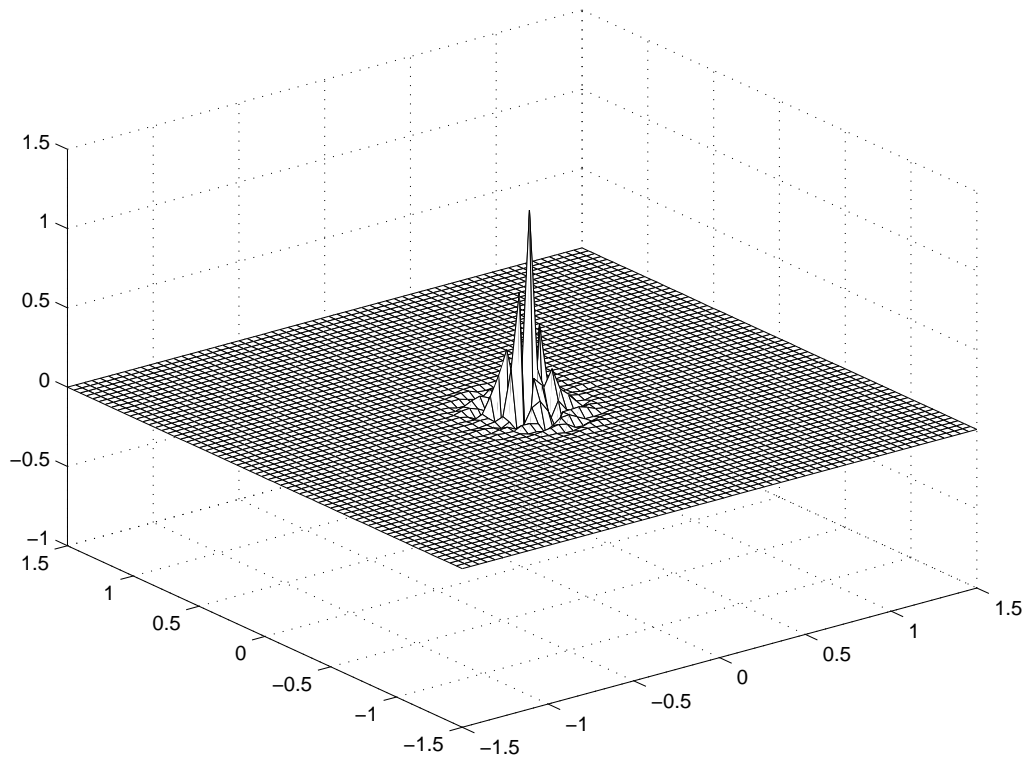
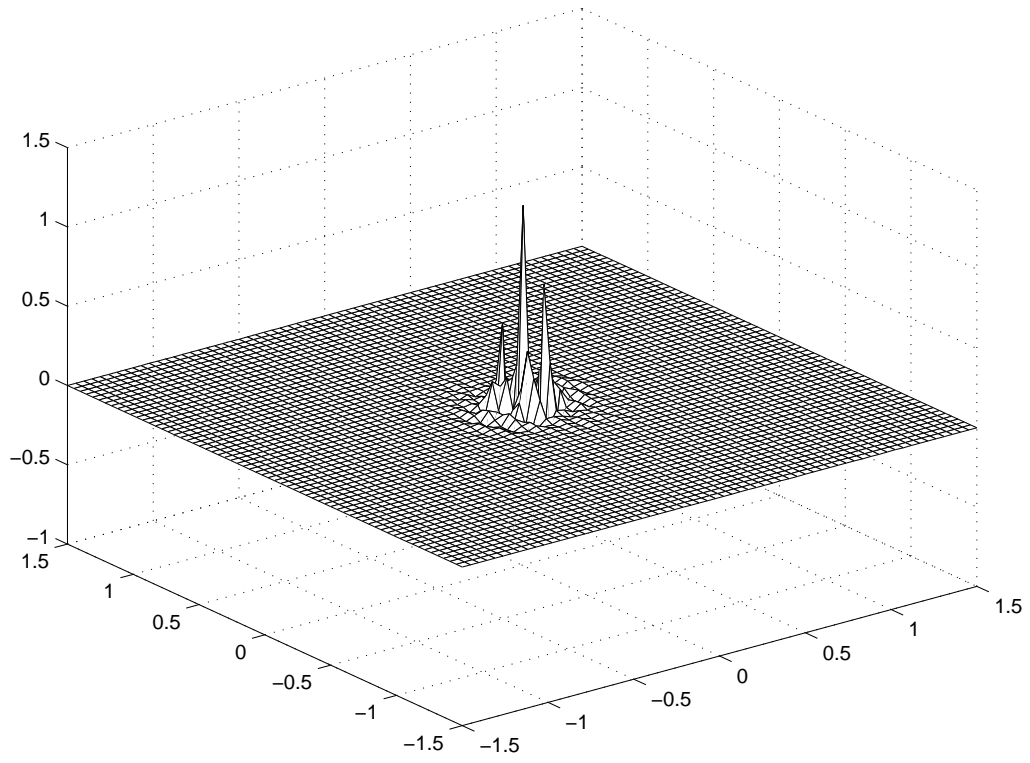


