國　立　中　央　大　學

數　　　學　　　系

碩　士　論　文

從自由擬題探究
九年級學生的機率思維發展

A Study on Probability of Thinking Development of Ninth Grade Students from Free Problem-Posing

研 究 生：張 吉 逸

指導教授：單 維 彰

中 華 民 國　106　年　6　月

國立中央大學圖書館
碩博士論文電子檔授權書

(104 年 5 月最新修正版)

本授權書授權本人撰寫之碩/博士學位論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註 1 說明)，在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。(以下請擇一勾選)

(✓)同意 (立即開放)

(   )同意 (請於西元 ______年_____月_____日開放)

(   )不同意，原因是：______________________________

在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

(✓)同意 (立即開放)

(   )同意 (請於西元 ______年_____月_____日開放)

(   )不同意，原因是：______________________________

以非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統圖書館與國家圖書館，基於推動「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名: 張吉逸　　　　學號：103221024

論文名稱: 從自由擬題探究九年級學生的機率思維發展

指導教授姓名：單維彰

系所 ：數學所　☐博士班　■碩士班

填單日期：民國 106 年 7 月 26 日

備註：

1. 本授權書之授權範圍僅限**電子檔**，紙本論文部分依著作權法第 15 條第 3 款之規定，採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽，如您有申請專利或投稿等考量，不同意紙本上架陳列，須另行加填申請書，詳細說明與紙本申請書下載請至本館數位博碩論文網頁。
2. 本授權書請填寫並**親筆**簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應遵守著作權法規定。

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

數學 學系/研究所 張吉逸 研究生所提

之論文

從自由擬題探究九年級學生的機率思維發展

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 單維彰 (簽章)

106 年 6 月 19 日

國立中央大學碩士班研究生

論文口試委員審定書

數學 學系/研究所 張吉逸 研究生

所提之論文

從自由擬題探究九年級學生的機率思維發展

經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人 袁媛

委　　　　　　　員 單維彰

陳斐卿

中 華 民 國 106 年 7 月 13 日

101.06.15

從自由擬題活動探究九年級學生機率思維的發展

摘要

1980 年起，擬題活動逐漸受到國際間的重視。想出一個數學題目出來，即為數學擬題，而其中自由擬題的出題有著強烈的生活連結。針對近年來台灣學生數學學習成就高而興致低迷的情況，擬題活動可能作為改善學生態度的一種教學方法。另一方面，機率作為處理不確定性事件的數學基礎，也特別容易與生活連結產生。

本研究目的在以自由擬題為學習活動，提升學生學習數學的興趣，並了解機率概念的發展。因此，本研究將探討：1)學生所擬的題目有何進展？2)機率思維有何發展？3)面對超過國中範圍之問題，解題的能力為何？

本研究對台北市一所國中，兩個九年級班級共 62 名學生，進行自由擬題學習活動。在為期 3 個月，共 10 節課的活動歷程裡，讓學生進行機率方向的擬題。蒐集資料的工具有機率裡測試題、學生擬題單及擂台賽答題單三種。本研究方法採用內容分析法，以「機率自由擬題評量規準」為研究工具，量化學生擬題各向度表現，並使用成對樣本 t 檢定來分析擬題版本之間的變化。

根據研究結果顯示，第一，學生的擬題品質在可解性、可讀性、精緻性與機率概念層次有所進展，但生活性可能從一開始就具備良好的品質，所以沒有明顯的進步數據。第二，學生的機率思維，也可藉由一題多磨的擬題歷程得到提升與發展。第三，學生有能力解決超過國中課程的問題。最後再根據研究結果於自由擬題活動、未來機率課程提出若干建議。

關鍵字：數學、機率、擬題、自由擬題、九年級

A Study on Probability of Thinking Development of Ninth Grade Students from Free Problem-Posing

Abstract

Since 1980, the problem-posing activities have gradually received international attention. Think of a math problem, which is the mathematical problem-posing, and particularly the free problem-posing has strong life link. In recent years, Taiwan students have high achievements and low attitudes for mathematics learning, the problem-posing activities may serve as a teaching method to improve students' attitudes. On the other hand, Probability as the mathematical basis for dealing with uncertainty events. It is especially easy to link with life.

The purpose of this thesis in the free problem-posing, enhance students' interest in learning mathematics, and understand the development of the concept of probability. Therefore, the two research questions are: 1) To what extend do student’s problem-posing improve? 2) What is the development of probability thinking? 3) When facing the problems exceeds the junior high school level, what is the ability to solve the problem?

The research is conducted to 62 ninth grade students from two classes of junior high school of Taipei City. In a period of 3 months, a total of 10 lessons in the course of activities, so that students in the direction of the probaility problem-posing. The following data are collected : the probability of naked test questions, problems between versions and answers of the probability challenge. The results were analyzed in a content analysis, evaluate the quality of the problems by posers, And use the paired sample *t* test to analyze the problem between versions.

The results show that: 1) The student-posed problems made significant progress throughout the three-version process of “solvability”, “readability”, “Exquisite”, “Probability level”. 2) The probability of students thinking can enhance and develop by the process of problem-posing of “one problem, many revised versions”. 3) Students have the ability to solve problems beyond the course of the junior high school.

Finally, the researcher offers some suggestions related to the free problem-posing, probability course in the future.

Key words : mathematicals, probability, problem-posing, free problem-posing, ninth grade students

致謝

完成論文之際，代表三年的研究生生活結束，即將卸下學生的身分。回想在中央大學的時光裡，過程中雖然有些辛苦，但也為最具豐富與多彩的生活。

首先要感謝我的指導教授－單維彰教授，感謝您在這段時間的耐心指導，以及給予各方面寶貴的建議。平時您公務忙碌，時常需靠著行事曆來掌握老師您的身影，也因如此，時刻提醒自己要把穩做事，專心向前。不僅是在每次的晊聽時間，於教材教法課程當中，都能得到關於您對數學現場教育的總總樣貌之談吐，以及對於各方面的態度與思想，都是非常珍貴的學習經驗。謝謝您，老師。

接著感謝我的口試委員－陳斐卿教授，老師您是我進入中央大學教育學程的面試官，也是我在教程裡的第一位老師，一切都是那麼的有緣。從研究活動、資料分析至撰寫論文期間，每次的晊聽時間，無不是相當紮實的學習，給予我多方的意見，讓我順利完成論文，且在口試時給予許多的建議與想法；感謝我的另一位口試委員－袁媛教授，非常細心地抓住我口試及論文的每一個細節，給予我鼓勵及寶貴的想法。

再來，特別感謝學習所的學長許哲毓，從無到有的研究過程當中，扮演著相當重要的角色，給予我各方面的協助，以如期完成論文，順利畢業。

還有，感謝數學研究所及教育學程裡同學們的支持與鼓勵，尤其是那群從母校台東大學，一同到中央大學就讀研究所可愛的學弟妹們。

最後，我要感謝我的家人們，有你們在背後的關心與支持，才能讓我順利地完成研究生的生活，正式走進社會，找尋未來的路。謝謝家人們!!

張吉逸 謹誌

民國 106 年 7 月 26 日

目錄

表次

圖次

第一章 緒論

第一節 研究動機與背景

而根據國際數學與科學教育成就調查(Trends in International Mathematics and Science Study，簡稱 TIMSS) 2015 年的研究報告指出 (Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. , 2016)，在總共 57 個國家裡，台灣八年級的學生在數學成就排名上為第三名，僅次於第一名的新加坡與第二名的南韓。但是，TIMSS 對學生學習參與態度的調查，發現四年級與八年級的學生，對於數學的喜歡及自信，分別排名為倒數第二名及倒數第四名。換句話說，台灣的數學教學對學生的學習具有相當地效果，但對數學感到興致缺缺，態度低迷，顯然已成為一項台灣數學教育該重視的問題，有待於改善與研究的投入。

美國數學教師協會 (National Council of Teacher of Mathematics，簡稱 NCTM) 提出「數學連結」的重要性，指出教學應將數學概念進一步地連結與應用於生活情境當中 (NCTM, 1989)。而「數學連結」在九年一貫數學課程能力指標，提到能將其再分為「內部連結」與「外部連結」兩種。其中內部連結強調能力指標的貫穿，而外部連結強調學習內容對生活與其他領域的察覺、轉化、解題、溝通、評析能力之培養 (教育部，2008)。在今日的十二年國民基本教育，於數學基本理念之中，提及「數學是一種語言」的導入學習，強調生活經驗與數學概念之間相互關係的發掘 (教育部，2014)。此外，數學課程領綱以素養導向之數學教材為進路，除了能力的培養，也應注重數學與現實生活的連結，從生活、經驗、文化等其他情景中，概念與連結之間有達「識」的見解 (鄭章華、單維彰，2015)。所以，數學概念與情境的連結逐漸成為數學學習的關注方向。在傳統的數學課堂

中，授課模式往往以升學為目標，作為學科知識的傳輸，長久下來，學生的學習在教師的佈題與解題之間，來回形成模仿與操作，如此被動的知識接收，不是我們數學教學的目的。因此對比於台灣大部分課堂的授課現況，上述「數學連結」的信念實踐，成為我們應該檢視與反思的課題。

1980 年起，國內外數學擬題活動有不少的研究活動，而且數學擬題活動能改善學生對數學學習的情況 (Silver, 1994)，數學擬題是由學生藉著自身的生活、情境與經驗來創造出數學題目 (Silver, 1996)，因此，可看出數學擬題活動既有的特徵為對生活所產生的外部連結，而擬題過程中的學習，可望產生興趣與動機(梁淑坤，1994)。進一步說，數學擬題活動能激發數學與生活的連結，成為數學教學新的應用樣貌，透過興趣與經驗的投入，成為為一項教學活動的管道，期望解決台灣目前數學教學裡，學生參與態度低迷的現象。因此，改善學生態度與加強生活連結的教學方法之一，是所謂的「擬題活動」。

擬題情境可分為 1.結構擬題、2.半結構擬題、3.自由擬題三種類型(Stoyanova, 1996)。結構擬題 (structured problem-posing) 主張設計原則應「相似」或「改變」原有的題目結構，而半結構擬題 (semi-structured problem-posing) 則為擬題者運用已具備的數學概念，探索其問題結構，擬出新的題目。前兩者擬題的設計，擬題者易受限於條件的給定，而影響思考的彈性，以及解決真實生活經驗問題，並不易於產生外部連結。然而陳斐卿、江家瑋、張鐵懷、黃佩岑與單維彰 (2015) 指出，自由擬題(free problem-posing) 雖較少為研究者使用，但它卻是最符合學生興趣與情境連結的擬題活動，不僅外部連結性強，更有學生主動積極學習態度與學習環境的熱絡。

擬題活動不限學科內容，而本研究將關注機率概念的學習內容。機率概念常

做為討論不確定性事件的考量，此課題常在日常生活裡看見，如天氣預測、風險評估等。換句話說，做為「外部連結」的應用，機率概念的學習扮演著數學跨領域之間舉足輕重的腳色。在台灣，根據課綱的課程單元編排，機率學習單元被安排至九年級下學期的時程。事實上，Bognar 與 Nemetz (1977) 指出學童在不同年齡的階段，可進行一些機率概念的教學。換句話說，學童在未接受正式機率的教學前，已有機率概念的存在。然而一些國內學者認為，學習機率與認知發展、經驗累積有關，不宜提早，尚宜於學生成熟後再教 (翁秉仁,2016)。但 1975 年 Piaget 和 Inhelder 提出的機率認知發展理論，兒童機率的理解與其認知發展可分為三個階段，代表著學童在不同年齡階段，有充足的認知概念可以學習機率。接著再以 TIMSS 機率與統計的調查指出，台灣八年級學生雖然沒有機率課程，對機率卻有一定程度的認識，具有機率概念的存在 (TIMSS, 2016)。因此，學童於國中階段的機率思維發展，值得細探與研究。

綜合上述，自由擬題與不確定性概念都有強烈的外部連結於日常生活當中。循著這樣的想法，研究者期盼藉由以機率為主題的自由擬題活動，提供一場不一樣且新穎的學習活動，透過活動過程找回學生對學習數學的興趣與熱情。另外，透過活動的歷程，讓學生發現機率存在於彼此的生活經驗裡，藉此學生對外部連結產生的自發性概念，探究其機率思維的進展。

第二節 研究目的

本研究希望藉以自由擬題為學習活動，提升學童學習數學興趣的投入，並了解數學概念的發展。因此，根據上述的研究動機與背景，本研究的具體目的為藉由學生對自由擬題活動的參與及投入，探究九年級學生的機率思維發展。

第三節 研究問題

因此，本研究根據研究目的，並透過自由擬題活動的執行，探究：

1. 在機率擬題活動歷程中，學生所擬的題目的品質進展表現為何？
2. 透過自由擬題之機率的發想，學生的機率思維有何進展？
3. 學生面對超過國中範圍的問題解題，興趣與能力為何？

第四節 名詞釋意

為了使本研究討論的範圍與主題更加明確，本研究所涉及的相關重要名詞，界定如下。

一. 自由擬題

自由擬題 (free posing) 是指從一個被給定的、人為的、自然的情境下擬出題目 (Stoyanova, 1996)。在本研究中的自由擬題活動，雖然限制住學生的思考情境為「機率」，但本擬題活動所指的「自由」為不限定學生的出題型式與類型，即為在一個「機率」的情境之下，學生自由發揮想像來出題。

二. 擬題品質

研究者根據國內學者陳斐卿等人所發展出的一套自由擬題評量工具「數學自由擬題品質評分規準表」(江家瑋，2014；陳斐卿等人，2015)，將學生擬題的作品分為五大向度作為評量，分別為「可解性」、「可讀性」、「生活性」、「精緻性」與「年級層次」。希望藉由五種向度的評分，充分呈現學生擬題的數學性及自由擬題之特質，而其中本研究將評量內容的修改有「精緻性」與「年級層次」兩種。

第一，「精緻性」的部分，為了呈現出機率題目的完整性，因此針對評分依據的條件設計進行修改。第二，「年級層次」整合機率類型與概念層次相關文獻修改出「機率概念層次」向度，其中評分依據包含「沒有機率」、「主觀機率」、「客觀機率」、「機率推論」與「期望值」五種。

三. 機率思維

本研究將透過自由擬題活動探究學生在未經過正式的機率課程教學之前，機率的概念思維將分布在何種層次，且運用評量規準中的「機率概念層次」進行分類。

第二章 文獻探討

本章依研究主題進行相關文獻之探討，以作為相關理論基礎。本研究的主要目的為探究學生透過機率自由擬題活動的參與及投入，九年級學生的機率思維發展，因此從活動歷程中探討學生擬題作品之品質與機率思維的變化。另外，從機率擂台賽中探討九年級學生對機率解題的興趣與能力。本章共分二節，第一節探討數學擬題的定義、重要性、特徵、型式與時間點，第二節探討機率的類型、概念與台灣機率課程發展之研究。

第一節 數學擬題

1980 年起，美國數學教育開始逐漸重視擬題 (Problem-Posing) 教學活動，並建議能夠作為學校課程改革的重點方向 (Silver & Cai, 1996)。擬題活動扮演著數學教學與學習之間的重要連結。對數學核心的學習，教師應給予學生機會從經驗中認識數學，或是自己能建構出數學問題 (NCTM, 1989；2000)。而數學擬題導入的教學活動，具有減少學生因課程、解題所造成的數學思維發展之潛力與價值 (Stovanova & Ellerton, 1996)。

回到國內的數學教育現場，因長期受到「升學主義」的影響，注重於計算與解題的能力已成為一種意識形態。長期下來，注重能力而漠視學習動機，將導致教學內容的凝滯，造成學生在數學思維發展上的限制，進而影響其學習態度。為了平衡此一教學現場風氣，國內有些學者紛紛提出以擬題作為教學活動的建議 (梁淑坤，1994；陳斐卿等人，2015)。

一. 擬題的定義

國內學者梁淑坤 (1994) 對數學擬題下的定義:「自己想出一個數學題目」。擬題過程中,結合生活經驗、情境、數字、圖形等關係,組織出一個數學題目。國外學者Silver (1994) 指出,擬題的產生不但是從情境中探索,且能從給定的題目中,透過解題的過程,建構與再形成新的問題。Stovanova 和 Ellerton (1996) 表示,學生以過去學習數學知識的經驗為基礎,對具體的情境及思想創作上,作出個人的闡述,而產生有意義的數學題目。

由以上學者對數學擬題的定義,可知擬題最重要的元素為建構題目的方式,其有兩種:一為本身既有的數學知識;二為學生的生活經驗。Silver 與其他兩位學者見解的不同之處,在擬題與解題的歷程之中,再形成問題的重構與組織能力,需要更多的思考投入其中,打破題目結構的形式轉換,成了擬題建構的限制存在。然而,本研究以自由擬題 (Free Problem-Posing) 為主題,根據定義,題目的生產無給定題目的模仿,無情境、主題、時間等限制存在。如 Ellerton (1986) 引進數學創作與寫作的教學活動,要求學生建構出一個數學問題,並再要求有一定的難度給予學生作答。自由擬題也為擬題的一種形式,因此綜合以上觀點,本研究將數學擬題定義為:「運用已知的數學知識與生活經驗,對周遭情境、數字、圖形等關係加以探索與組織,進而擬出一個數學題目。」

二. 擬題的重要性

學生對擬題活動的練習參與,能鍛鍊其思考的靈活性與多變化,提高對數學問題的解決,並擴大與鞏固數學的概念思考 (Brown & Walter, 1993;English, 1996)。提供機會給予學生擬出問題,能增強其對問題的推理與反思 (Cunningham, 2004)。當問題不再是由老師制定,而是學生。可以培養學生對知識上的擁有感 (The sense of ownership),擁有感能使學生有更多的熱情、