Figure 35 : $\sigma = 1$, $k = 0$, $\ell = 7, 11$

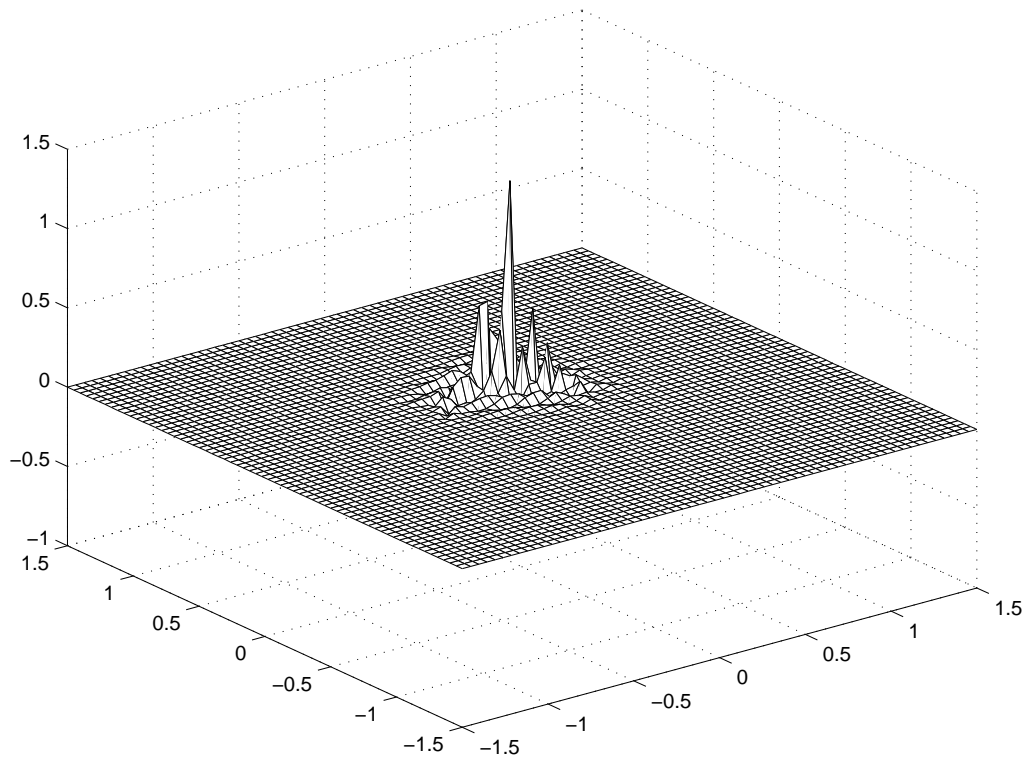
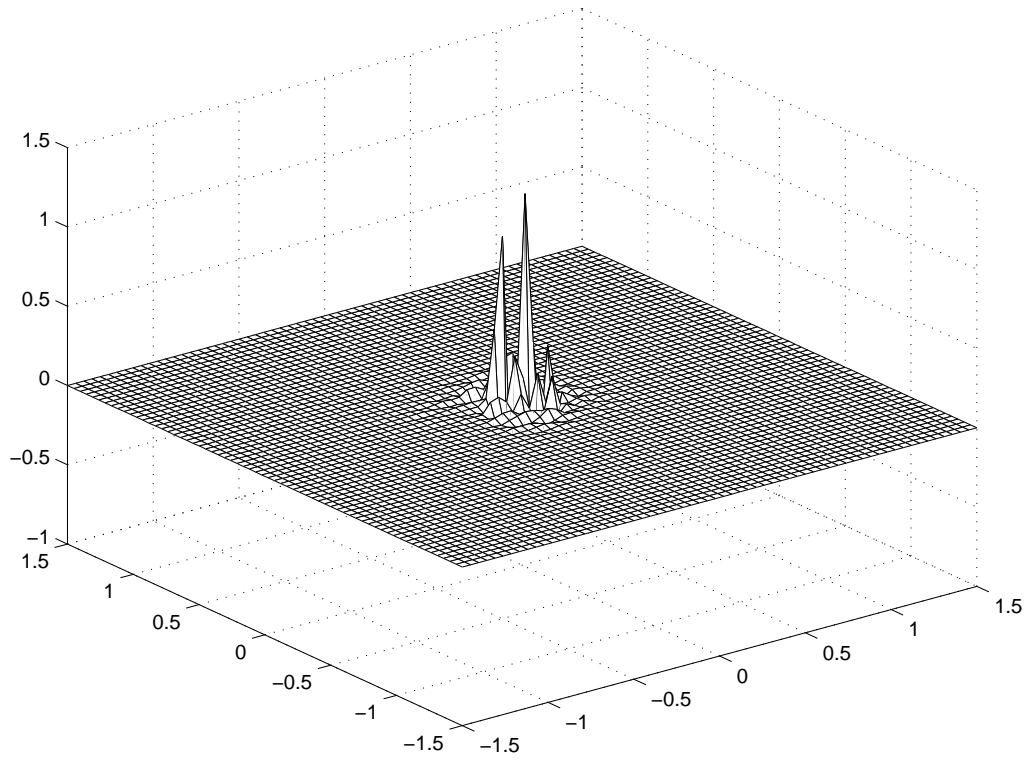