好奇與參與感在數學的學習歷程中 (Lavy & Shriki, 2007)。

Silver (1994) 提出數學擬題的重要性，有以下四種觀點：

1. 擬題有一種探索式教學的面向特徵 (inquiry-oriented instruction)
2. 能作為改善學生解題能力的方法
3. 能作為教師對學生數學理解能力的窗口
4. 能提升學生對學習數學的動機與傾向 (disposition toward mathematics)

擬題能連帶對解題能力的提升，增加思考與分析的機會 (Cifarelli & Sheet, 2009)。在大部分的教學現場裡，學生的解題方式，多來自教師於教科書裡的題目提出，經過教師的引導與練習，很快地就能熟練解題技巧。如此的解題能力，限制住數學的思維發展，缺乏思考的靈活性。所以，如果由學生擬題後再進行解題，能因為素材熟悉的關係，容易產生理解之外，在擬題與解題之間產生強烈的連結，使數學學習的產生更具意義 (Writz & Kahn,1982)。

擬題教學活動有助於減少因大部分教學僵化的現況，其有著強烈的連結性，助於改善學生於課堂之中，對學習數學的不適與低迷態度提升學習動機與興趣。接著，除了擁有感的提升之外，擬題活動將學習的主導權留給學生能提供表達的機會，發表對其感興趣或學習所關心的現象(Schlomemer, 1994；English, 1997)。如此鼓勵的方式，培養學生主動學習、建構知識的能力，從自我充實的精神存在，無形提升學生自學與自省的意念產生。

三. 擬題的特徵

國內學者梁淑坤 (1994) 提出擬題行為的特徵，有以下四點：

1. 組織方法個人化 (idiosyncratic)
2. 猜想與可信推理 (plausible reasoning)
3. 可以發生在解題前，解題中，以及解題後 (before, during, and after problem solving)
4. 題目粗糙性 (Primitive)

首先，個人化的組織能顯現出題目差異性的特徵，擬題者的組織素材會根據過去自己的生活經驗、背景…等因素來設計題目。也因學生之間為不同的個體，學生的思考能呈現不同的差異性，所以能透過不同的題目看出每一位學生的興趣與喜好，展現題目的獨特性。梁淑坤問了兩位擬題者：「你可以用一個正方形想出一些數學題目來問小朋友嗎？」得到兩位不同的個人看法，第一位注重正方形的幾何特徵、面積與特徵，第二位注重正方形的形狀。

第二，擬題過程會帶著學生的猜想與可信推理。一些的猜想可形成對題目所提供的條件與假設，在還不知道題目的可行之下，接著學生會對內容條件、敘述、與解答等題目構成之元素，進行題目可信度的評估及衡量，並反問自己如「假如是…」或「假如不是…」。

第三，擬題情況的發生有很多種，有可能出現在解題前，是因情境產生的聯想而擬題；有在擬題過程中，藉由題目的整合以及組織的策畫，從中發現與思考進行擬題；也有在解題後，經由檢驗答案而產生新的問題關係而產生題目。

最後，由於擬題者為初學者，在想法與經驗上尚且不足，無法如教師能深思熟慮般地思考及布題。因此擬出的題目顯為粗糙、不完整或不可行之題目，甚至是類似於課本習題的題目出現。

四. 擬題的型式

Reitman 將題目的結構分類為結構題 (structured problem) 與非結構題 (ill-structured problem)，分別有下表 1 四種情況(引自梁淑坤，1994)：

表 1

Reitman 題目結構表

類別	已知	目標
1	✓	✓
2	✓	×
3	×	✓
4	×	×

✓：已定義清楚

×：未定義清楚

第一類稱為結構題，常見於一般教室裡課本與習作的題目，學生可根據題上的資訊，運用解題方法將目標求得出來。其他三類(2,3,4) 稱為非結構題，然而非結構題可利用其他方法來加以組織成結構題，這樣的現象即為擬題。

Silver (1993,1995) 分類出兩種擬題活動：第一是「從情境或經驗中創造出新的問題」，第二是「給定問題再重新產生(Reformulation) 新的問題」。以

時間點來區分，擬題可發生在解題前、中、後三個時間點，解題前為在問題解決前所發生的問題，可能來自於一個特定的或自然的情況；解題中為在解決問題的過程中，可能故意改變一些問題的條件或目標來達成擬題；解題後為在問題解決之後所產生的新問題，新的問題會根據已知的數學基礎，通過解決一系列或特定的題目來從中獲得經驗。

Stovanova 和 Ellerton (1996) 提出擬題三種情境：第一為半結構擬題 (semi- structured)，指在一個開放的情境下，邀請學生運用自身的數學知識、技能、概念及以往對數學經驗的關係，探索問題的結構並完成擬題。如 Hart (1981) 要求學生修改數學問題，讓其能夠得到適合的計算，主要目的在探究學生如何用具體情況的描述來表達數學關係式。第二為結構擬題 (structured) 則以某一個特定的問題為基礎進行擬題。如 Hashimoto (1987) 在研究中，使用特定的題目讓學習者探索其數學關係的表現存在，進而模仿修題。第三為自由擬題 (free-posing)，從一個被給定的、人為的、自然的情境下擬出題目。

根據上述學者們的分類說明，能清楚知道擬題即為將非結構題轉換成結構題的歷程。以 Stovanova 為例，半結構擬題可對照表 1 中的第二類，而自由擬題為結構表中的第四類。然而，題目建構歷程中，形式內容轉換勢必將考慮其他限制因素存在，如從原先給定題目做相仿。而這些因素將可能主導著擬題者思想的開放與封閉性，而為期望還原學生的個人經驗與生活應用，下段更進一步進行結構題與非結構題的討論。

回到 Reitman 的結構分類來看，第一，結構題類別如同對照 Stovanova 的結構擬題，擬出相似於原來給定的題目，形成模仿的動作。結構擬題的活

動對教師而言，能更方便地檢驗學生能力的成效。然而在教師的引導作用之下，容易忽略學生的個別經驗，而無法顧及學生的興趣與能力。

第二，非結構題可根據「已知」與「目標」兩者條件的不同，而對照於「半結構擬題」及「自由擬題」。非結構擬題可視為學生對於抽象概念意義化的過程，期望從相似題目或開放的情境中獲得數學概念。Bush 和 Fiala (1986) 指出，「半結構擬題」使學生對數學抽象概念產生有意義的想像，並能從擬題的書寫中，學習整合數學概念與跨科目領域，並發展「創作性」的寫作技巧。

第三，Stovanova (1996) 說明「自由擬題」能鼓勵學生反思以前具體的生活經驗、體驗。因此綜合前述，比較於結構題，非結構題更重視學生個別的學習經驗、學習歷程與學習結果。從創作與反思上的得到認知，符合學生學習動機的來源，也因所受限制較少，所以題目呈現完整生活面機會較大。

五. 擬題的時間點

有了題目結構的分類，接著再以擬題時間點來考慮，從 Silver 的時間點作為區分，研究者重新將解題前、中、後再做新的詮釋。解題前可視為學生的創作發想；解題中可視為過程中的修改；解題後可視為問題的再造。學習經驗與外在環境有關，這三者時間點皆能用情境、經驗等關係，重疊與交互作用，使得題目能夠更接近個人獨特性。

然而，若要在題目內容看出貼近興趣與能力，擬題就得展現出「創作性」與「反思性」的思考。從「解題中」與「解題後」兩者觀點來看，其較易受到題目形式得侷限所在。在抽象概念化的過程中，皆存在著潛在的引導功能，若比較於「解題前」的發想，後者的引導方向更來得小。因此，「解題前」

對擬題活動來說有更大的自由度存在，而自由度愈大愈能反映學生的經驗與興趣。所以「自由擬題」的形式，更能說明研究者一開始所期望的「如何顧及學生的興趣與能力」。儘管本研究限定了「機率」的大方向，但不限定學生任何的條件設計，以及數學內容的呈現。研究者認為只要學生循者擬題精神的學習與挑戰，盡情地發揮，能找出學習的熱誠所在，以及期望與機率概念思維的連結發現。

第二節 機率概念研究

本節分為三個部分探討，第一部分為探討機率類型，第二部分為兒童機率概念的思考，第三為台灣機率課程的發展。內容範圍主要涵蓋學齡階段的機率思維與課程設計，從中建立出探討學生能力及興趣的研究分析。

一. 機率類型

機率是一個探討或然性(probable)發生的可能，或然性是指對一種現象的發生或變化皆純屬機會的出現，事件之間不存在必然(necessary)的關係 (劉秋木，1996)。而機率類型的討論，本研究採驗 Shaughnessy (1992) 統整各家之言 (Konold , 1991； Hawlins & Kapapia, 1984)，並引自丁村成 (2008)的統整，大致分類出四種機率類型如下：

(一) 主觀機率(subjective probability)

主觀機率為近代 20 世紀發展的概念，是一種以直觀思維猜測機率的表現，其機率值的測量會隨者個人信仰及經驗有關，例如因為前兩天都有下午後雷陣雨，因此猜測今天有午後雷陣雨的機率為 90%。主觀機率數值的評定，是帶著個人意識、觀點的複雜性及如何理性的形成改變其信念等因素改變(Borovcnik et al., 1991;

Konold, 1991)，亦即會因為資訊的獲得改變而修正機率的數值。

（二）頻率機率(frequentist probability)

頻率機率的機率值為一個隨機試驗的觀察，經過多次的重複試驗或實驗調查之相對次數而來的，又稱為實驗機率(experimental probability)。依此觀點，一個事件的機率值 ***P(A)*** = $\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$，亦即在 $\boldsymbol{n}$ 次的試驗中，事件 $\boldsymbol{A}$ 出現的次數為 $\boldsymbol{n_A}$，當是試驗次數越接近無限多次時，相對次數 $\boldsymbol{\frac{n_A}{n}}$ 越趨近於實數 $P(A)$。

（三）古典機率(classical probability)

古典機率是根據理論假設及推理的規則計算而來的機率值，最早為法國數學家拉普拉斯(Laplace) 於1812年在其機率的分析理論中所定義。假設有一個隨機性試驗，其樣本空間 S 中的每一個樣本點出現可能結果機會均等，則事件 ***A*** 在樣本空間 S 中的機率 ***P(A)*** = $\frac{n(A)}{n(S)}$**,** 其中 ***n(A)***為事件 ***A*** 的樣本個數，***n(S)***為事件 ***S*** 的樣本個數。古典機率亦稱為理論機率或先驗機率。

(四) 形式機率(formal probability)

形式機率是利用公理的法則來定義機率，最早由俄國數學家 Andrey Kolmogorov (1903-87) 提出，其假設有一試驗的樣本空間為 ***S***，對於 ***S*** 中的每一事件 ***A*** 指定一個值 ***P (A)***，並規定 ***P (•)***滿足下列三個公設 ：(引自丁村成，2008)

1. 對任一事件 ***A*** 恆有 ***P (A)*** ≥ 0
2. 樣本空間 ***S*** 之機率 ***P*** (***S***) = 1
3. 任二事件互斥時有 ***P*** $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$，我們稱 ***P (•)***為一機率測度，並記 ***P (A)***為事件 ***A*** 之機率。

二. 兒童機率概念的思考

Piaget 和 Inhelder 提出學童認知發展理論，並以「機率」為主題，提出以下機率認知發展三階段 ： (引自劉秋木，1991)

1. 運思前期：此階段兒童沒有明確的因果觀念，無法區分事件的必然性與或然性，因此無法形成機會的概念。此時期的兒童也沒有隨機概念，他們不知道用手在不見內部情況的袋子裡拿東西，拿到的彈珠是靠機會的，他們會以為會拿到自己喜歡的顏色的彈珠。
2. 具體運思期：此階段兒童能分辨因果律以及純粹機會的事件。此時期的兒童對於不太複雜的機率問題可以算出成功事件與失敗事件的相對勝算誰屬。而若要算出一個實驗之所有可能結果很複雜時，因兒童沒有一系列的數學概念想法，所以無法掌握住複雜狀況的發生。
3. 形式運思期：此階段兒童能列舉依實驗的所有可結果，能有機率概念。比起前期，此階段的兒童更有能力列舉實驗的可能結果，以及了解相對次數的極限存在，即為大數法則。也由於他們具有比例概念，能以一個分數來代表成功事件的機率，已有機率概念的存在發生。

Bognar 和 Nemetz (1977) 列出兒童在不同年齡階段可進行的機率概念教學，其認為機率的教學應兒童的年齡而得到適當的教導，有四個階段如下：

1. 七至八歲的兒童， 可以教導簡單的概念， 像確定事(certain events)、不可能事件(impossible events) 及互斥事件(mutually exclusive events)。

2. 九至十歲的兒童， 可依據可能發生的事情教導較可能事件(more likely events)、較不可能事件(less likely events)及次序事件(orderevents)。
3. 十一至十二歲的兒童，可以教導相對次數(relative frequencies)及畫出可表示機率事件的圖表(diagrams)，如樹枝圖。
4. 十三至十四歲的兒童，可以教導獨立(independent)和相關(correlated)的實驗及事件。

Jones, Thornton, Langrall 和 Tarr 等人在 1999 年提出機率思考架構理論。他們企圖發展一項架構來描述，兒童在一個不確定的情況下會是如何思考，並訂出了學童在樣本空間、機率事件、機率比較、條件機率等方面的機率思考層次。而後又增添以預測和實驗為主的實驗機率和由條件機率引伸出來的獨立事件。除了上述每一個機率結構上，學童的概念發展層次皆包含了四個層次：

1. 層次一：主觀思考期。在此層次的兒童多以個人的主觀意識或喜好來處理機率問題。
2. 層次二：過渡期。在此層次的兒童思考介於主觀和質樸的量化思考之間， 但其思考結果最後往往又會回到主觀的想法。
3. 層次三：非形式量化期。在此層次的兒童已能做量化思考，但尚未具備足夠的數量概念。
4. 層次四：量化推理期。此為發展的最高層次，兒童可完全使用生產性策略來描述結果， 並能用數字完整的表現出數量的推理。

三. 機率課程發展研究(引自單維彰、陳斐卿、許哲毓，2017)

台灣的數學教育，自民國 50 年以來，經歷過五次重要的變革。呂溪木 (2007) 指出，第一次改革為民國 53 年至民國 57 年，第二次改革為民國 60 年至民國 61 年，以及第三次改革為民國 64 年至民國 72 年。上述三者的差別在前二者為先修訂高中，再至國中小的修訂，其為由上到下的變革；後第三者則為相反，其為下到上的變革，而在民國 74 年再進行國中課程標準的微調。第四次改革為民國 82 年至民國 84 年。先修訂國小課程標準，再至國高中的修訂，為下到上的變革。民國 82 年公布的國小課程標準，其數學教育目標揭示了「建構」一詞，成為新課程較具爭議的課題 (周祝瑛，2003a)。第五次變革為民國 89 年公布「國民中小學九年一貫課程暫行綱要」，並在民國 92 年公布「國民中小學九年一貫課程暫行綱要數學學習領域」及民國 97 年再次微調。

台灣數學機率的主題於民國 53 年進入高中數學課程 (教育部，1964)，而同時期的國中小並沒有機率課程。在當時的學生不管是自然組或社會組，學習機率的內容之教材皆為相同。在課程上的編排，等同於學完 Jones 等人 (1999) 提出的機率思考層次，內容從「樣本空間」至「條件機率」與「獨立事件」。注意的是，民國 53 年的高中機率課程有兩項特點影響至今，一為以嚴謹的「集合」形式來處理樣本空間與事件，二為將機率作為排列組合的後續課題。

民國 60 年，這段時期的高中數學課程 (教育部，1971) 將機率安排在高三，除了延續民國 53 年的全部課程內容外，在機率概念上增加了貝氏定理，在機率類型上涵蓋了古典、頻率與形式機率(以隨機變數的形式呈現)。在當時市面上流通的教科書共有數理本、實驗本與東華

本三種，而范傳坡教授主編的數理本、黃武雄教授主編的實驗本，都講解了主觀機率類型(稱為直觀的機率)。同時期的國中數學課程不含機率，反而是國民小學的數學課程在民國 64 年加入了「簡單的機率」 (教育部，1975)，安排於六年級學習，涵蓋頻率與古典兩種類型，而概念層次皆為單一事件。另外，第二次改革的主要重點為減少教材中「集合論」的份量，以凸顯對數學知識「質」與「方法」的重視 (陳玟樺，2017)。

民國 64 年，「國民小學數學課程標準」完成修訂，而為銜接民國 64 年版國小課程的國中和高中數學課程標準，於民國 72 年完成國中數學課程標準修訂並頒布，由民國 73 學年度起開始實施 (呂溪木，1986)。同時，民國 74 年版的國中數學課程，在國三選修數學加入了機率主題，包含頻率機率與古典機率兩種，其中古典機率特別強調不涉及樣本空間與排列組合，並且首次引進樹狀圖作為計算機率的工具。

民國 80 年代為第四次的課程變革年代，民國 82 年的國小課程標準裡，機率的課程以「機率的初步概念」認識為主，包含「部分與全體的關係」以及「大數法則」。另外注意的是，國小課程標準的數學目標揭示「建構」一詞，關注於希望老師能引導學生有不同的解題思考方向，進而培養出解決問題的建構能力。因建構主義教學需較多的時間讓學生自行探究，導致部分學習內容需刪減或延後，但在機率課程內容上的影響差異不大。接著在民國 92 年及 97 年的數學領域課程綱要中，沒有了小學機率的課程，使得機率課程全落於九年一貫的九年級第二學期實施。但九年一貫公布的機率課程「能力指標」為「能在具體情境中認識機率的概念」，又在細目裡提到「由於機率概念的掌握並不容易，因此應先從最清楚、易學習的機率觀─古典機率開始學習」(教育部，2008)。然