Figure 36 : $\sigma = 1$, $k = 2, 6$, $\ell = 13$

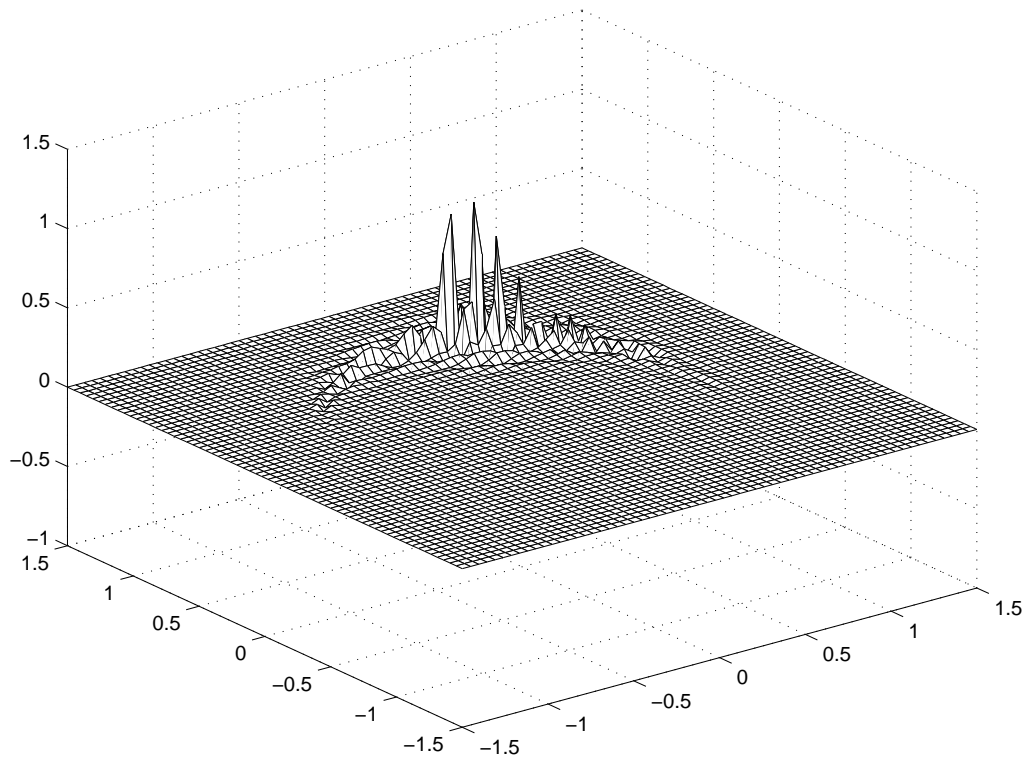
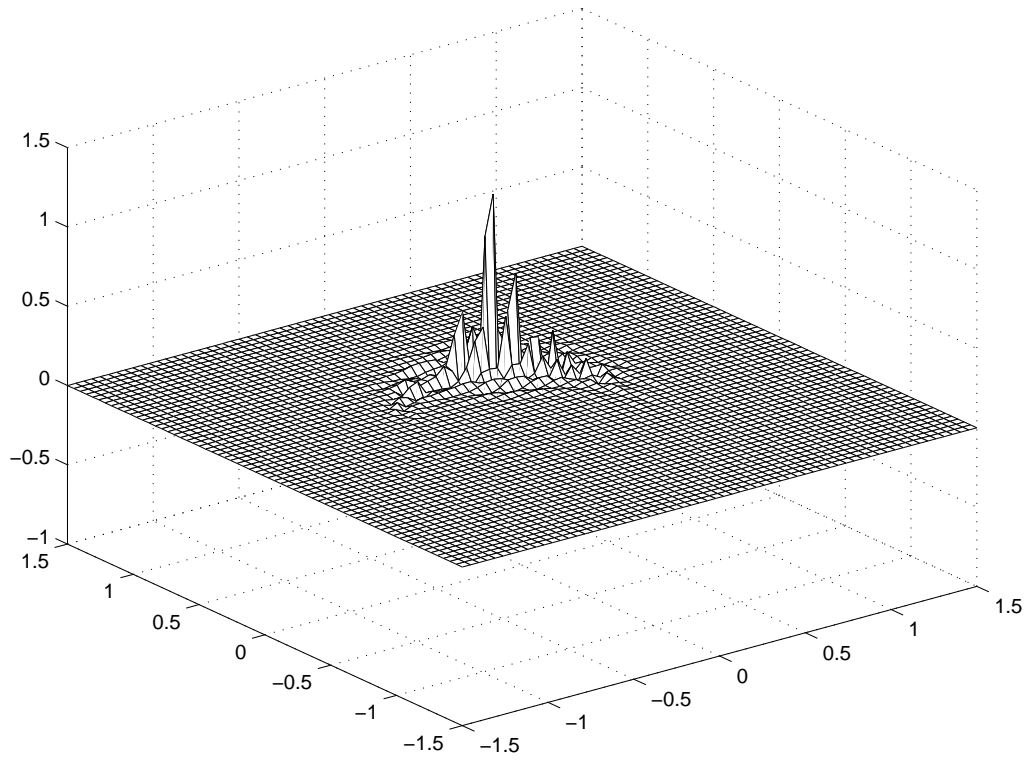