而實際考察各版本的教科書，對於其他類型的機率很少詮釋，而是專注在古典機率類型的教學。

回顧台灣的機率課程，主觀機率於民國 60 年代的短暫出現，民國 70 與 80 年代頻率機率的出現，兩者機率類型皆在近幾年課程上開始消失。談及機率的教學，主觀機率是一個很好的出發點，透過自我經驗與機率理論的連結，可培養良好的直覺。教師應鼓勵學生做合理的猜錯，學習每個人都有可能猜錯的產生 (Li, 2000；丁村成，2008)。而頻率機率能將概念性機率與統計做出連結，在教學上從實驗中歸納出法則，在從古典理論的比較中，形成學生心中的對比。最後，從我國近年來的機率課程，都九年級下學期才開始實施。在機率類型上談及古典機率最多，而在概念層次上，以單一事件為主，且主要的技術工具為樹狀圖的使用，窮舉可能性與初步認識獨立性。

綜合以上機率概念研究相關文獻，學童對於機率概念的學習，在不同的年齡層，都有被教導與思考的適切性存在，如最早兒童是以主觀意識與喜好來處理機率問題。隨著兒童的年齡增加，處理機率問題的思考層次也不一樣，因此教師能夠針對學生的機率思考架構，了解學生的機率推理，給予適當的課程教導。然而台灣機率課程的發展，隨著數學課程的改革，過去課綱內容有的機率概念，如今至現在則無，逐漸忽略學生基本的機率思考層次，進而影響教師於課堂中，機率教學的正確脈絡性。因此，本研究將藉由機率概念的相關研究，對學生機率擬題、答題之間的思考層次，配合課程發展的研究，架構出基本的理論基礎。

第三章 研究方法

本章將針對本研究之研究對象、研究活動設計、研究工具、擬題範例解說、資料蒐集與資料分析，詳細說明如下。

第一節 研究對象

本研究之田野學校為台北市一所中型的國中，全校共計 24 個班級。因「自由擬題」教學活動的主題為「機率」單元，課程單元對應到課綱上的時程安排為九年級下學期，又根據研究問題之探究，並考量九年級下學期即能驗收機率課程之成果，所以研究時程選擇九年級上學期。研究對象選取九年級兩個班級的學生作為機率自由擬題活動之對象，且兩班皆未接受正式的機率課程教學，其中 A 班 32 人，B 班 30 人，共 62 人。

第二節 研究活動設計

本研究為科技部研究計畫(NSC-104-2511-S-008-002-MY2)的延續，擬題活動設計採取「自由擬題」結構方式，針對「一題多磨」進行長時間題目的醞釀琢磨，時間與投入的拉長，思考與互動也隨之增加 (江家瑋，2014)，並融入目前尚未學習之新概念「機率」，讓學生從活動中挑戰未知，勇於創新。活動歷程裡，兩個班級各歷時 10 節課，前後約莫歷經 3 個月的時間。下圖 1 為機率自由擬題活動設計流程：

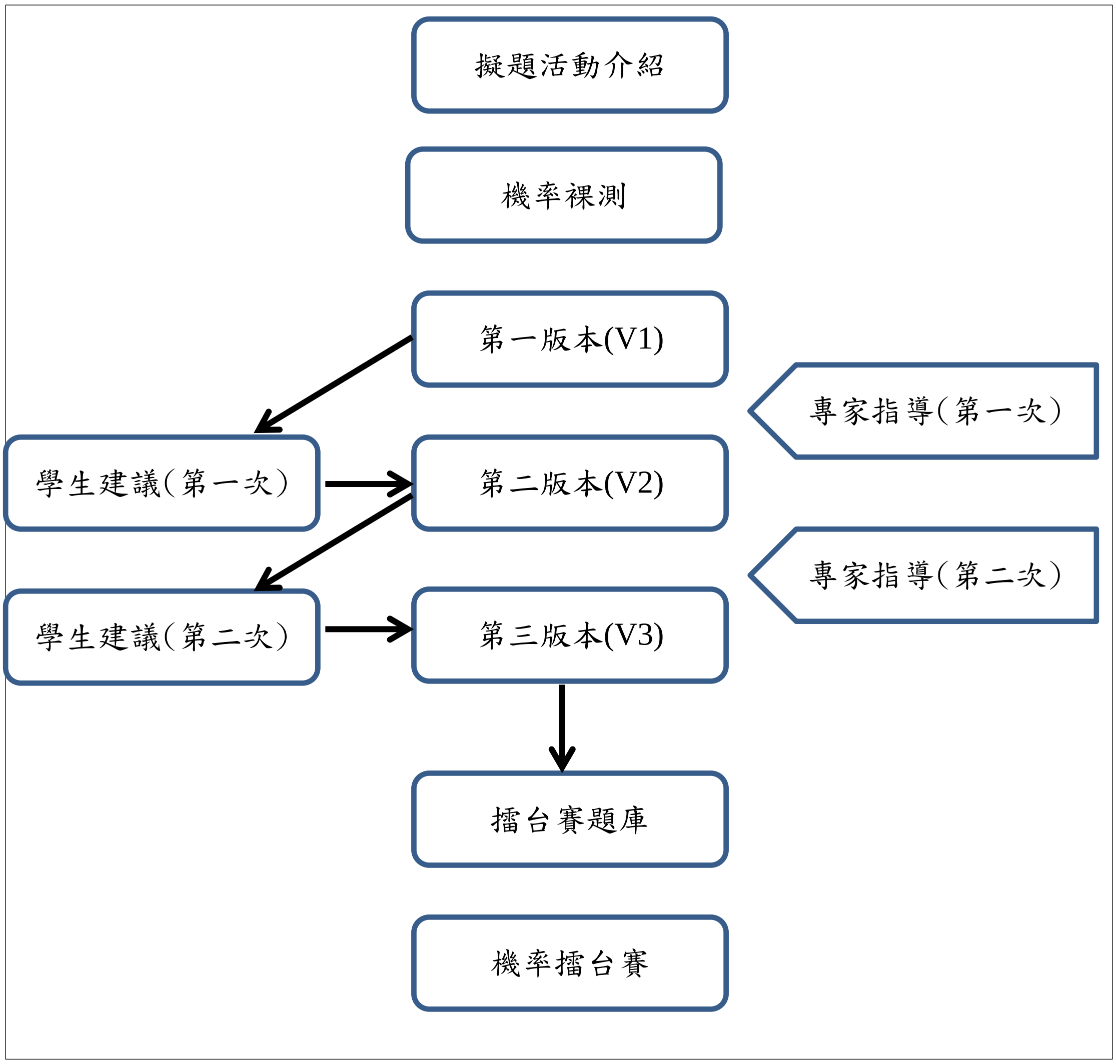


圖 1　機率自由擬題活動設計流程

一. 擬題活動介紹

研究者考量學生對出題經驗的陌生，因此在活動開始前的第一節課，由兩個班級之教師進行擬題活動說明。引導學生在擬題素材上的選擇，可以朝著自身生活周遭經驗作連結與提取，強調不拘題目的任何形式。期望學生的擬題類型能跳脫課本題型之框架，刺激學生對擬題的理解與思考。此外，除了針對題目的文字書寫，活動希望學生能多設計圖形、表格來表達題目內容。

二. 機率課測

在擬題活動的前，本研究設計了一份機率測驗題目作為課測使用。課測目的並非測試學生的機率能力，而是期望能從中分析，這些未接受過正式機率教育的學生，從生活經驗產生的自發性機率知識 (許哲毓，陳斐卿、單維彰，修訂中)。本研究選擇課測作為學生於活動中，起始能力之判定，以切合研究目的擬題進展之要件。因此，將會藉由課測的分數進行高中低分組，從中分析擬題題目之特徵為何？

三. 擬題版本(V1、V2 及 V3)

本活動的擬題出題單如下圖 X－OO 國中擬題達人。在第一次版本(V1)，研究者先讓學生約有二十分鐘可以先行思考並試著擬題，之後再開放時間讓學生自由地去找同儕尋求協助出題，並要求協助者所給予的建議指示記錄下來，並且鼓勵學生將自己的題目寫出解答與列出解題過程。為了刺激學生對生活周遭或情境的連結，研究者鼓勵學生攜帶助於數學思考之物品，作為擬題的輔助，如課本、作品或其他文化物品等。而之後的第二(V2)與第三版本(V3)裡，學生可根據前幾次版本學生之建議活動，加以促成或修改新版本的題目內容，呈現題目更完整性的樣貌。

○○國中擬題達人

<table>
<tr><td>班級：</td><td>座號：</td><td>所攜帶物品：</td><td>協助出題者簽名與建議
(空間不足可寫在背面)</td></tr>
<tr><td colspan="3">題目(第一版)：</td><td>姓名：
建議：

姓名：
建議：</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：(寫出詳細解題過程)</td></tr>
</table>

圖 2　OO 國中擬題達人

四. 專家指導

研究者為期望學生的思維能走在正確的方向上，因此專家的計入有其必要性，分別為研究者指導教授及田野學校 A、B 班兩位導師，兩位皆為數學科教師。其中兩次專家指導的介入時間分別在對第一版本 (V1) 及第二版本 (V2) 的修改前。在對第一版本的修改前，專家提供機率概念的指導課程與學習單，參考附錄一單維彰老師主編---機率擬題學習單 20151021。由研究者指導教授主講，針對機率的數學性質、機率概念類型做講解，並列出在第一次版本中與上述具相關、類似的學生題目，供為學生參考與修改。在對第二次版本的修改前，由兩班級的導師進行指導，以課堂方式呈現，其主要授課內容以回憶前次擬題活動與例子為主。因此，除了第一版本是未經任何教學或提示下所擬出的題目外，其餘兩版皆有經歷概念的指導或同儕的交流。

最後而為確保學生的心思在擬題活動裡，在每一次活動中皆提醒學生，這些擬出來的題目，將列入機率擂台賽之題目，並展示於全校作為全九年級機率擂臺賽之考題。

五. 學生建議

在擬題活動設計上，學生有兩次版本的修改，同時也有兩次同儕的建議。在建議的設計上，活動將兩個班級擬出的題目卷進行兩班互換，如 A 班學生所擬之題目交由 B 班學生進行建議活動，B 班題目則交由 A 班。兩班級的學生可根據另一班出題者所擬的題目內容與解答過程給與建議，例如題目敘述的合理性、條件與性質的完整性等。而為提升建議的品質性，研究者鼓勵學生勇於說出自己對題目的想法及有何不同之處，以及不拘任何形式的書寫，以讓學生感到安心思考於其中。

六. 機率擂台賽

本研究將學生擬題的第三版本作為擂台賽題庫之素材，並於機率擂台賽當日展示於全九年級的學生。擂台賽活動時程選定九年級下學期的期末且會考之後至田野學校舉辦，流程時間共 3 小時。除了鼓勵擬題者在這半學期的用心與努力外，希望能將這份成果分享於全九年級的學生，一同挑戰擬題的學習活動。題庫裡的題目將依照難易度由易至難分類為擬題區、新手區及高手區，學生可以個人或小組方式進行題目的解答。活動結束後的隔一個禮拜，研究者將依照參賽者答題最多、答對最多...等，及擬題者被選取最多次作答的人氣獎，共 8 個獎項回到學校進行頒獎。

第三節 研究工具

本研究擬題內容之分析，修改沿自陳斐卿等人研究團隊開發的擬題評量規準 (江家瑋，2014；陳斐卿等人，2015)。除了可解性、可讀性與生活性繼續沿用，在精緻性方面，為更能夠完全呈現機率在數學上的性質樣貌，在條件設計上做出事件、試驗與樣本空間的評定，期望在敘述上有完整的陳述。另一方面，數學概念層次將發展成機率概念層次，本規準機率概念類型採用 Shaughnessy (1992) 所彙整之觀點，以及 Jones 等人 (1999) 所提出之架構，作為主要依據與基礎，再依課綱之順序安排，調整以符合台灣機率課程之特徵，共彙整出沒有機率、主觀機率、客觀機率、複合事件、獨立事件、條件機率、期望值七種評分依據。然而本研究為了探究學生的機率思維及評分方便，將前三者機率類型與後四者概念層次，合併成一個序列為「機率概念層次」，且規定取最高的概念層次為評分依據。

一. 機率自由擬題品質評量規準

此評量規準乃基於數學與自由擬題之特質，並且整合機率概念層次，發展沿用全新的機率評量規準。規準包含了五個向度，其分述如下：

1. 可解性：

   主要評量題目是否完結、是否為數學問題、條件與訊息是否充足、是否可解、題意是否清晰。

2. 可讀性：

   用字明確、合理程度。主要評量是否有文字累贅、訊息多餘、漏掉內文連接、關鍵字詞的情況。以及是否有不合乎常理、邏輯的數字與敘述。

3. 生活性：

   題目題材的特殊性及與生活的連結程度。主要評量題目是否具有情境、是否深入真實生活以及是否新奇、稀罕、跳脫課本形式。

4. 精緻性：

   在「精緻性」的部分與江家瑋 (2014) 於國小五年級學童擬題研究比較，國小「精緻性」的評分依據，多為數學的運算式子上精心設計的程度。然而，本研究為國中九年級學生的機率擬題,為了能呈現出一道完整的機率題目樣貌，除了保留國小基本的數學運算外，更增加專為機率題目所構成之要素：條件上的設計，其中包含樣本空間、事件等描述。所以，如下表 2 中的「精緻性」，國小與國中兩者的相同之處為保留基本之數學運算，有 1.題目需運算的數字有經過設計、2. 有陷阱安排的設計、3.概念轉換、4.有運算上的設計、7.利用圖示或表格輔助題目敘述、8.題目具有至少 2 步驟。相異之處為 5.條件上的設計(事件、試驗設計等…)、6.樣本空間中有限集合的呈現。

5. 機率概念層次：

   題目的數學概念之機率概念層次。主要評量題目所涉及的機率概念程度及對機率的解釋。

(1) 沒有機率

(2) 主觀機率 (subjective probability)：主觀機率是指一個事件發生的機率是由人的生活經驗、心理狀態或相信程度所決定的。Ex:某運動選手在比賽前自我評估的勝算。

(3) 客觀機率(單一事件的古典機率或頻率機率)

i. 古典機率 (classical probability)：假設樣本空間 S 中的每一個樣本出現機會均等，則

事件 ***A*** 在樣本空間 ***S*** 中的機率 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$，其中 n(A)為事件 A 的樣本個數，***n(S)***為事件 ***S*** 的樣本個數。Ex：投擲一骰子兩次，出現點數和為 3 的機率為何？

ii. 頻率機率 (frequentist probability)：由觀察重複試驗之相對次數而來，根據實驗設計之觀察結果來決定事件發生的可能大小，所以也被稱為實驗機率。

(4) 機率推論：

i. 複合事件：交集、聯集(互斥)、餘事件

ii. 獨立事件 (independent events)：說明兩事件的獨立性，在直覺上為指一個試驗中的一個事件發生，不會影響到另一個事件發生的結果。而對機率的定義如下：

「兩個事件 A 和 B 是獨立的，則若且唯若 $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$」

iii. 條件機率 (conditional probability)：即事件 ***A*** 在另外一個事件 B 已經發生條件下發生的機率。條件機率表示為 $P(A \mid B)$，讀作「在 ***B*** 條件下 ***A*** 發生的機率」。

(5) 期望值 (expected value)：對一個隨機試驗，將其可能發生的(數值)結果乘上其對應機率的總和。

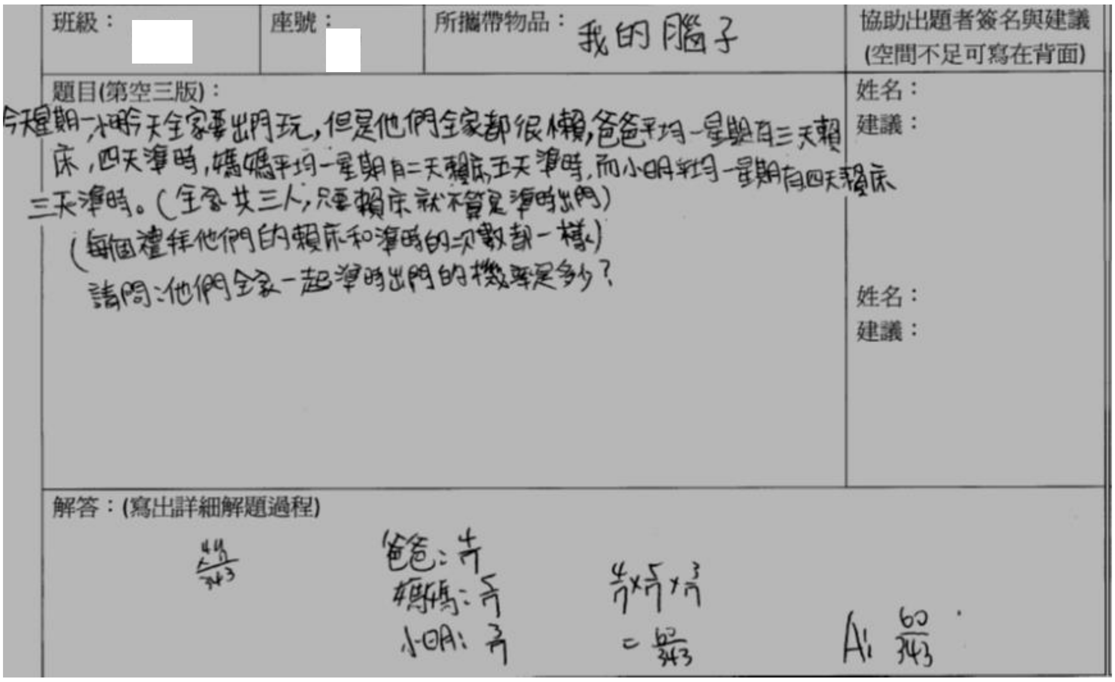
表 2　**機率自由擬題品質評分規準表**

修改自「數學自由擬題品質評分規準表」(江家瑋，2014；陳斐卿等人，2015)

向度	評分依據	評分規準	
		配分	規準
可解性 (可解性)	題目是否完結、是否為數學問題。 條件與訊息是否充足、是否可解。 題意是否清晰、前後文有無矛盾。	6 分	是明確可解的數學問題。
		4 分	題目完結。條件皆充足，但是因題意不清楚，或前後文矛盾導致每個人對題目可能有不同的理解而有多種可能的答案。
		2 分	題目大致完結。但條件有所遺漏，導致無法求解。
		0 分	題目未完結、沒有擬出題目、非數學問題因而無法求解。
用字明確、合理程度 (可讀性)	1. 沒有文字累贅、訊息多餘的情形。 2. 沒有漏掉內文關鍵字、詞的情況。 3. 沒有不合乎常理、邏輯的數字與敘述。	6 分 4 分 2 分 0 分	三項皆符合。 三項中有其中兩項符合。 三項中有其中一項符合。 三項皆不符合。
題目題材的特殊性及與生活之連結程度 (生活性)	1. 題目是否具有情境或故事性。 2. 題目是否貼近真實生活。 3. 題目是否新奇或具稀罕性。	6 分 4 分 2 分 0 分	三項皆符合。 三項中有其中兩項符合。 三項中有其中一項符合。 三項皆不符合。
題目的精心設計程度 (精緻性)	1. 題目需運算的數字有經過設計。 2. 有陷阱安排的設計，例如敘述中有具備陷阱性質的多餘條件 3. 概念轉換，例如勝率與失敗率 4. 有運算上的設計，例如： ①不需運算的數學題目。 ②含加、減、乘、除中，兩項以上(含)兩項的運算。 5. 條件上的設計： ①清楚地描述母體與事件的發生。(例：母體的數字、資訊、線索) ②事件的設計，含兩次以上。 ③試驗的設計，含兩次以上。 6. 樣本空間中有限集合的呈現，例如試圖將牽涉到的連續量，以有限量方式呈現，如分割時間量。 7. 利用圖示或表格輔助題目敘述。 8. 題目具有至少 2 步驟。	6 分 4 分 2 分 0 分	八項中有三項以上符合。 八項中有其中二項符合。 八項中有其中一項符合。 八項皆不符合。
題目的數學概念之機率概念層次 (機率概念層次)	題目中使用到的機率概念。 1. 沒有機率 2. 主觀機率 3. 客觀機率(單一事件的古典機率或頻率機率) 4. 機率推論 i. 複合事件：交集、聯集(互斥)、餘事件。 ii. 獨立事件 iii. 條件機率 5. 期望值	6 分 5 分 4 分 3 分 2 分 1 分 0 分	期望值 機率推論：條件機率 機率推論：獨立事件 機率推論：複合事件 客觀機率(單一事件的古典機率或頻率機率) 主觀機率 沒有機率
			取最高的概念層次作為評分。

第四節 擬題題目範例解說

以下舉一例說明品質規準的評分方式：



班級：	座號：	所攜帶物品：我的腦子	協助出題者簽名與建議（空間不足可寫在背面）
題目(第空三版)：今天星期一，小明今天全家要出門玩，但是他們全家都很懶，爸爸平均一星期有三天賴床，四天準時，媽媽平均一星期有二天賴床五天準時，而小明平均一星期有四天賴床三天準時。（全家共三人，只要賴床就不算是準時出門）（每個禮拜他們的賴床和準時的次數都一樣）請問：他們全家一起準時出門的機率是多少？			姓名： 建議： 姓名： 建議：
解答：(寫出詳細解題過程) 爸爸：$\frac{4}{7}$ 媽媽：$\frac{5}{7}$ 小明：$\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{60}{343}$ A：$\frac{60}{343}$			

圖 3　擬題單 A-27-V3

「可解性」部分，研究者先確認提問是否可形成機率問題後，再回頭檢查條件與訊息是否充足。我們可以看到出題者對爸爸、媽媽及小明三者的準時與賴床之數字設定上，確切且合理的。而值得注意的是出題者使用了「平均」一詞，更帶出數據資料的真實性參考。接著，「全家共三人，只要賴床就不算是準時出門」及「每個禮拜它們的賴床和準時次數都一樣」兩者訊息是構成古典機率問題，機會均等原理的必要條件之特徵。因此這是一道明確可解的機率問題，故而得到 6 分。

接下來，為了談「精緻性」與「機率概念層次」的評量使用方式，研究者必須透過解題方式，從過程中來幫助思考與評定。因此要解出此題，我們可考慮兩個步驟，第一步驟，先考慮母體樣本空間為「平均一星期七天」，再來假設爸爸、

媽媽、和小明準時出門為事件發生的可能，因此透過古典機率的定義可得到爸爸、媽媽及小明準時出門的機率分別為 $\frac{4}{7}$ 、 $\frac{5}{7}$ 與 $\frac{3}{7}$。第二步驟，針對題問「全家一起準時出門的機率」為 $\frac{4}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{60}{343}$。

從「機率概念層次」的部分，研究者以「題目敘述」與「解題歷程」兩種方式做為考量。首先，在這裡的「解題歷程」並非指學生的解題過程，而是研究者親自下去解答的過程。因此，我們能發現此題出現了二種機率層次在裏頭，分別為 1.客觀機率－古典機率、2.機率推論－獨立事件。再來從「題目敘述」來考慮，能發現在內容敘述上，獨立性的概念較為凸顯。譬如學生對爸爸、媽媽及小明三位準時出門天數的設定。所以最後綜合兩者的觀點考量，研究者選擇機率推論－獨立事件作為分數評量，故得到 4 分。

在「精緻性」的部分，研究者對本題給予滿分 6 分，其中包含的評分依據為「5.條件上的設計」、「6.樣本空間中有限集合的呈現」及「8.題目具至少兩步驟」三者，其餘五種皆為我們刪去，而詳細說明如下：

1. 題目需運算的數字有經過有意義的設計

    何謂對數字有意義的設計？研究者期望學生在經歷過國小至國中階段後，對數字的洗禮有更多的覺察。而不再是數字大為難的既定印象，是需要更多的巧思在數字裡頭。譬如說能否對外部文化做連結，數字前後是否有達巧妙地呼應等。因此本題對此以一星期有七天來說為基本概念，但並無巧妙之處，所以無法得到依據上的判定。

2. 有陷阱安排的設計

    題目直述的方式，簡潔又清楚，並無看見學生有設計多於條件的訊息來混淆讀者，因此無法得到依據上的判定。

3. 概念轉換

「概念轉換」主要以學生是否能將其想法延伸至其他的數學概念，甚至是相關的經驗。藉以來沿用或轉換至自己的訊息條件設計，譬如說小學階段所談的邊長與周長，再至對機率能說的勝率與失敗率。所以根據題目敘述的結果，此題無法得到依據上的判定。

4. 運算上的設計

根據解題歷程，明確可知在運算上沒有繁雜的數字計算、操作執行。因此本題無法得到依據上的判定。

5. 條件上的設計

我們透過解題歷程的想法，可輕易看出滿足依據中的細項「①清楚地描述母體與事件的發生」及「②事件的設計，含兩次以上。」兩者對條件上的設計，所以已符合依據上的判定。

6. 樣本空間中有限集合的呈現

我們已知時間是具有連續性的，因此學生在內容敘述「平均一星期...」中，使用「平均」一詞，除了能凸顯生活的真實性外，也能說明正在對以時間為樣本空間的集合做出一星期的分割。因此根據上述，本題已符合此項依據上的判定。

7. 利用圖示或表格輔助題目敘述

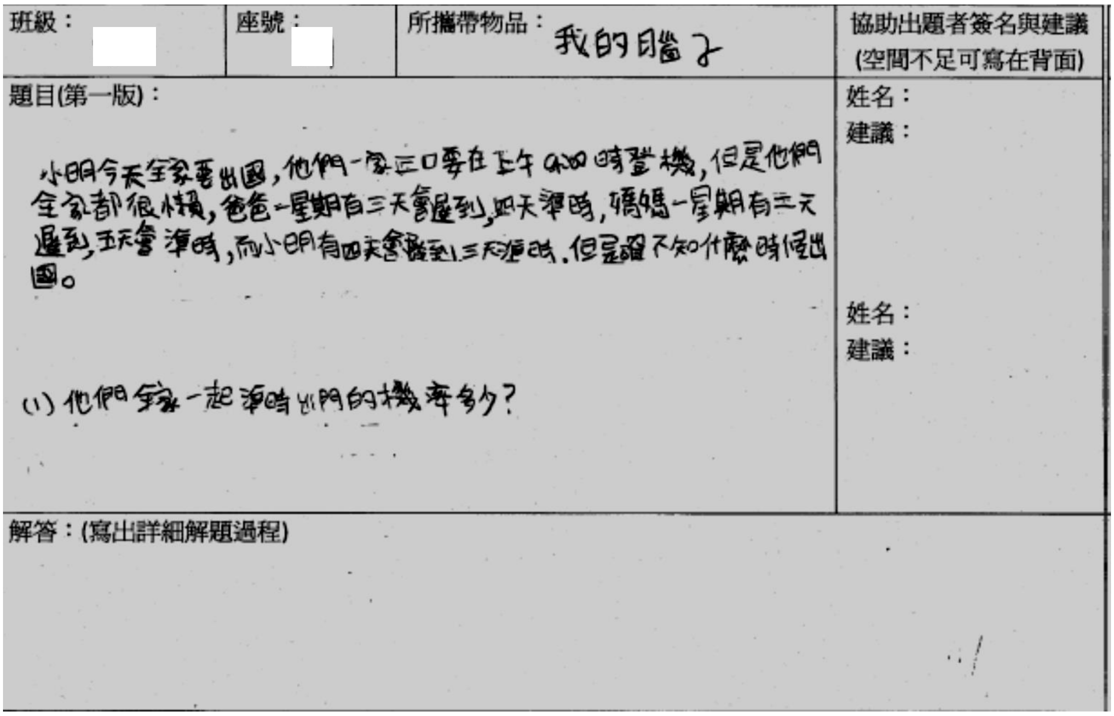
明顯可知本題並無利用圖示或表格方式，作為題目敘述的輔助，因此本題無法得到依據上的判定。

8. 題目具有至少 2 步驟

根據我們在「解題歷程」中所考慮的兩個步驟，說明古典機率與獨立事件的想法要轉換至運算的同時，可分門考量為兩個程序正在執行。因此根據這樣的想法，本題已符合此項依據上的判定。

第四「可讀性」部分，本題的敘述內容，前後並無不合理之處，因此得到依據上的 6 分。

而為比較可讀性之間的差異，研究者再舉同一位學生於第一版本(V1)時的擬題單比較，如下圖 3-1：


班級：

座號：

所攜帶物品：我的腦子

協助出題者簽名與建議(空間不足可寫在背面)

題目(第一版)：

小明今天全家要出國，他們一家三口要在上午9:00時登機，但是他們全家都很懶，爸爸一星期有三天會遲到，四天準時，媽媽一星期有二天遲到，五天會準時，而小明有四天會遲到，三天準時。但是還不知什麼時候出國。

(1) 他們全家一起準時出門的機率多少？

姓名：

建議：

姓名：

建議：

解答：(寫出詳細解題過程)

圖 3-1　擬題單 A-27-V1

相較之下，可看出在內容書寫上就較為生疏簡陋，以及條件訊息設想得並不周到。第一版本的另一問題為題末「但是還不知道什麼時候出國」與一開始所說的「要在上午 9：00 登機」形成了不合理或矛盾的現象。因此無法實得可讀性依據上的第 3 點「沒有不合乎常理、邏輯的數字與敘述。」因此本題皆滿足可讀性依據上的二項要點，所以得 4 分。

最後，「生活性」部分，研究者考量賴床與準時貼近平時日常生活上的情境之一，再加上以一家三口的賴床情況，以及詢問全家準時出門之機率形成強烈的

對比，頗為新奇且有趣。因此本題皆滿足生活性依據上的三項要點「題目是否具有情境或故事性」、「題目是否貼近真實生活」與「題目是否新奇或具稀罕性」，所以得分 6 分。

第五節 資料收集

一. 機率課測題目卷

首先，本研究活動實施的機率課測，其實施時間為擬題活動前一周(九月中)，且 A、B 兩班共全員皆參與測驗，共回收 62 份試卷。測驗課測題目皆來自近年基測、會考或課本例題，所以試題品質受到國家考試驗證，或經由教科書審查通過。若題目類型以大考中選出，則以國中機率中頻率機率與古典機率為主，但若從課本選出，則包含主觀機率與獨立性概念。測驗題目共計 15 題，前 4 題為是非題，後 11 題為計算題，每題 1 分，滿分為 15 分，測驗時間為 45 分鐘，而計算題須寫出計算過程

二. 擬題出題單

本研究活動設計之擬題出題單，皆在三次版本裡作利用，在內容上包含所攜帶物品、協助出題者簽名與建議、擬題內容與詳細解答過程，參考圖 2－OO 國中擬題達人。本活動的擬題出題單回收份數如下，第一版本 59 份，第二版本 60 份，第三版本 61 份，共計回收 180 份。

三. 擂台賽答題單

研究活動以學生擬題的第三版本，作為擂臺賽題庫資料，而題庫再以評量規準裡的向度「機率概念層次」做出五大分類，其依序為 1.沒有機率、2.主觀機率、3.客觀機率、4.機率推論及 5.期望值。其中，本次機率擂臺賽活動共計回收 1528 份學生答題單。擂台賽答題單的設計如下圖 4－2016 OO 機率擂台賽(以 A-06-V3 為例)，其內容包含出題者班級、題目內容、分數與解答過程。

2016〇〇機率擂臺賽

題號：		出題者：	
班級：	座號：	姓名：	得分：

賭神高進和他的徒弟陳小刀在澳門和陳金城有一場賭局，不管誰輸了輸的人要切掉雙手。比賽是以三局決勝負，三局都是比「德州撲克」。

遊戲規則如下:

洗牌人將撲克牌隨洗(不包含 Joker，以有字面朝下滑成圓弧狀，洗牌人將為兩位各發第一張撲克牌，第一張牌不能打開，總共會各發五張牌，另外四張皆要翻開，最後，贏的方式是看誰的牌大…

兩位目前都各贏一局了，最後一局兩位翻開的四張牌如下:

高進:10.J.Q.K(都黑桃♠)

陳金城:紅心♥A.方塊♦A.梅花♣A.方塊♦9.紅心♥9

請問，高進贏的機率有多少?

P.S 答案有三個。

解：(請寫出解題過程)

答：(請寫出答案)

圖 4 2016 OO 機率擂台賽(以 A-06-V3 為例)

然而，在機率擂臺賽的活動中，為方便活動流程的進行，我們將題庫資

料根據三大類別做出區分，並在現場清楚擺放，供學生自行挑選合適自己的題目作答。其三大分類說明如下表：

表 3

機率擂台賽區位分類表

機率擂台賽	機率概念層次	說明
擬題區	1. 沒有機率 2. 主觀機率	沒有機率與主觀機率皆為不可解的題目，所以研究活動將其重始於擬題區，供答題者選擇再次翻修
新手區	1. 客觀機率： (1) 古典機率 (2) 頻率機率	新手區以現階段學生已具備該學力為考量，題目符合課程綱要與課本內容，因此以古典或頻率機率為主
高手區	1. 機率推論： (1) 複合事件 (2) 獨立事件 (3) 條件機率 2. 期望值	高手區的選擇與新手區相反，常見的是以高中課程概念為基礎之題目

首先，由於「擬題區」定義的題目為不可解，因此期望學生能透過正式課程學習的機率概念，選擇擬題區的題目原型，試著加入其他條件元素，修改題目使得更為完整以達可解。另一方面，此區也能讓 A、B 兩班以外的班級，即不在研究對象的班級，接觸與體驗擬題所帶來的樂趣。接著，「新手區」的目的除了用來回顧與複習機率的學習外，更讓人知道的是，數學的學習內容可脫離一般課程模式，透過擬題的方式，讓數學的概念貼近於自己的生活圈。最後的「高手區」，此時的題目類型接近高中課程之範疇。因此除了具備了挑戰性之外，也考驗著學生能否將國中機率課程所學的古典機率、方式，更為應用與拓展到新的機率層次。

擂臺賽題目的答題人數可說明學生對機率的能力及興趣的選擇，因此研究者蒐集資料，試著探討國中階段的學生在機率概念類型的表現與狀況。

第六節 資料分析

本研究將蒐集資料「機率課測題目卷」、「學生擬題出題單」，進行資料的統計與分析，其中設定 0.05 為顯著水準，藉以討論研究問題 1.在機率擬題活動歷程中，學生所擬的題目的進展表現為何？及 2.透過自由擬題之機率的發想，機率思維有何進展？接著將資料蒐集「擂臺賽答題單」採取內容分析法，藉以討論研究問題 3.學生面對超過國中範圍的問題解題，興趣與能力為何？

本章將在以下個別說明資料分析中的資料編碼、機率課測題目卷、學生擬題出題單及擂臺賽答題單，以及評分者一致性。

一. 資料編碼

研究者將學生擬題單分為三碼說明：

第一碼：A 表示第一個實驗班級，B 表示第二個實驗班級

第二碼：數字用以表示學生的座號

第三碼：V1、V2、V3 分別表示第一版本、第二版本及第三版本

舉例說明：A-19-V1 表示 A 班 19 號的第一版本擬題。

二. 機率課測題目卷

研究者將蒐集課測資料作為學生起始能力之判斷，並用分數將學生分為高、中、低三組，以探討在擬題上有何特徵與表現。研究者本欲使用 27%定義高中低分組，但結果發現前後 27%的人數，其落點在同分的人數有過多的情況。因此研究者根據機率課測分數的次數分配，採用前後 24%的比例選取高中低分組，