Figure 37 : $\sigma = 0$, $k = 9, 15$, $\ell = 13$

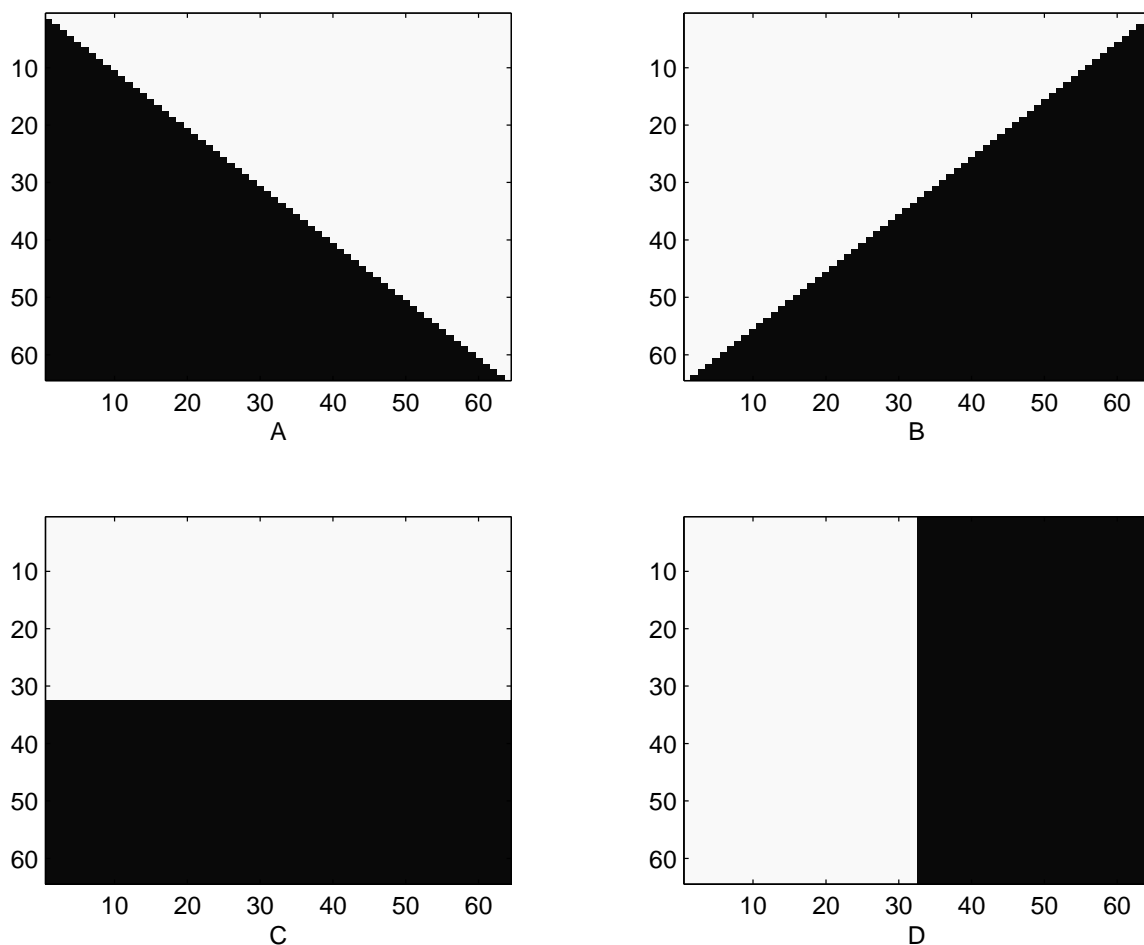


Figure 38

[Figure 38] 是四張 (A, B, C, D) 測試圖。[Figure 39] 是 A、B 圖與 ρ_λ 在 $(-1.5, -1.5) < (x, y) < (1.5, 1.5)$ 範圍的內積之絕對值，也就是 $|\alpha_\lambda|$ ， $\lambda = (1, 4, k, 4, \ell)$ ， $k = 0, 1, \dots, 15$ ， $\ell = 0, 1, \dots, 15$ 。相同的，[Figure 40] 是 C、D 圖與 ρ_λ 內積所得的 $|\alpha_\lambda|$ 。我們也實驗過沒有邊存在的情形，得到的 $|\alpha_\lambda|$ 的平均值差不多是 0.0015 左右，比我們實驗設計的誤差還小。

從 Figure 39 及 Figure 40 這兩個圖，很明顯的可以看出， $\alpha_{(1,4,k,4,\ell)}$ 對大部分的 (k, ℓ) 都只有很小的值，它突顯了在高頻較重要的部分，在 [2, Chapter 5] 中，也說明了這一點。我們至今仍然無法找到一個確切的公式去確定邊的位置，但是也有些心得。[Figure 41] 是 [Figure 39] 的第五列，由於 A 圖是 B 圖轉 90° 而成，所以在 [Figure 41] 裡，我們可以看見下面的圖是上面的圖平移了四個點，C 圖與 D 圖也是一樣的情形。因此，我們知道不管圖形怎麼樣的轉動，我們還是可以探測到邊的存在。

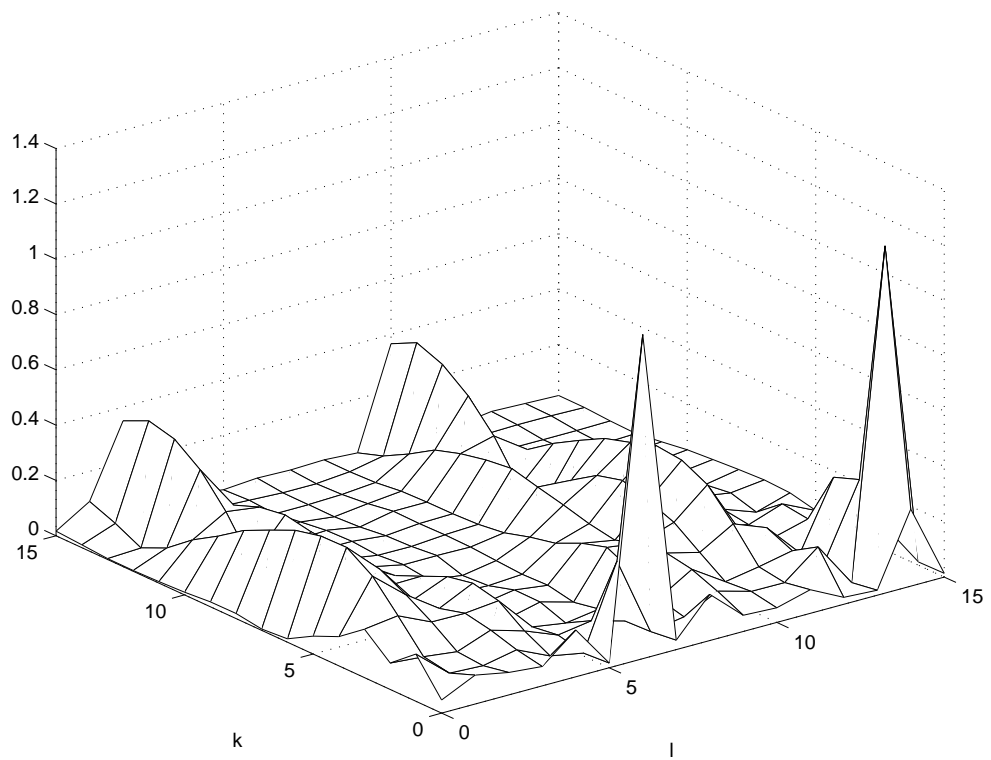
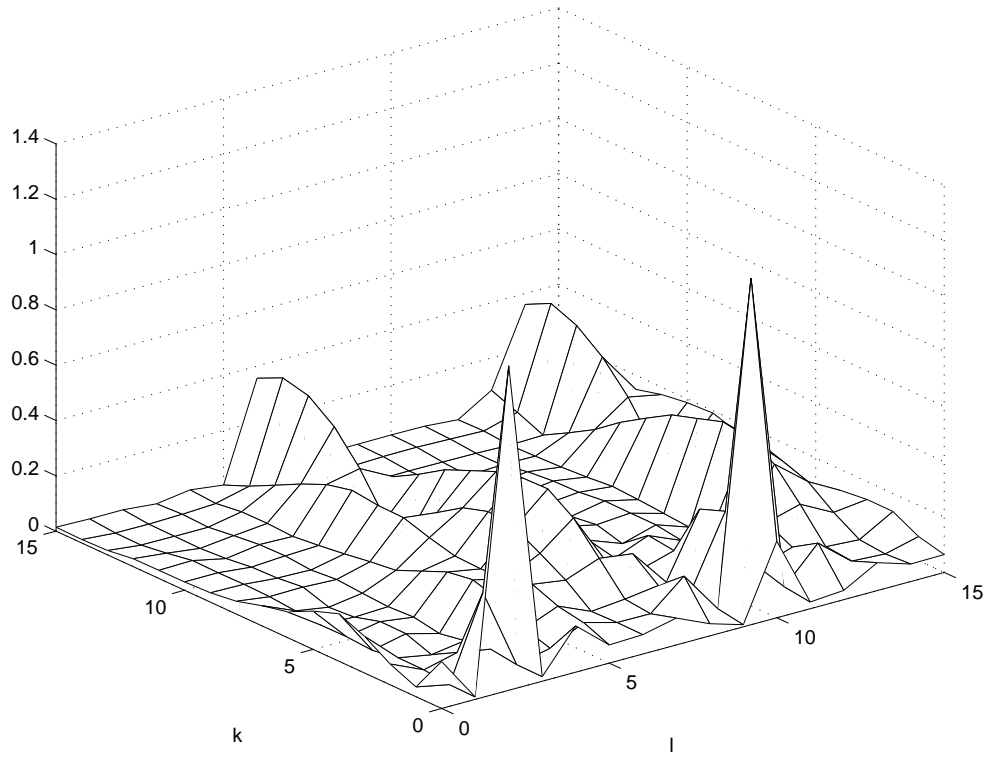