三. 學生擬題出題單

學生的擬題內容搭配研究工具－機率自由擬題品質規準，用以量化數據資料，接著進行資料的統計與分析。因為學生的題目有三次版本的修改，而版本之間的變動，可受到其他因素所影響，如專家介入、建議等，因此各版本之間可視為一個相依樣本(Dependent Sample)，所以研究分析採取成對樣本 *t* 檢定(Paired-Sample *t* Test)，來探討各版本之間的進展表現。

四. 擂臺賽答題單

研究者將針對「高手區」的擂臺賽答題單，進行內容的分析與探討。「高手區」的分類定義為「機率推論」與「期望值」，兩者的機率概念層次皆為高中課程之範疇，學生在此的答題，可視為超過目前國中課程範圍的問題解決能力，因此藉由擂臺賽題目卷來探討學生對超過目前國中課程的解題能力及興趣。

五. 評分者一致性

本研究以內容分析法探究機率擬題的題目，故以「題」作為最小文本分析單位。為了使機率擬題評分的決定更具客觀性，仰賴兩位評分者進行，其分別具有學習領域及數學領域之專長，選取第一版本、第二版本及第三版本依據評量規準進行評分，若有疑慮之處將進行討論，提出建議與看法，直到評分確定。

因此，本研究以二位評分者所評分數的相關係數作為評分者一致性的信度係數，其中，第一版本有 59 題；第二版本有 60 題；第三版本有 61 題，進行評量規準的評分，並計算出各版本的評分者一致性，分別如下表 4，有表可知，評分者皆有高度的一致性。

表 4

評分者一致性向度評分

向度 版本	可解性	可讀性	生活性	精緻性	機率概念 層次
V1	.802	.889	.842	.882	.872
V2	.811	.860	.879	.883	.915
V3	.858	.881	.847	.831	.890

第四章 研究結果

本章欲探討研究結果對於學生在機率擬題活動歷程中，所擬的題目的進展及機率思維表現為何？以及學生面對超過國中範圍的問題解題，興趣與能力為何？分別說明有機率擬題品質的進展、有修改題幹者擬題品質分析、機率概念層次及結果討論。最後將根據研究結果進行分析與簡單歸納結論。

第一節 機率擬題品質的進展

本研究採用成對樣本 *t* 檢定來探討機率擬題品質的進展，其中選定的樣本以三次修改版本 V1、V2 及 V3，且三次樣本各自成對作檢定。檢定結果如表 5 所示。其中，各類別的樣本數會因各版本之間的缺少題目而當作遺漏值扣除。

表 5

成對樣本 *t* 檢定－機率擬題品質

可解性						
類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值
V1 對 V2	V1	57	3.4561	2.42067	-1.365	.178
	V2	57	3.9298	2.26668		
V2 對 V3	V2	59	4.0000	2.25908	-3.953	.000*
	V3	59	4.8136	1.93404		
V1 對 V3	V1	58	3.3966	2.44188	-3.940	.000*
	V3	58	4.6897	2.03657		
可讀性						

(續下頁)

類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值
V1 對 V2	V1	57	5.6842	.82717	-.866	.390
	V2	57	5.8070	.78918		
V2 對 V3	V2	59	5.8136	.77625	-1.587	.118
	V3	59	5.9661	.26038		
V1 對 V3	V1	58	5.6897	.82093	-2.178	.034*
	V3	58	5.9310	.36812		
生活性						
類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值
V1 對 V2	V1	57	3.8246	1.32453	-.651	.517
	V2	57	3.9298	1.46214		
V2 對 V3	V2	59	3.8983	1.50511	-.772	.443
	V3	59	4.0000	1.43839		
V1 對 V3	V1	58	3.8276	1.31306	-1.589	.117
	V3	58	4.1034	1.37253		
精緻性						
類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值
V1 對 V2	V1	57	2.7018	2.05257	-1.560	.125
	V2	57	3.0877	2.00250		
V2 對 V3	V2	59	3.1525	1.93706	-2.915	.005*
	V3	59	3.6271	1.83734		
V1 對 V3	V1	58	2.6897	2.03657	-3.194	.002*
	V3	58	3.5517	1.91185		
機率概念層次						
類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值

(續下頁)

V1 對 V2	V1	57	2.2982	1.38828	-1.479	.145
	V2	57	2.5614	1.37604		
V2 對 V3	V2	59	2.6610	1.42163	-2.188	.033*
	V3	59	2.8644	1.45576		
V1 對 V3	V1	58	2.3621	1.45937	-2.382	.021*
	V3	58	2.7931	1.42359		

一、 機率擬題品質分析

從表 5 的結果顯示，「可解性」的「V2 對 V3」與「V1 對 V3」已達到統計上的顯著差異($p = .000 < .05$；$p = .000 < .05$)；「可讀性」的「V1 對 V3」已達到統計上的顯著差異($p = .034 < .05$)；「精緻性」的「V2 對 V3」與「V1 對 V3」已達到統計上的顯著差異($p = .005 < .05$；$p = .002 < .05$)；「機率概念層次」的「V2 對 V3」與「V1 對 V3」已達到統計上的顯著差異($p = .033 < .05$；$p = .021 < .05$)。然而在「生活性」方面，其三個類別 V1 對 V2、V2 對 V3 及 V1 對 V3 的 p 值皆大於顯著水準 .05，是唯一其三個類別皆無達到顯著差異的向度。

從表 5 的統計結果顯示，學生於自由擬題活動中，其「可解性」、「可讀性」、「精緻性」及「機率概念層次」的顯著差異可說明，其擬題品質經過三次的修改歷程品質都有向上提升的改變。

1. 各向度的擬題表現

本次擬題活動經歷三次版本的修改，其分別為第一版本 V1、第二版本 V2 及第三版本 V3。接著，根據機率擬題品質評量規準各自對三次版本的擬題修改進行五種向度的評分，五種向度的滿分均為 6 分。在「可解性」、「可讀性」、「生活性」及「精緻性」方面，若評分分數越高，則表示學生擬題的品質愈加完整，反之則不理想。由於「機率概念層次」的評分是以數學概念層次的堆疊為依據，

因此評分分數愈高，則表示學生機率概念的思維層次愈高，反之則低。

為了解學生在機率擬題活動的前後表現，研究者以第一版本 V1 及第三版本 V3 分別代表擬題過程前後的表現。由表 5 的五種向度類別之中，V1 對 V3 的描述型統計可知，平均數的差異(V3 － V1)均為正數，亦即 V3 的平均數均高於 V1 的平均數。接著將達顯著的向度之平均數差異，由高至低排序分別為「可解性」(1.2931)、「精緻性」(0.8620)，「機率概念層次」(0.4310) 及「可讀性」(0.2413)。

因此由平均數差異可知，學生經歷三次的擬題修改，一題多磨，在擬題表現上有不錯的成長，也表示每一次的修改都有進步空間能使學生發揮。其中，平均數差異最高的為「可解性」(1.2931)，除了考量原因為專家在歷程中有兩次介入的觀念澄清外，題目的修改歷程能使學生對數學問題的可解意識越來越清楚。而平均數差異最低的「可讀性」(0.2413)，並不代表學生在歷程的前後表現不夠起伏，該值得注意的是第一版本 V1 (5.6897)與 V3 (5.9310)的平均數本身就已接近滿分 6 分。這說明國三的學生本身就已有相當的程度，能對題目做清楚的描述與呈現。

接著，為了解學生對擬題初步思考的表現為何？我們將兩次版本的平均數由大至小作排序，V1 版本依序為「可讀性」、「生活性」、「可解性」、「精緻性」及「機率概念層次」； V3 版本依序為「可讀性」、「可解性」、「生活性」、「精緻性」及「機率概念層次」。

上述情況顯示，學生對於擬出題目的思考，一開始注重在「可讀性」與「生活性」的書寫。除了反映學生的文字能力成熟外，對題目的關注為內容上的資訊呈現，而這些資訊的題材都來自於學生的日常生活裡。而當擬題時間來到第三次

的修改,「可解性」的排序來到第二順位。這說明自由擬題提供的題目修改歷程，能使學生對題目的「可解性」意識更加清楚與重視。而好的題目之完結，不能只看重題目形式的厲害，而是能否構成一道可行的問題為考量。

最後在「精緻性」與「機率概念層次」方面，兩次版本的平均數排序皆為向度裡的倒數一二名。因為在「精緻性」的評量面向，評分依據是以構成機率題目之性質與條件作為評量標準，所以在本次擬題活動並未提供機率的教學之下，學生對「精緻性」的思考較為薄弱。因此評分分數並不高，同樣的說法與「機率概念層次」相同。然而根據前述我們對平均數差異的說法，其五種向度皆有成長表現來看。儘管「精緻性」與「機率概念層次」兩者向度的評分並不高，但學生是能夠透過擬題活動的歷程，將機率的概念得到學習效果，有成長的表現進行。

2. 擬題字數表現

研究者使用機率課測分數進行高中低分組，其結果如下表 6 所示。從表 6 可知，無論是高、中或低分組，在字數上皆有成長的趨勢，且由圖 5 長條圖的顯示更為清楚見得增長。接著可以發現高分組在第三個版本 V3 的平均字數高於總平均。中分組雖然在第二版本的平均字數出現高於總平均的情況，但到第三版本 V3 時，其修正至低於總平均。然而低分組雖然在第一版本高於總平均，但至第三版本 V3 時，其修正至低於總平均。

表 6

高中低分組－機率擬題字數平均

分組＼版本	V1	V2	V3
高分組(n = 19)	80.50	99.83	128.16
中分組(n = 21)	80.19	104.47	113
低分組(n = 17)	87.88	98.47	106.35
總平均(n = 57)	82.85	100.92	115.83

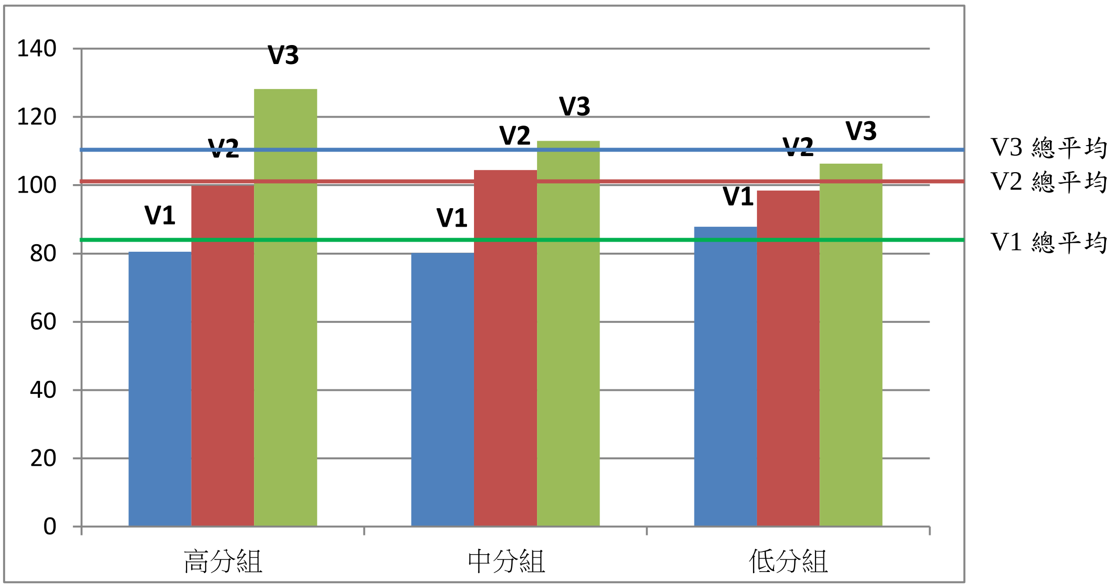


圖 5　高中低分組－機率擬題字數

接著，為了解字數增加是否會影響題目內容的「可讀性」，如字數增加導致用字多餘、漏掉關鍵字或增加敘述不合理情況，研究者根據「各向度的擬題表現」可知學生在「可讀性」上的進展雖不多，但由於各版本平均數已接近滿分 6 分，所以不論是高、中、低分組，學生題目「可讀性」的水平是一致的。下表 7 研究者同樣根據裸測分數將「可讀性」進行高、中與低分組。

表 7

高中低分組－可讀性

版本 / 分組	V1	V2	V3
高分組(n = 19)	5.56	5.91	6
中分組(n = 21)	5.77	5.64	5.88
低分組(n = 17)	5.76	5.89	5.90

然而，題目內容文字的長度，可影響讀者在腦中的資訊接收，進而影響內容的轉譯與整合。根據表 7 的結果，高、中分組的學生在初始的表現，由於過去數學概念及閱讀學習的累積，學生有能力將題目做出適當的修飾。而低分組的學生雖然初給字數給得大，但在後兩次的擬題歷程修改，其表現皆在總平均字數之下，表現甚至比高分組來得好。值得注意的是高分組於 V3 版本時，其平均字數量超前其他組 10 個字以上。研究者認為高分組的學生，將修改歷程時間拉長，學生逐漸會投入更多的心力來翻修題目，發展複雜的題目。但這樣的企圖心容易不小心使得字數量大增，另外，從表 7 也可說明字數的增加，並不影響題目內容「可讀性」的品質。

在下一段，我們將透過學生的擬題的翻修作為範例，並對擬題品質規準的各向度做分析說明。

1. 可解性的進展與說明

以下我們選擇 A-13-V1 至 V3 作為「可解性」的例題範例，並以圖 6-1、圖 6-2 與圖 6-3 分別代表修改擬題的第一版本、第二版本與第三版本。

班級：	座號：	所攜帶物品：沒有

題目(第一版)：

今天天氣很好，阿均走路去上學，總共有3條路，第一條路會遇到兇猛的獅子，第二條路可以免費搭飛機，第三條路可能會踩到屎，假設抽撲克牌1,2,3會走到第一條，抽J,Q,K會走到第二條，7,8,9會走到第三條，那走到第一條路的機率是多少？

圖 6-1　擬題單第一版 (A-13-V1)

班級：	座號：	所攜帶物品：

題目(第二版)：

今天天氣很好，阿均走路去上學，總共有3條路，假設抽撲克牌抽到1,2,3,4會走第一條路遇到兇猛的獅子，抽到5,6,7,8會走第二條路可以免費搭飛機，抽到9,10,11,12會走第三條路可能會踩到屎，那走到第一條路的機率是多少？

圖 6-2　擬題單第二版(A-13-V2)

班級：	座號：	所攜帶物品：

題目(第空三版)：

俊會走路去上學，總共有3條路，假設抽撲克牌抽到A,2,3,4會走第一條路遇到獅子，抽到5,6,7,8會走第二條路可以免費搭飛機，抽到9,10,J,Q會走第三條路會踩到屎，那走到第一條路的機率是多少？

※這副撲克牌只有A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q張

圖 6-3　擬題單第三版(A-13-V3)

在第一版本中(圖 6-1)，能看到學生的擬題架構呈現古典機率的形式，並且

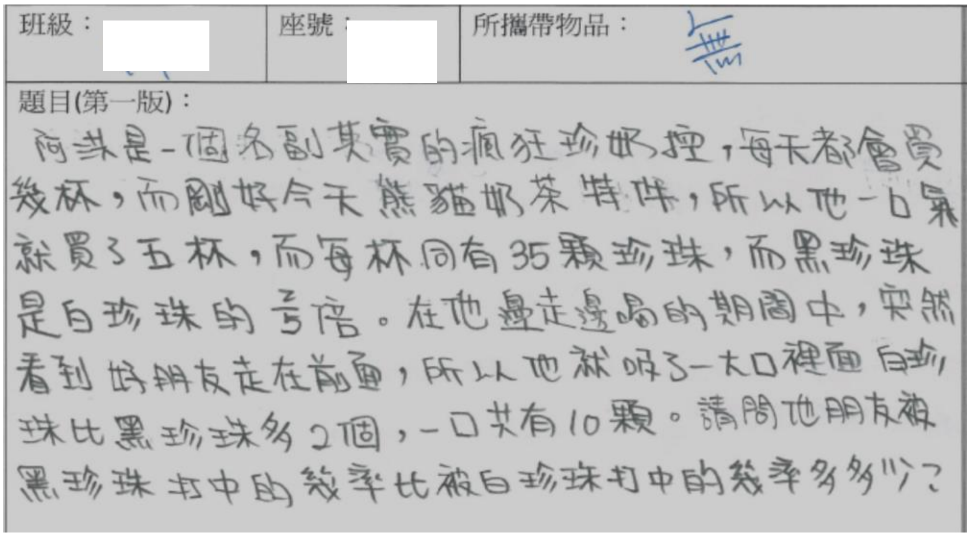
使用抽取撲克牌做為發生可能事件的條件。但題中問到「走到第一條路的機率是多少？」時，可以發現到本題問題點出現在學生缺少對母體事件的描述，導致題目條件的缺失以致於機率樣本空間的不完整，使得無法作答。因此在擬題品質評分上給予 2 分(題目大致完結。但條件有所遺漏，導致無法求解)。

在第二版本中(圖 6-2)，古典機率的題幹依然不變。題目的改變只有調整、增加抽牌事件的可能，如增加抽到牌號 4、5、6 與 10 的可能。但第二次版本的修改與第一版本的情形相同，其缺少母體事件的條件敘述，因此無法成為完整的古典機率問題。

最後的第三版本(圖 6-3)，古典機率的題幹依然不變。但學生對母體事件的處理，已做出明確的給予，如在題目下方的備註「※這副撲克牌只有 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q 張」。可知本副撲克牌總共有 12 張，能建立出完整的樣本空間，使得本題朝向古典機率類型架構更為精準。因此在擬題品質「可解性」的評分給予滿分 6 分(是明確可解的數學問題)。