Figure 39 A,B 的 $|\alpha_\lambda|$

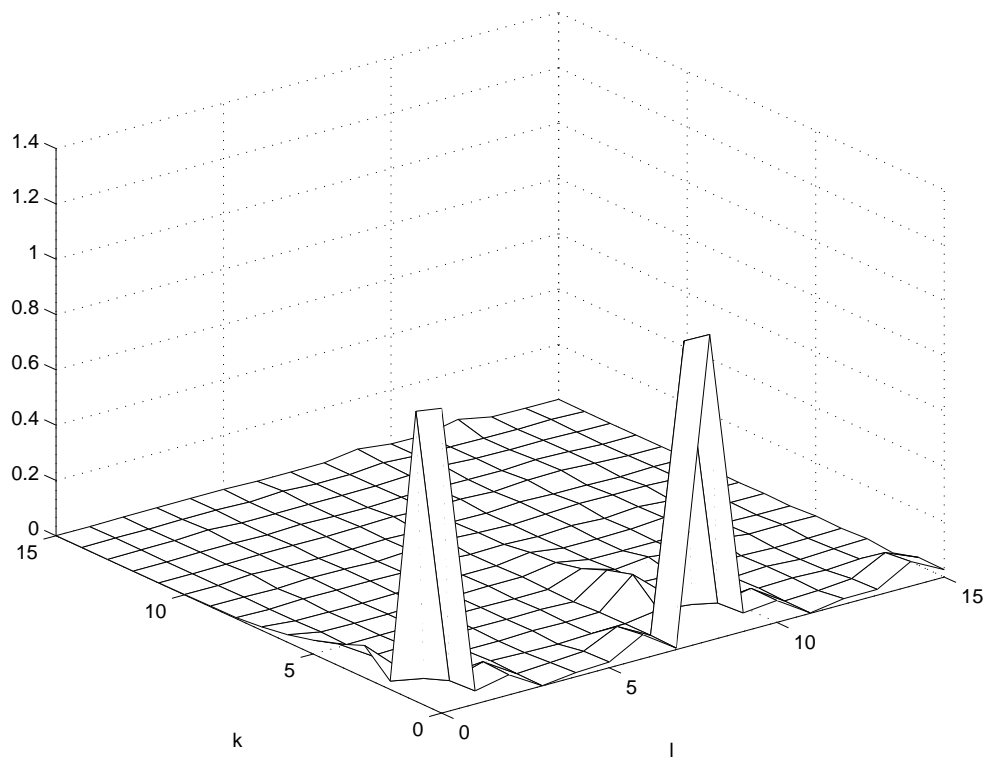
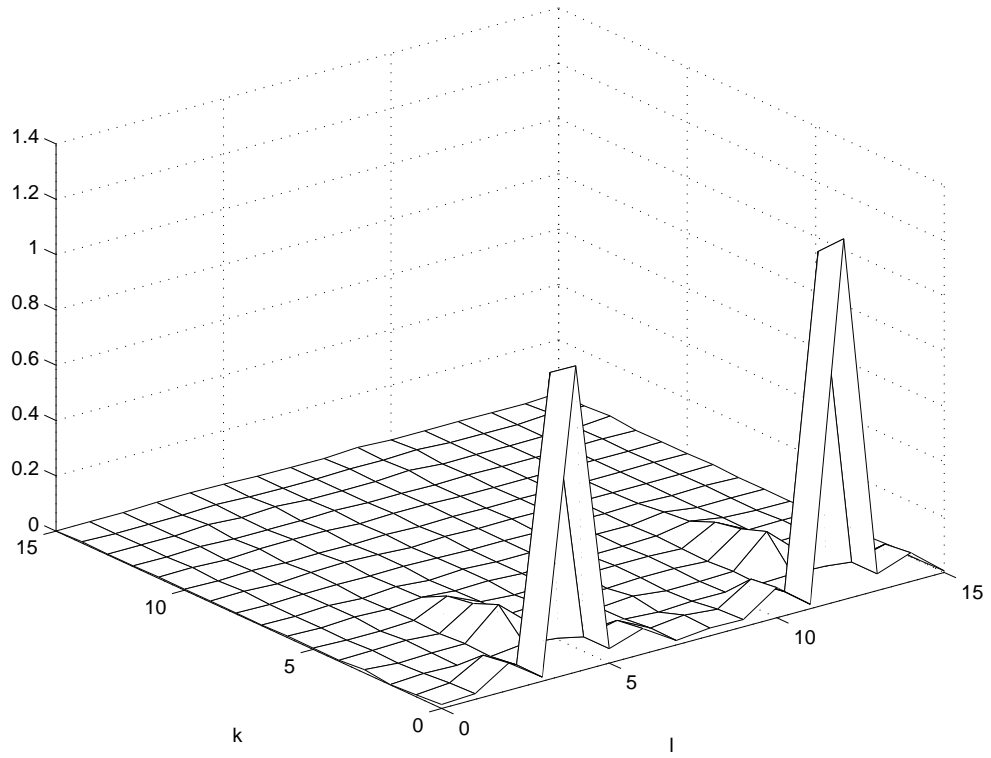


Figure 40 C,D 的 $|\alpha_\lambda|$

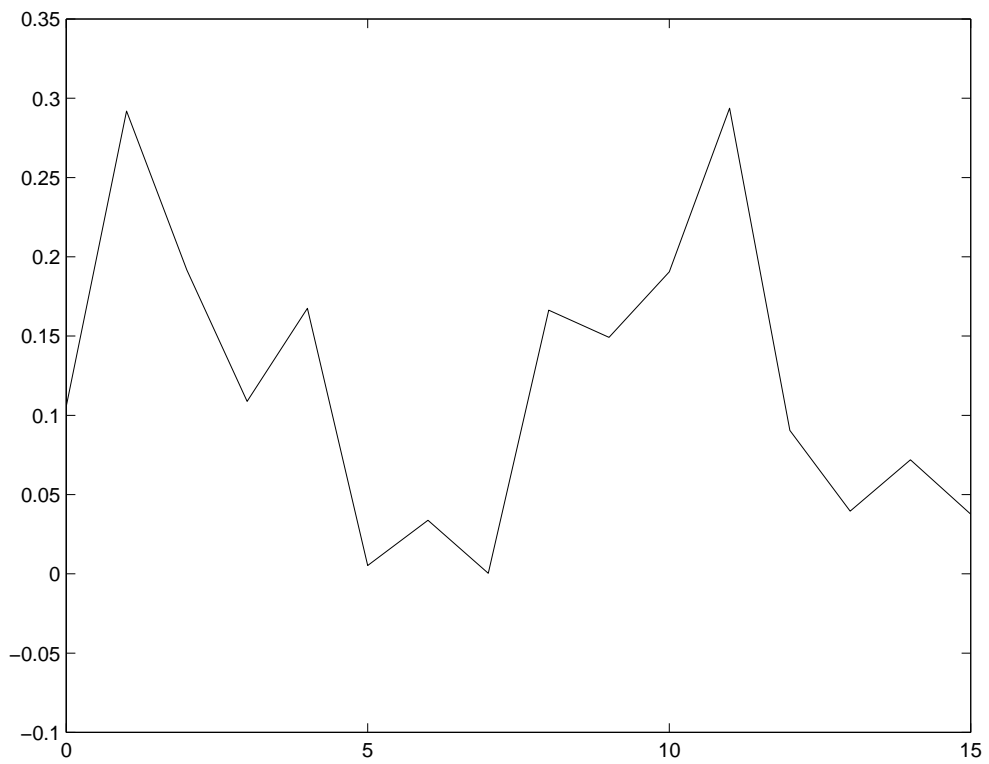
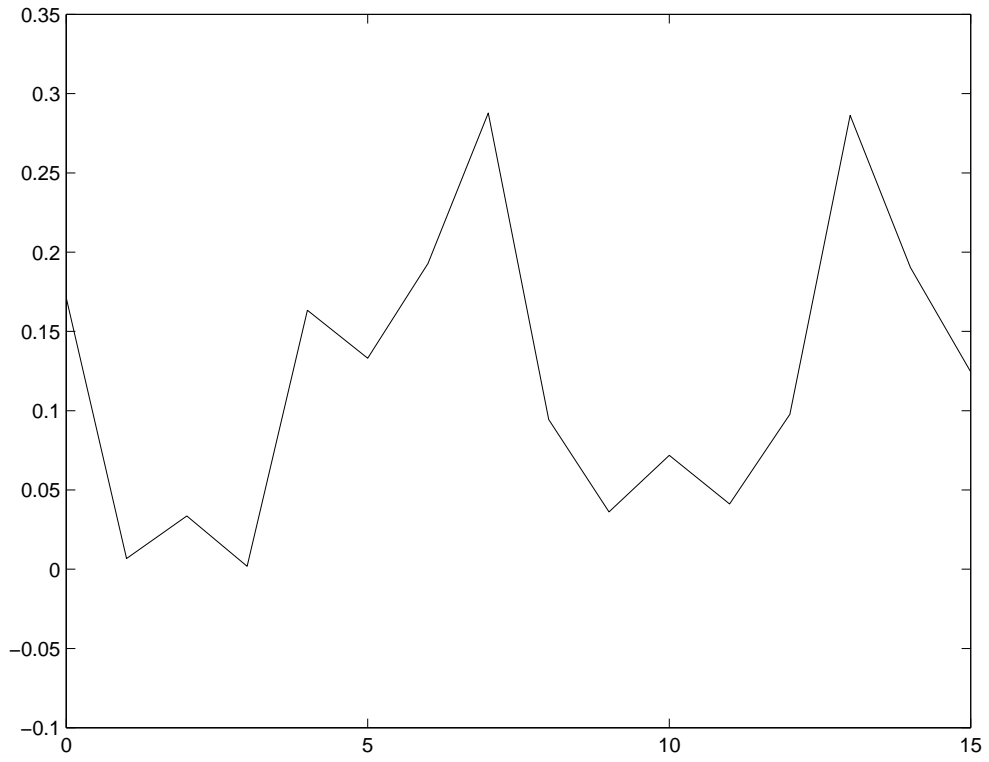


Figure 41

另外，我們還做了一項實驗：我們先做一個沒有邊的單色影像（矩陣），然後由下往上水平的將邊一列列上升，於是就有了 64 個黑白影像，接著算出它們的 $|\alpha_\lambda|$ 。[Figure 42]、[Figure 43] 就是固定 k 值後， ℓ 和邊的位置關係圖。明顯看見當 $k = 0, 3, 7, 11$ 時，圖形就越往前後移動，而差不多總在 $\ell = 4, 12$ 的地方，就是圖形凸起最高的地方，這是因為我們的邊是水平的上升，因此角度沒有改變，所以固定在 $\ell = 4, 12$ 的地方，圖形會明顯的凸起。而由於 k 值的變化，圖形會前後移動的情形上看來，我們得知當邊的位置在改變的時候，不同的 k 值，就會在不同的位置上探測到邊。而直脊函數的 *antipodal* 對稱性則導致同一個 k 值可以探測到兩個不同的邊。