2. 可讀性的進展與說明

以下我們使用題號 A-19-V1 至 V3 作為「可讀性」的例題範例，並以圖 7-1、圖 7-2 與圖 7-3 分別代表修改擬題的第一版本、第二版本與第三版本。

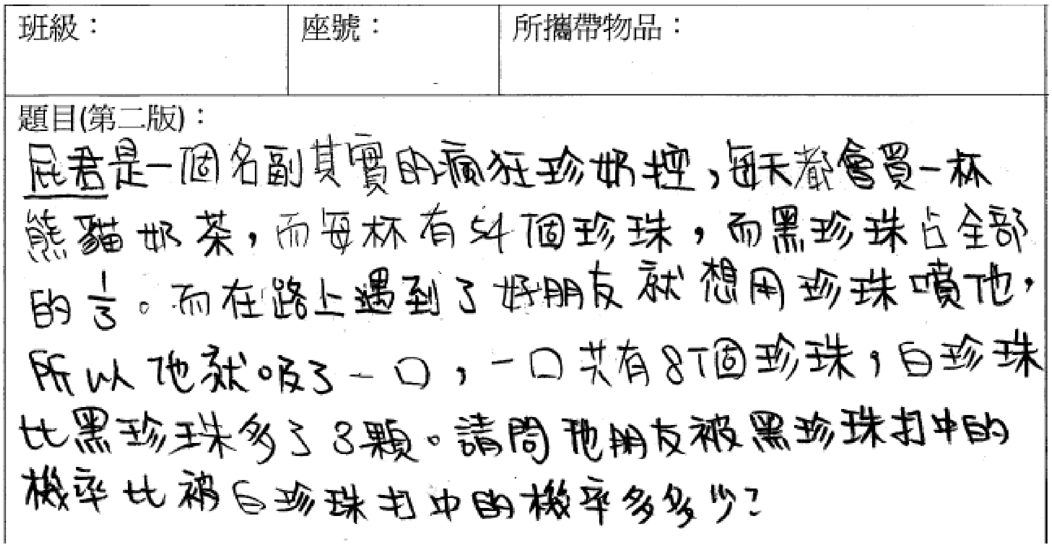


班級： | 座號： | 所攜帶物品：無

題目(第一版)：

阿君是一個名副其實的瘋狂珍奶控，每天都會買幾杯，而剛好今天熊貓奶茶特價，所以他一口氣就買了五杯，而每杯同有35顆珍珠，而黑珍珠是白珍珠的$\frac{2}{5}$倍。在他邊走邊喝的期間中，突然看到好朋友走在前面，所以他就吸了一大口裡面白珍珠比黑珍珠多2個，一口共有10顆。請問他朋友被黑珍珠打中的幾率比被白珍珠打中的幾率多多少？

圖 7-1　擬題單第一版(A-19-V1)

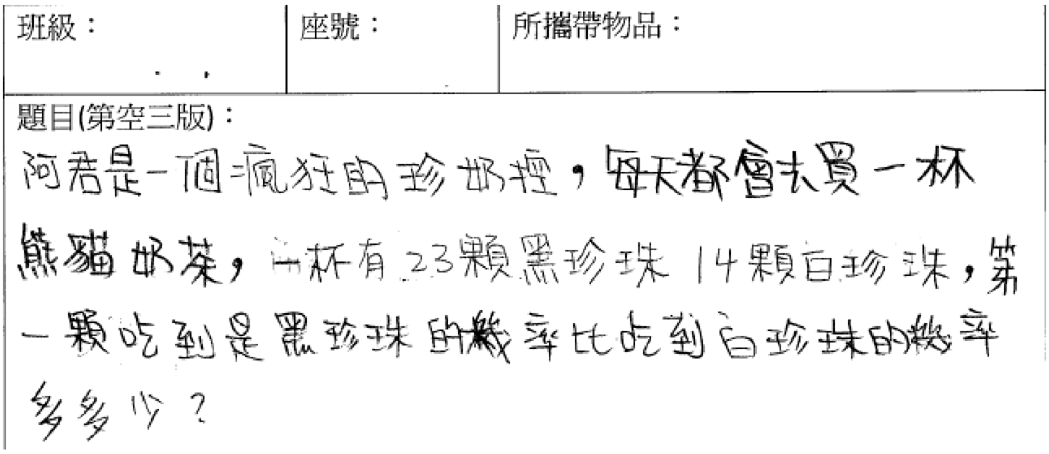


班級： | 座號： | 所攜帶物品：

題目(第二版)：

屁君是一個名副其實的瘋狂珍奶控，每天都會買一杯熊貓奶茶，而每杯有54個珍珠，而黑珍珠占全部的$\frac{1}{3}$。而在路上遇到了好朋友就想用珍珠噴他，所以他就吸了一口，一口共有8個珍珠，白珍珠比黑珍珠多了8顆。請問他朋友被黑珍珠打中的機率比被白珍珠打中的機率多多少？

圖 7-2　擬題單第二版(A-19-V2)



班級： | 座號： | 所攜帶物品：

題目(第空三版)：

阿君是一個瘋狂的珍奶控，每天都會去買一杯熊貓奶茶，一杯有23顆黑珍珠14顆白珍珠，第一顆吃到是黑珍珠的機率比吃到白珍珠的機率多多少？

圖 7-3　擬題單第三版(A-19-V3)

在第一版本中(圖 7-1)，題目的敘述「黑珍珠是白珍珠的 $\frac{2}{5}$ 倍」與「請問他的朋友被黑珍珠打中的機率比被白珍珠打中的機率多多少？」。前者缺少單位數量上的名詞，如數量。而後者所提的「打中」，無法藉由上下文的敘述去尋找「如何打中」的前因後果。因此上述的情況，形成對題意的不明確產生。接著，第二圖 8-2)的狀況與第一版本相同。兩者皆在讀者進行閱讀時，因字句之間出現關鍵字的描述遺失或缺漏，形成對題意的不明確產生。因此在擬題品質「可讀性」的評分給予 4 分(缺少 2. 沒有漏掉內文關鍵字、詞的情況)。

在第三版本中(圖 7-3)，顯而易見的是學生將題目內容、文句作大量的刪減，簡化重點，但不失原本題意，解決前述情況並更為流暢，因此在擬提品質「可讀性」的評分給予滿分 6 分。

3. 生活性的進展與說明

以下我們使用題號 A-35-V1 至 V3 作為「生活性」的例題範例，並以圖 8-1、圖 8-2 與圖 8-3 分別代表修改擬題的第一版本、第二版本與第三版本。

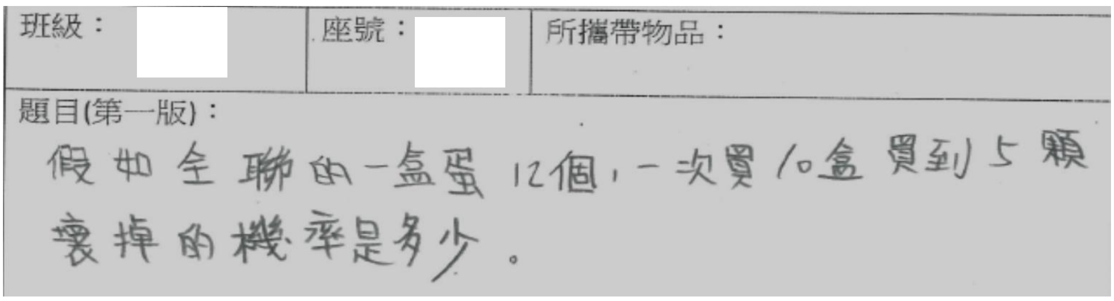

班級：　座號：　所攜帶物品：
題目(第一版)：
假如全聯的一盒蛋12個，一次買10盒買到5顆壞掉的機率是多少。

圖 8-1　擬題單第一版(A-35-V1)

班級：	座號：	所攜帶物品：
題目(第二版)： 假如全聯的蛋一盒12個，一次買5盒，60顆蛋中，買到5顆壞掉的機率是 $\frac{23}{75}$，那今天小明一次買27盒，只買到10顆壞掉的蛋的機率是多少。		

圖 8-2 擬題單第二版(A-35-V2)

班級：	座號：	所攜帶物品：
題目(第空三版)： 全聯的蛋一盒12顆，一次買5盒，60顆中買到5顆壞掉的機率是 $\frac{24}{85}$， 今天小白一次買27盒，只買到25顆壞掉的蛋機率是多少？		

圖 8-3 擬題單第三版(A-35-V3)

「生活性」的三個版本(圖 8-1、圖 8-2、圖 8-3)，皆以採購日常生活物品為題材，又以買到壞掉的蛋一事點出本題的趣味性，貼近現實生活的一面。因此在擬提品質「生活性」的評分給予滿足三項評分依據的滿分 6 分。自由擬題之一題多磨的特徵在生活性的表現雖為亮眼，但生活素材的變化就較為單調，缺少情境上與機率有關的轉折點。因此學生的擬題容易在題與題之間，或是版本之間，生活一致性相同。

4. 精緻性與機率概念層次的進展與說明

以下我們使用題號 B-34-V1 至 V3 作為「精緻性」與「機率概念層次」的例題範例，並以圖 9-1、圖 9-2 與圖 9-3 分別代表修改擬題的第一版本、第二版本與第三版本。

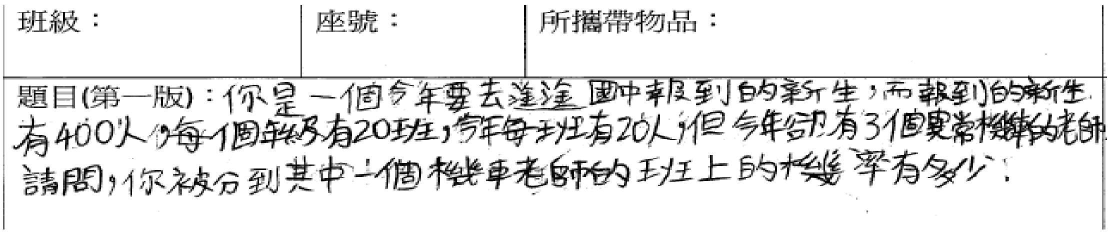


圖 9-1　擬題單第一版(B-34-V1)

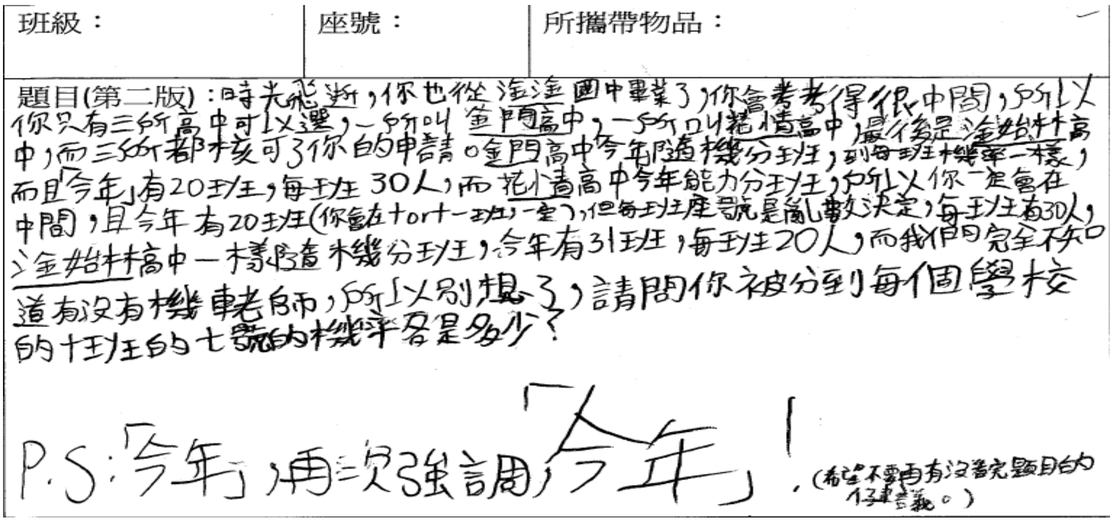


圖 9-2　擬題單第二版(B-34-V2)

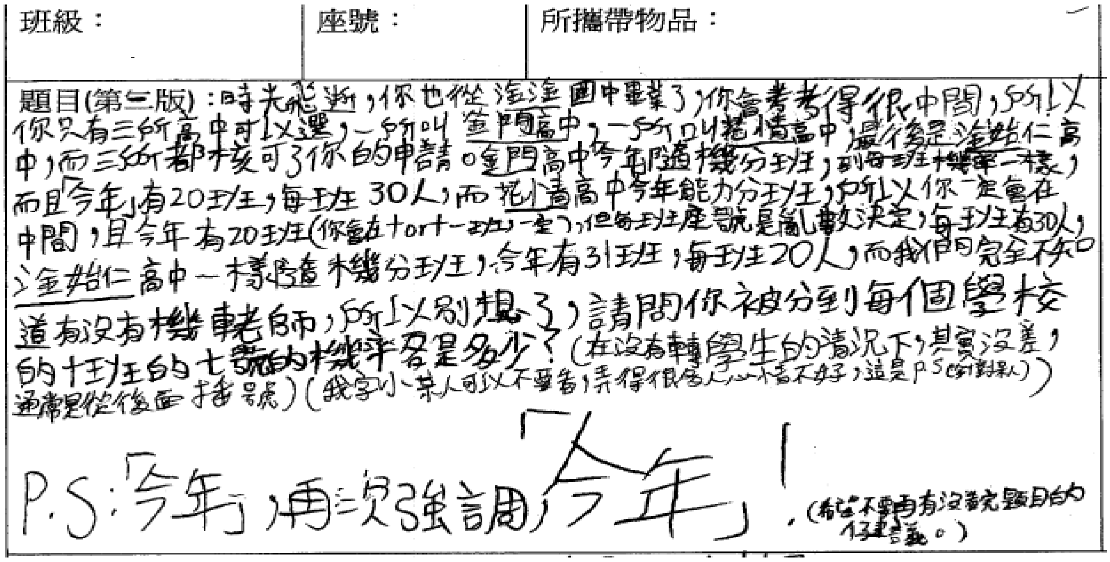


圖 9-3　擬題單第三版(B-34-V3)

在第一版本中(圖 9-1)，由題意可知此題為古典機率的問題。學生清楚地呈現「精緻性」上的評分依據「4.運算上的設計」，符合之細項為「①不需運算的數學題目」;「5.條件上的設計」，其中細項為「①清楚地描述母體與事件的發生」。

上述情況皆有明確的母體、事件描述及可計算之樣本個數，讓我們可不用經過特別的運算求出解答為 $\frac{3}{20}$。同時此題也具備單純古典機率問題的特徵，因此在「精緻性」的擬題評分得到 4 分(八項中有其中二項符合)；而「機率概念層次」的擬題評分得到 2 分(客觀機率－古典機率)。

接著在第二版本(圖 9-2)與第三版本(圖 9-3)中，兩題的修改並無明顯地更動。但與前者第一版本比較，後者加入三所高中的入學分發作為題型的變化。題目清楚地說明該三所高中的入學情況、人數及班級的分配，且題目有提及隨機性及分配的機會均等。因此題問「你被分到每個學校的十班七號的機率為何？」，在隨機分配的機會均等下，分發至每所學校的事件凸顯出分配事件的獨立性。所以在「機率概念層次」的擬題評分中得到 4 分(機率推論：獨立事件)。

然而在更進一步地觀察第二版本與第三版本，其實能發現本題有「條件機率」的思維存在。從三所分發的高中作為可變動的條件依據，進而形成條件機率，改變機率值。如我們可假設 A 為學生分發到金門高中的事件，B 為分到第 10 班的事件，C 為分到座號 7 號的事件。在已知分到金門高中 10 班的機率為 $\frac{1}{20}$，意即 $P(B \mid A) = \frac{1}{20}$，則學生能被分到金門高中且是 10 班的機率為 $P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$。依此類推，進一步的計算可得出學生能被分到金門高中且為 10 班也是座號 7 號的機率為 $P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(C \mid (A \cap B)) \times P(A \cap B) = \frac{1}{30} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{1800}$。因此在以取最高的概念層次作為評分標準的原則之下，第二版本及第三版本的「機率概念層次」擬題評分，將評分為 5 分(機率推論：條件機率)。

回到第二版本與第三版本「精緻性」的討論，題目評分思考方向延續著第一版本的評分細項，並加入「8.題目具有至少 2 步驟。」為新的依據。因不管是要

運用「獨立事件」還是「條件機率」的思維，在解題思考上都要試著找出各事件的機率在做相乘，所以在有步驟性的運算即作為此依據的參考方向。因此在「精緻性」的擬題評分為滿分 6 分(八項中有三項以上符合)。

二、 擬題表現與變化討論

1. 版本之間的顯著差異

從表 5 的結果可以看到各向度「V1 對 V3」的顯著差異，是本研究想要看到活動前後的進展表現。然而對「可解性」、「精緻性」與「機率概念層次」三種向度而言，「V1 對 V2」均無達到顯著差異，但在「V2 與 V3」品質進展上達到顯著差異。以關注進展的方向來看，這兩者類別之間的關聯又是為何呢？

研究者推論其原因，在「V1 與 V2」與「V2 與 V3」皆有專家與教師的介入引導。其中在「V1 與 V2」版本之間的引導，其包含機率的觀念澄清、基本數學性質及利用學生的擬題作為範例參考的介紹。在「V2 與 V3」版本之間，除了專家再一次的引導外，兩班的數學教師以回憶擬題活動的方式，帶領著學生機率的了解及複習。但又為何有了專家的引入，「V1 與 V2」之間看不到顯著差異的結果？

首先，研究者考量的因素為學生在第一版本的擬題類型常出現類似於課本習題的情況，如七年級所學的生物基因型機率計算。翻修至第二版本時，因延續著前一題，所以對題目的修改只有單純地在字面上做調整，對翻修的進展成效並不高。再來，第二個考量為專家引導與修題之間的時間點。在修題前後時間的間隔之下，學生的觀念容易被拉長成片段中的記憶，並不利於擬題的修改。本活動專家與教師的引入有兩個時間點，分別為「V1 與 V2」和「V2 與 V3」兩者之間。然而後者的時間差距較小，亦即從 V2 到 V3 之間的時間較 V1 到 V2 之間的時間來得近，因此後者對學生機率觀念的擬題修改，容易從記憶中喚醒與使用。

2. 「可解性」、「精緻性」與「機率概念層次」的一同進展

由「機率擬題的品質分析」可知，學生在擬題時的初步表現想法為「可讀性」與「生活性」。而這兩者對題目所提供的外部連結，不外乎是接近日常生活而給予題目的閱讀上的親近、熟悉，因此學生對此能表現更積極的興致於此。然而這對題目的「可解性」，容易形成忽略與漠視。為了解學生三次版本機率概念層次表現，從表 8 可知學生對機率的命題，以 1 分的「主觀機率」及 2 分的「客觀機率」為主。兩者加總分別佔三次版本 V1 的 69.4%；V2 的 60%；V3 的 56.6%。因此可知學生在未接受正式教學前，對機率的擬題有以上兩種概念層次作為主要的想法進行。

表 8

機率概念層次評分人數情況

評分／版本	沒有機率	主觀機率	客觀機率	複合事件	獨立事件	條件機率	期望值	缺少樣本	總計(人)
V1	1	20	21	1	14	1	1	3	62
V2	0	15	21	2	18	3	1	2	62
V3	0	11	23	0	22	4	1	1	62

研究者根據「主觀機率」及「客觀機率」的想法，觀察學生的擬題作品。對評定為「主觀機率」而言，因無從而知此題所想像的心像為何，所以直接影響為評量的「可解性」無解。而另一項「客觀機率」可再以單一事件的「古典機率」分類為主。對學生而言，「古典機率」的想像是容易的。只是，對給予題目的條件充分度、資訊完整度及題意明確性成為主要的差別。換句話說，上述的因素對機率「樣本事件」的處理，直接影響到「精緻度」上的細項依據。因為在「精緻度」評分標準裡，包含對條件設計的缺失，無法清楚描述對母體與事件的發生等狀況，皆以如何成為可行的機率問題為主要依據。

隨著三次修改歷程的進行，從表 8 可看出機率概念層次的「主觀機率」與「客觀機率」依舊佔了總體的 50%以上。但不一樣的是，「主觀機率」人數是減少的，說明部分學生的概念層次是有流動的的趨勢。而對此層次上的流動。對此，研究者再強調，儘管學生並不知道題目有這概念存在，但研究者認定此學生是有概念層次思維存在，特別是針對「獨立事件」(4 分)的評分增加，研究者將在第三節機率概念層次闡述。

所以綜合上述的想法，隨著學生對「可解性」的條件的設計與事件的修改越來越成熟，相對的能夠連帶提升題目「精緻度」的意義。而儘管在機率概念層次方面，對學生而言是不易察覺的，而是透過修改的歷程對「可解性」與「精緻性」之進展，造成了概念層次流動的現象。所以在機率自由擬題上，「可解性」、「精緻性」與「機率概念層次」的進展是能夠連帶一同發展。

3. 可讀性的進展

由表 5 的結果顯示，「可讀性」在「V1 對 V3」達到顯著差異，但是在「機率擬題的表現」平均數差異得知，「可讀性」進展分數是已達顯著之中最低分的。而為了檢視上述之間的關係，從下圖 11 資料散布圖可知道多數的學生在 V1 與 V3 的分數都集中在滿分 6 分。這使得樣本的成對差為零的情況過多，因此顯示並無太大的差異。而由於有少數學生的分數在 2 到 6 分之間是有轉換的，因此這些學生的分數成為能影響成對樣本 T 檢定之中的極端值。所以從樣本數太少又資料的一致性太高說明極端值的存在將被放大檢視。因此根據上述的分析說明，表 1 的顯著結果是可以解釋的。

所以極端值能進一步說明「可讀性」的進展關係，與江家瑋 (2014) 在五年

級的擬題研究比較，同樣的情況發生學生於第一版本的擬題，題目設計往往呈現數字的特徵大、使用字數少或過多誇飾的字詞情況，藉此彰顯題目難易度的高低。然而透過擬題歷程的翻修，一題多磨，學生對設計題目的技巧能有相當程度的掌握，再加上學生對擬題挑戰的參與越加熱絡，進而導致字數的成長暴增。然而不同之處在雖然字數的增加為遞增的情形，但內容品質並不會因字數的多寡而遭到影響。因學齡階段到了國中，在題目文字間的表達更加成熟，其對內容敘述的修飾、給予合理的數字大小或增加詞彙的運用，使得題目流暢度提升等書寫方式逐漸提升。所以關注於「可讀性」之進展，可有以下兩點的特徵發現，一是歷程翻修的學習累積導致可讀品質提升，另一面則是看出學生學習如何表達想法在題目裡。

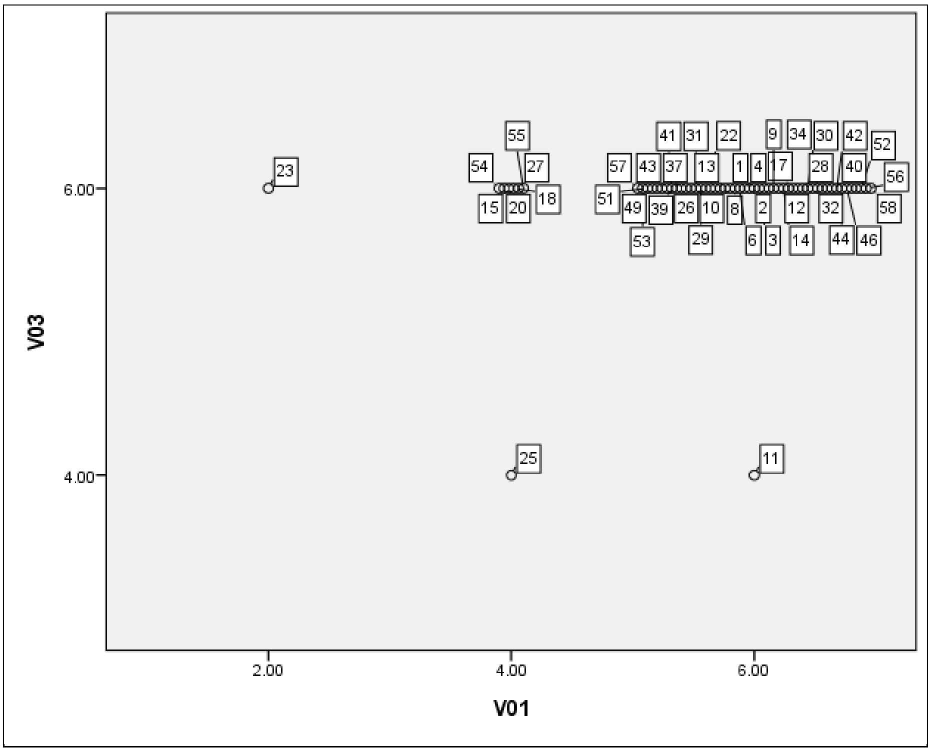


圖 10 可讀性 —「V1 對 V3」資料散布圖

4. 生活性的一致

研究者分析學生在「生活性」的進展，沒能達到顯著差異，推論其原因學生在擬題的題材上,儘管對生活題材的外部連結性強,但大多都充斥著相同的生活、文化與經驗，如電玩、學校等。因此在題目的新奇與創意上，學生須具一番力來連結表達意義，相對來說，對多數經驗還尚成熟的學生來說，顯然有些吃力。因此在歷程翻修的「生活性」上，常見的情形為持續延續著前一個至二個的生活情境來加以描述並修改,因而導致連結性質薄弱,類似的題目會一再出現的情況發生。

第二節 有修改題幹者擬題品質分析

本研究自由擬題的活動，為長時間針對一個題目進行調整與翻修，主打著「一題多磨」的特色。然而，學生在擬題活動中，對擬題的修改不僅僅只有在版本上的調整與更正，也有在三個版本之間做出題目型態的完全改變，更改整個題幹，建立出另一個面貌的題目。因此，為了解有修改題幹之學生對機率擬題的進展之影響，樣本的選定採取只要三個修改版本之間有兩個版本做出更動者即可，如學生在 V1 與 V2 之間更改題幹，而在 V3 沒有，亦或是學生在 V1、V2 及 V3 之間皆做出更改題幹者，依此類推。再來進行擬題品質的成對樣本 t 檢定，其中選定的樣本以三次修改版本各自成對作做檢定，其結果如表 9 所示。其中，各類別的樣本數會因各版本之間的缺少題目而當作遺漏值扣除。

從表 9 的結果顯示，「可解性」的「V2 對 V3」與「V1 對 V3」已達到統計上的顯著差異($p = .003 < .05$；$p = .007 < .05$)；「生活性」的「V1 對 V3」已達到統計上的顯著差異($p = .023 < .05$)；「精緻性」的「V2 對 V3」已達到統計上的顯著差異($p = .044 < .05$)。而在「可讀性」與「機率概念層次」方面，兩者其三個類別 V1 對 V2、V2 對 V3 及 V1 對 V3 的 p 值皆大於顯著水準 .05，均無達到統計上的顯著差異。

從表 9 的統計結果顯示，有修改題幹的學生，在「可解性」與「生活性」有顯著性的進展。其中，「可解性」的進展是我們所樂見的，然而對比到題幹未修改的表 5，「生活性」在有修題幹的題目反而有意外性的表現。而反觀「可讀性」、「精緻性」、「機率概念層次」的進展，較無特別的展現。在下一小節，我們將挑選可代表「題幹修改者」之擬題作為題目範例，對擬題品質規準的各向度做分析說明。

表 9 **擬題品質成對樣本 *t* 檢定(有修改)**

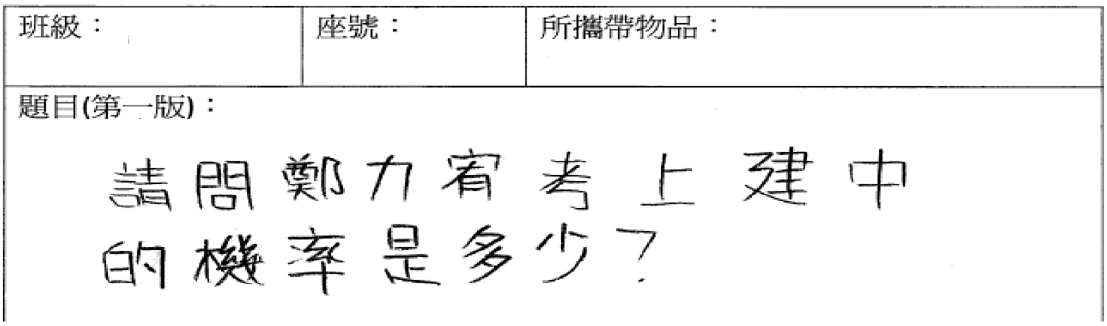
類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值
可解性						
V1 對 V2	V1	34	3.7647	2.18894	-.442	.661
	V2	34	3.9412	1.87392		
V2 對 V3	V2	35	4.1143	1.87509	-3.260	.003*
	V3	35	4.9714	1.56216		
V1 對 V3	V1	35	3.6571	2.24844	-2.889	.007*
	V3	35	4.8000	1.76235		
可讀性						
類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值
V1 對 V2	V1	34	5.7059	.71898	-.463	.646
	V2	34	5.7941	.91385		
V2 對 V3	V2	35	5.8000	.90098	-1.313	.198
	V3	35	6.0000	.00000		
V1 對 V3	V1	35	5.7143	.71007	-1.675	.103
	V3	35	5.9429	.33806		
生活性						
類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值
V1 對 V2	V1	34	4.1176	1.29719	-1.358	.501
	V2	34	4.2941	1.31494		
V2 對 V3	V2	35	4.2857	1.38418	.000	1.000
	V3	35	4.2857	1.29641		
V1 對 V3	V1	35	4.1143	1.27813	-2.380	.023*
	V3	35	4.4000	1.16821		

（續下頁）

精緻性						
類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值
V1 對 V2	V1	34	3.0588	1.92182	-.681	.501
	V2	34	3.2941	1.96221		
V2 對 V3	V2	36	3.3333	1.91237	-2.092	.044*
	V3	36	3.7778	1.77460		
V1 對 V3	V1	36	2.9444	1.94120	-1.972	.057
	V3	36	3.6111	1.90154		
機率概念層次						
類別	版本	樣本數	平均數	標準差	t 值	p 值
V1 對 V2	V1	34	2.4706	1.23669	-1.468	.152
	V2	34	2.7647	1.39390		
V2 對 V3	V2	35	2.8286	1.36092	-1.000	.324
	V3	35	2.8571	1.33158		
V1 對 V3	V1	35	2.5714	1.35659	-1.298	.203
	V3	35	2.8286	1.36092		

$^*p < .05$

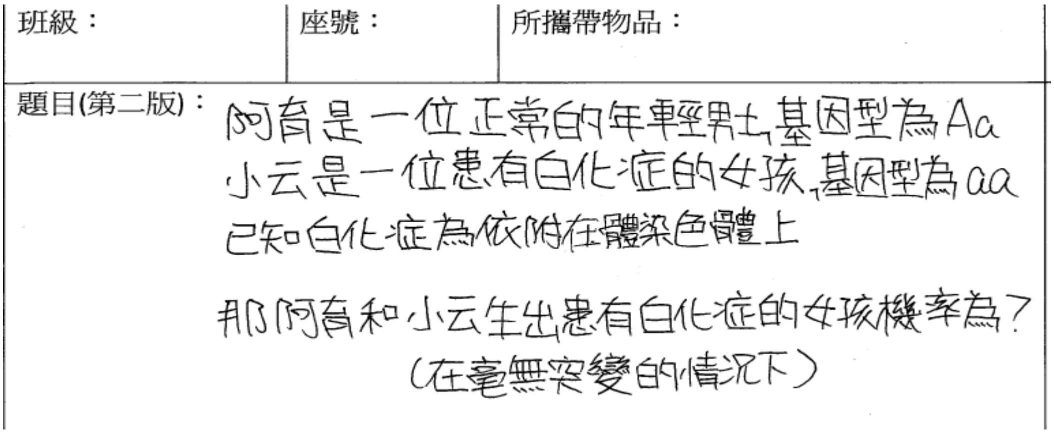
以下我們使用題號 B-27-V1 至 V3 作為「題幹有修改者」的例題範例，並以圖 11-1、圖 11-2 與圖 11-3 分別代表修改擬題的第一版本、第二版本與第三版本。


班級： | 座號： | 所攜帶物品：

題目(第一版)：

請問鄭力宥考上建中的機率是多少？

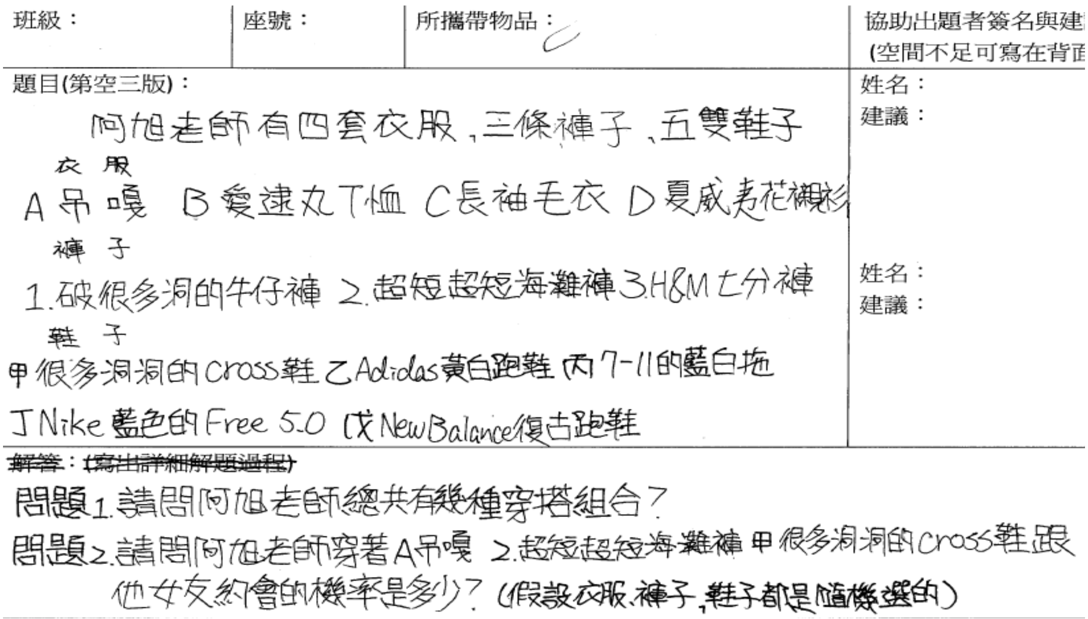
圖 11-1　擬題單第一版(B-27-V1)


班級： | 座號： | 所攜帶物品：

題目(第二版)：阿宥是一位正常的年輕男士,基因型為Aa
小云是一位患有白化症的女孩,基因型為aa
已知白化症為依附在體染色體上

那阿宥和小云生出患有白化症的女孩機率為?
(在毫無突變的情況下)

圖 11-2　擬題單第二版(B-27-V2)