`makerho.m` 在我們數值實驗中是計算 α_λ 最主要的程式，雖然在我們的實驗裡，最大的誤差為 0.01，但是在所有的實驗過程中，發現整個實驗的計算量實在太大了，而且效率不彰。我們所有的實驗對象都設成 64×64 的矩陣，但是，如果換另一個實驗對象我們所有的數據就必須重新跑一遍，我們用一台 pentium II、記憶體 128 MB 及 Windows 98 系統的電腦，使用 Matlab 5.2 版，在紀錄裡，光執行 `makerho.m` 就花了 46 個小時，所以發展它的快速算法，將會是讓 *ridgelets* 被廣泛應用的第一步。

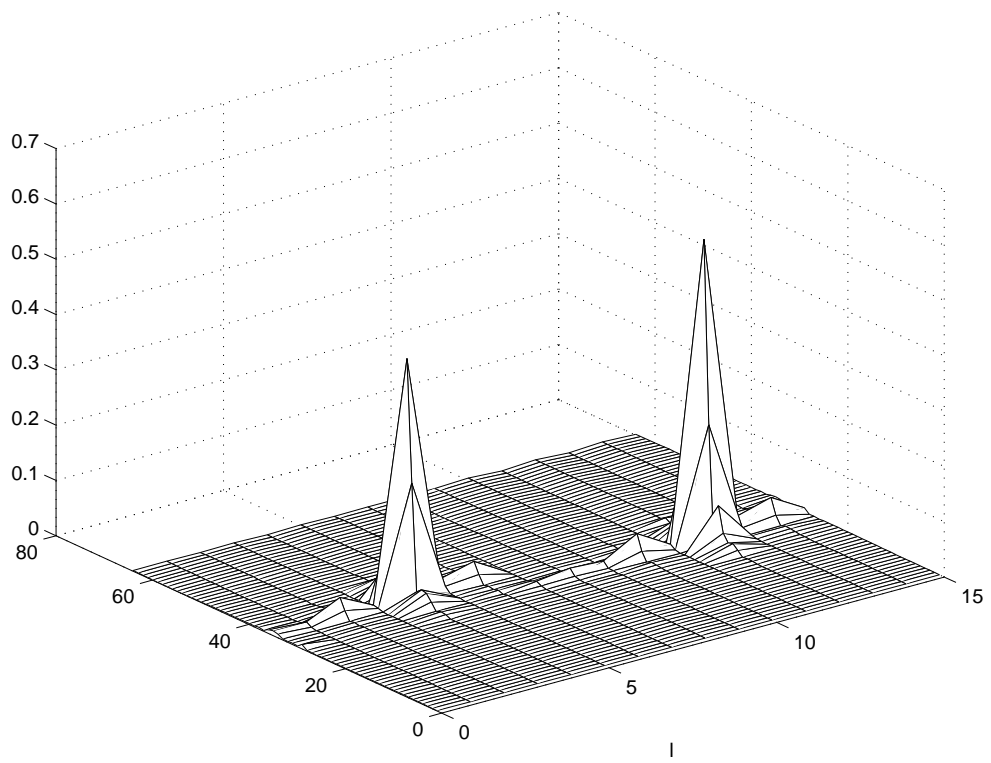
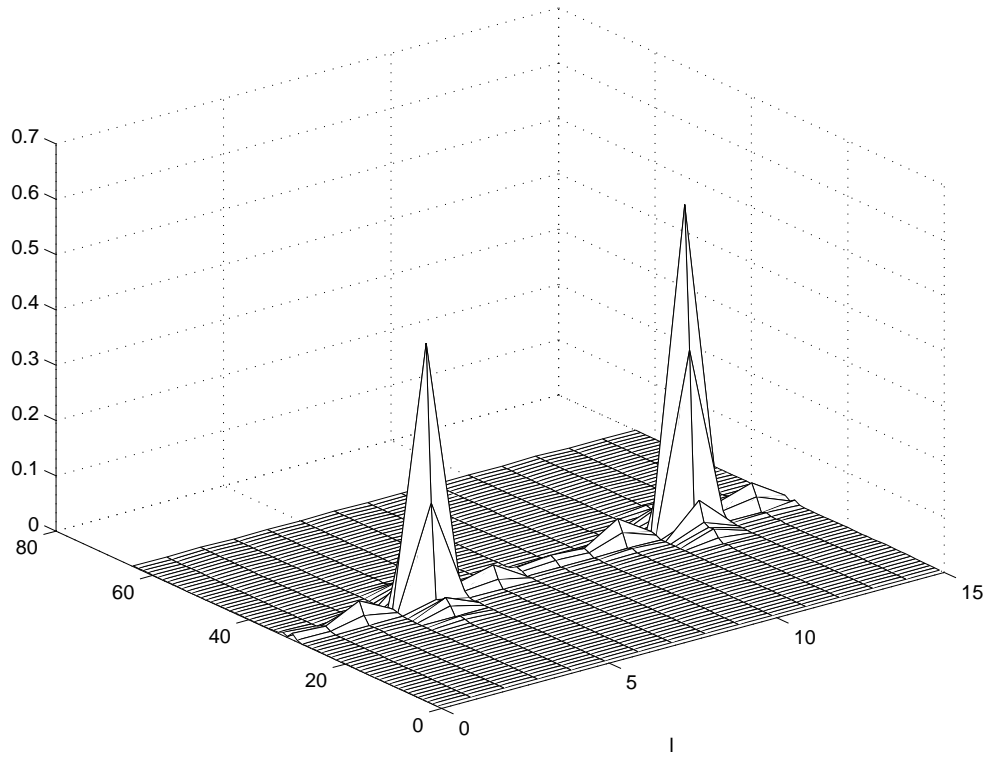


Figure 42 : $|\alpha_{(1,4,0,4,l)}|, |\alpha_{(1,4,3,4,l)}|$

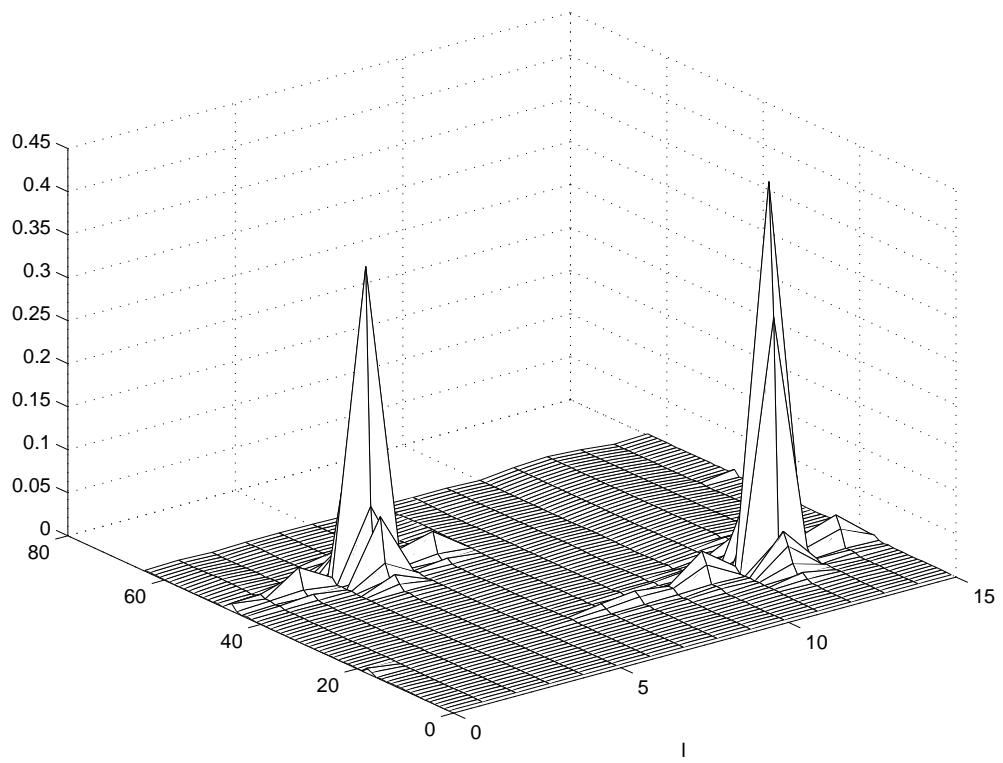
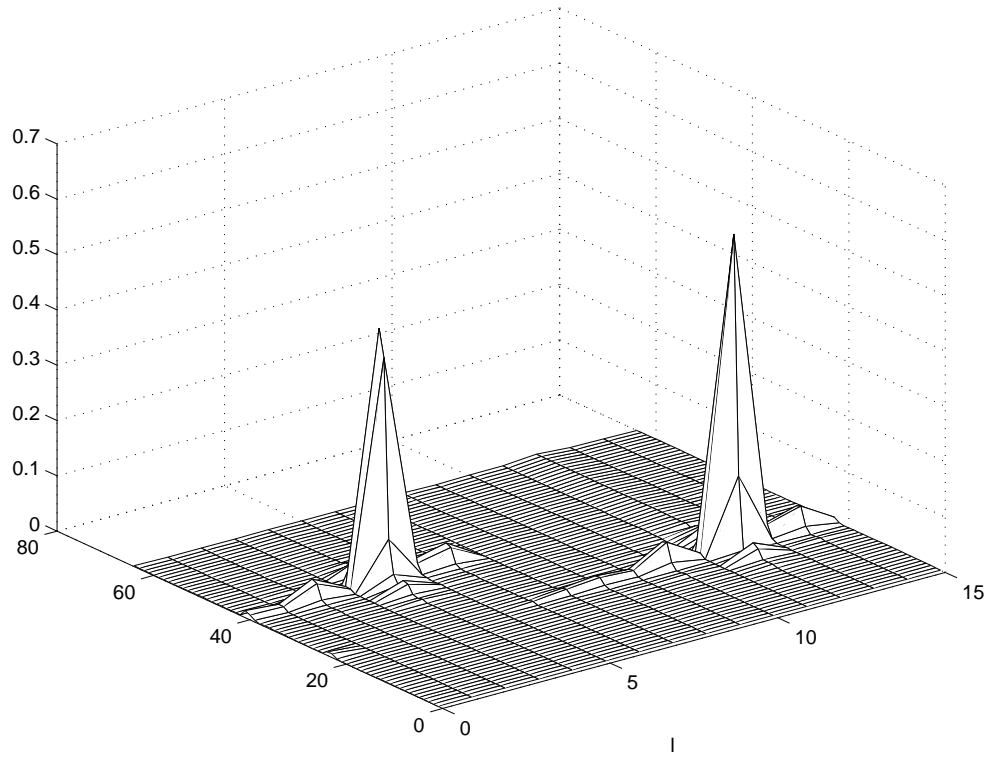


Figure 43 : $|\alpha_{(1,4,7,4,\ell)}|, |\alpha_{(1,4,11,4,\ell)}|$

參考書目

- [1] 單維彰，*凌波初步*，全華科技圖書公司，1999。
- [2] David L. Donoho , *Orthonormal Ridgelets and Linear Singularities*, Technical Report, Statistic, Stanford, 1998. To appear in SIAM J. Math. Anal.
- [3] Emmanuel J. Candès and David L. Donoho, *Curvelets-A Surprisingly Effective: Nonadaptive Representation For Objects with Edges*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [4] Ingrid Daubechies, *Ten lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.
- [5] Stéphane Mallat, *a Wavelet Tour of Signal Processing*, Second ed., Academic Press, 1999.
- [6] C.K Chui, *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, New York, 1992.
- [7] I-Liang Chern, Chien-Chang Yen, *Interpolating Wavelets and Difference Wavelets*.
March 11, 1998