班級： | 座號： | 所攜帶物品： | 協助出題者簽名與建
(空間不足可寫在背面

題目(第空三版)：

阿旭老師有四套衣服，三條褲子，五雙鞋子

衣服
A 吊嘎　B 愛迪丸T恤　C長袖毛衣　D夏威夷花襯衫

褲子
1.破很多洞的牛仔褲　2.超短超短海灘褲　3.H&M七分褲

鞋子
甲很多洞洞的cross鞋　乙Adidas黃白跑鞋　丙7-11的藍白拖
丁Nike藍色的Free 5.0　戊NewBalance復古跑鞋

姓名：
建議：

姓名：
建議：

~~解答：(寫出詳細解題過程)~~

問題1.請問阿旭老師總共有幾種穿搭組合?
問題2.請問阿旭老師穿著A吊嘎　2.超短超短海灘褲　甲很多洞洞的cross鞋跟他女友約會的機率是多少?(假設衣服,褲子,鞋子都是隨機選的)

圖 11-3　擬題單第三版(B-27-V3)

在第一版本中(圖 11-1)，學生以九年級生的生活經驗，面臨升學及高中生活的想像做為題目的素材，貼近學生們的現實生活。回到題意，顯然不符合我們所知的古典機率可觀察與測量，反而是根據自己的生活、情境、經驗、與信念所產

生的一道題目。而「考上建中的機率是多少？」是學生對升學的想像，而答案的多少是根據學生本身自己的相信程度，因此藉由這種主觀性的思維來解釋機率的方式，在解題上是「不可解」的，因此在「機率概念層次」上將歸類成「主觀機率」的層次。

在第二版本中(圖 11-2)，學生更改題幹，放棄上一版本的修改，而生物學科遺傳題目作為素材，是過去所學的知識提取的表現。由「小云是一位患有白化症的女孩，基因型為 aa」可知白化症為體染色體隱性遺傳疾病，因此若要發病，其基因型必須為 aa 型才能表現，所以將阿育(Aa)與小云(aa)做棋盤格分配可知 aa 出現的機率為 $\frac{1}{2}$，在根據題問可知「患有白化症的女孩」機率為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$，因此有基因與性別這樣有序及步驟的思考，是為在機率「獨立事件」的思維表現。再來看到題目的第三版本(圖 11-3)，學生再次更改，以服裝穿搭組合增加題目的趣味性，我們可藉由學生對每一件服飾的命名，感受出他對出題的用心，在學生的題問中，無論是要用組合的方式或是樹狀圖的思考都亦能獲得解決，接者在用乘法原理相乘起來，因此，第三版本也相同存在者「獨立事件」的思考方法。所以最後，無論是第二版本再至第三版本的更改，學生的「機率概念層次」皆相同不變，歸類為「機率推論：獨立事件」，只有在題目的設計與味道做出不同的表現層次。

當「一題多磨」遇上更改題目架構，會有何面貌呢？有更改題幹的學生，在「可解性」上的進展依然有不錯的表現，符合研究者的期待。而在「生活性」方面，從我們在前一節對全體的「生活性」的分析，這裡反而達到了統計上的顯著差異。研究者推論原因為題幹的更改，可說明學生對生活情境的聯想、經驗與情境之間能做變化，不再只有單一的思維在腦中發想，而有多元的構思來進行連結，已作為提供他們擬題題材的變化。

儘管對「可讀性」的表現不是理想，推論其原因認為學生在更改題幹之後，新題目的風格與面貌，在表達與呈現方面，將存有一定的風險存在，說明如下，對未有修改題幹者，他們可依循前一版本的內容作為範本依據，進行題目的修改與修飾，其反覆之間得到表達的寫作與練習。然而對有修改者而言，在新內容上的表現，就較少有前者有範本來琢磨與操作。

題幹的轉換也連帶著對「精緻性」與「機率概念層次」的影響，題幹與題型的不同，對題目內容設計其中的意義也不盡相同，有些人雖能夠具體呈現出條件上的設計，但到了新版本，用不同的論述方式，在安排與描述方面可能遇到尚未成熟的經驗或技術層面的問題，顯得題目設計不可行或不甚清楚。因此，延續著前一小節的討論，儘管在「可解性」有不錯的展現，但修改題幹後，若「精緻性」無法環環相扣在一起，則「機率概念層次」在變化的進展上，無法特別彰顯出其顯著的意義。

第三節 機率概念層次

本研究的自由擬題活動中，除了探討九年級學生的機率思維變化外，發現學生可以擬出不是現階段國中機率課程，或超出自己能力之外的題目。然而，在機率擂臺賽活動裡，參與的學生選擇「高手區」為高中範疇之題目答題也不在少數。因此為瞭解上述的情況，本節選取「機率擂臺賽答題單」資料的蒐集，希望能透過擂臺賽資料的分析，探討學生面對超過國中範圍的問題解題能力及興趣為何。

本節將分為三部分，分別探討學生對機率擂臺賽活動的參與，高中課程範圍餘事件及獨立事件的答題。

一、機率擂台賽

全校九年級學生參加為主的機率擂台賽，在總共有 62 道的題目裡，學生參與的答題數共有 1528 份，各區答題情況如下表：

表 10

擂台賽答題參與題數表

題目類型	題數(題)	答題數(份)	參與答題率(%)
擬題區	14	187	12%
新手區	34	902	59%
高手區	14	439	29%
總計	62	1528	100%

從上表可知，學生對新手區(59%)的答題參與較其他兩者高，接者依序為高手區(29%)及擬題區(12%)，以下我們取各區最高答題數之題目來討論。

1. 擬題區

題號 B2-40-V3 為擬題區答題數最高的一題，共 37 份。

題號：		出題者：	
班級：	座號：	姓名：	得分：
你看到這題的隔一天降雨機率多少?			

☺ 本題因缺少某些條件，導致無法進行解題，請發揮你的思考能力，將缺少的條件補上題目中，使得此道題目變得可以算。(題目一定要融入機率的概念)

圖 12 擬題區 B2-40-V3

九年級學生參加擂台賽的時程正逢會考之後，此時的學生已有足夠知識去改寫題目，並期望能對「可解性」及「精緻性」在做提升。而大部分的學生想法策略為針對第一手數據資料下手，如提供降雨機率的數據。學生初步的想法依然是從「生活性」出發，由過去的經驗作提取，學生能反映知識與外部連結的事實闡述。而另一些學生選擇加入其他條件來改寫題問以豐富題目內容質量，如「降雨機率為 70%，你有 50%機率帶傘，問你被淋濕的機率為何？」，儘管最後修題沒有來得研究班級地完整，但學生對數學充分條件的取捨設立，有相當的成熟度表現其中。

2. 新手區

A-17-V3 與 B-41-V3 兩者皆為新手區答題數最高的二題，共皆為 75 份。

題號：		出題者：	
班級：	座號：	姓名：	得分：
樂透機中有形狀大小與質地都相同的球:共 9 顆，編號為 1~9，若每一顆球被抽出的機會相同，那一次抽兩顆球皆為偶數的機率是多少?			
解：(請寫出解題過程)			

圖 13　新手區 A-17-V3

題號：		出題者：	
班級：	座號：	姓名：	得分：
某天小陰玩爐石戰記，那款遊戲有 8 個職業：法師、德魯伊、術士、獵人、牧師、聖騎士、戰士、盜賊，小陰選了德魯伊打線上，遇上德魯伊的機率有多少?			
解：(請寫出解題過程)			

圖 14　新手區 B-41-V3

由於新手區的題目以古典機率題型為主，對現行的九年級學生而言，能夠解決此區的問題並不難。然而可以發現，像這些類似於課本習題(A-17-V3)，或是生活經驗相同的題目(B-41-V3)，是很容易抓住學生或吸引目光來選擇。

對學生而言，A-17-V3 就顯得有些困難，原因在學生對單一事件的處理需要更進一步的考慮樣本點的可能性。因此本題的樣本空間數應為 $9 \times 8 = 72$ 種，而出現部分學生認為是 $9 \times 9 = 81$ 種。值得注意的是，多數的學生的解答皆以 $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$ 完成，其概念層次為條件機率的乘法法則，亦即在問”第一球是偶數且第二球是偶數”的機率為何？然而上述之情況皆還不是國中課程會出現的課程概念，但能發現部分的學生擁有這樣的思維存在。

3. 高手區

A-29-V3 為高手區答題數最高的一題，共 49 份。

題號：		出題者：	
班級：	座號：	姓名：	得分：
小明為一名 18 歲的男生，假設他將要和一名正常女性結婚，並且要生下連續三名正常的男孩的機率為何?(小明為基因疾病帶原者，且此疾病為隱性)			
解：(請寫出解題過程)			

圖 15　高手區 A-29-V3

A-29-V3 的機率類型被評為獨立事件。研究者認為，此題能被眾多學生選取，原因在題目類型接近課本的例題，生物基因題的練習為七年級所學，在難度上較不影響學生的信心。

研究者從學生對於擂台賽的答題份數，學生對於題目類型相似於課本的習題的選擇參與高。以古典機率的答題來看，因為正是剛學完的機率概念，所以儘管內容套用在別的情境上，也能相當地熟悉運用概念來解決問題。因此成為學生在比賽中最好拿分的部分。另一方面，部分觀察到的學生，使用不在國中階段所出現的技術方法來解題的現象。研究者相信可能為過去在七年級所學的基因型題目導致的。在生物課程上只講述到其技術方法，而對其背後所談的機率概念尚為不足，因此混淆了在樹狀圖上的正確使用方法，關於樹狀圖之使用，將於本節「三、獨立事件」闡述。

二、複合事件

從機率概念層次中歸類出一項規準項目為「機率推論－複合事件」，其評分為3分。而評分依據根據事件是否包含交集、聯集(互斥)、和餘事件三種。在經過三次版本的擬題修改，我們共有180題的題目樣本。然而，卻只有三份題目是被評分為複合事件裡的3分，而這三份擬題所運用的思維表達，皆為研究者用餘事件之概念來做評定。那為何不是用與此複合事件相關性最強的交集或聯集來做評論呢？以下我們將對此並提出這三份題目來做說明。

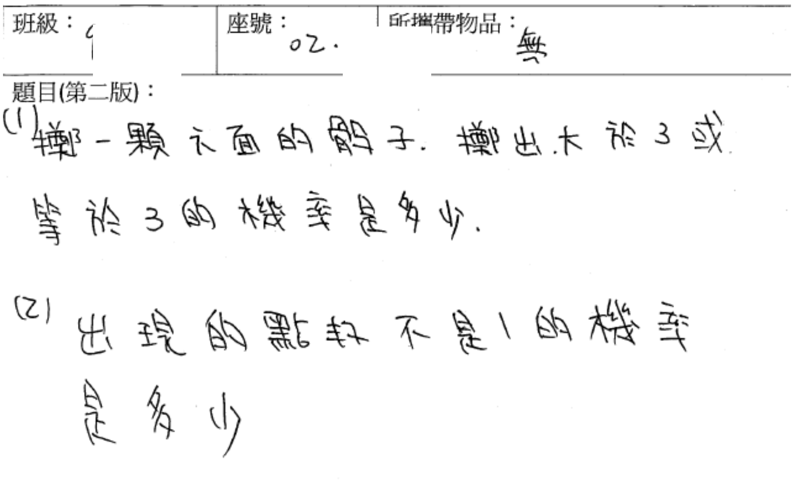

班級：9　座號：02.　所攜帶物品：無
題目(第二版)：
(1)擲一顆六面的骰子. 擲出大於3或等於3的機率是多少.
(2)出現的點數不是1的機率是多少

圖 16　複合事件 A-02-V3

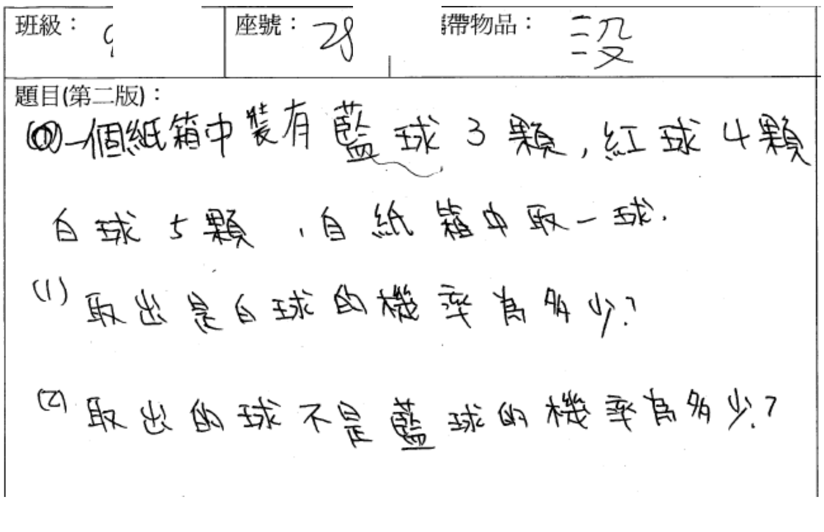
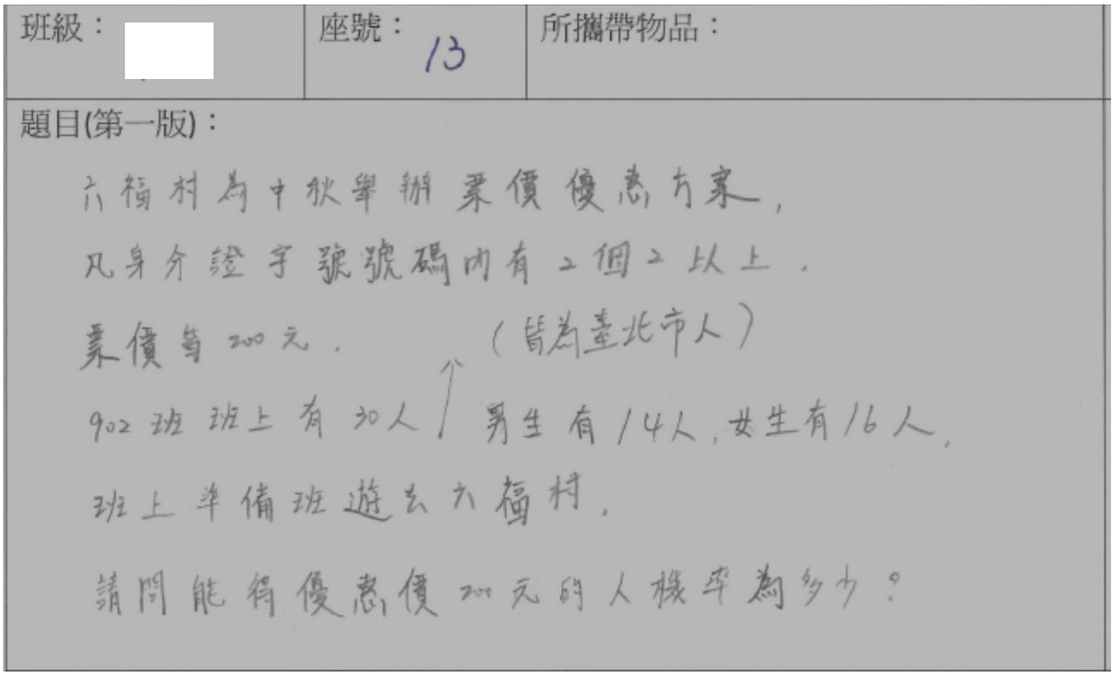

班級：9　座號：28　攜帶物品：沒
題目(第二版)：
(0)一個紙箱中裝有藍球3顆，紅球4顆白球5顆，自紙箱中取一球.
(1)取出是白球的機率為多少?
(2)取出的球不是藍球的機率為多少?

圖 17　複合事件 A-28-V3

首先，A-02-V3 的第一小題「擲出大於 3 或等於 3 的機率是多少」，這我們以數學家的觀點來說，其能夠馬上自動化的聯想出將「大於 3」與「等於 3」兩者事件以集合的方式想像成聯集之心像圖，進而轉換至計算。譬如此題擲出等於 3 的發生機率為 $\frac{1}{6}$ 加上擲出大於 3 的發生機率為 $\frac{3}{6}$ 等於題目的所求的 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$。然而，對於九年級的學生來說，集合的概念未必是他們能夠簡單或直接的聯想到，且在教學上並不容易去說明。進一步說，學生在此的思維想法為單純與直觀的線性思考，即是以一個單一事件的想法為起點並展開。以窮舉方法為例，他們會一步一步的列舉出事件發生的可能為 3、4、5、6 共四點，接者再除上擲骰子的全部可能性共 6 點，進而計算出答案 $\frac{2}{3}$。

第二，我們看到 A-02-V3 與 A-28-V3 的第二小題「出現的點數不是 1 的機率是多少」以及「取出的球不是籃球的機率為多少？」，其可從題目論述中，學生對於「不是」這樣的說法來作討論。從機率概念層次來說，這樣的題目類型已觸及到對全事件與餘事件的範疇。但該注意的是，此時的課程編排並無讓九年級學生學習此概念。因此研究者考量為自由擬題的一項特徵，學生通會藉由對生活的經驗、情境為素材作為外部連結，引發聯想。單以考慮「沒有」或「排除」的行為發生，能令學生接近現實的屬實。既然如此，剩下的為如何將這份思維表達以數學的文字做產出。所以儘管學生在題目論述中不盡數學中的嚴謹，但卻有能力從思維表達中，憑以對單一事件的想法，做為複合事件中的餘事件表達。但此時的概念思維的行成，對現階段的他們來說，並沒有充分的知識涵蓋裡頭。


班級：

座號：13

所攜帶物品：

題目(第一版)：

六福村為中秋舉辦票價優惠方案，

凡身分證字號號碼內有2個2以上，

票價每200元。 （皆為臺北市人）

902班班上有30人，男生有14人，女生有16人，

班上準備班遊去六福村，

請問能得優惠價200元的人機率為多少？

圖 18　複合事件 B-13-V3

第三，B-13-V3 是一題相當特別的題目。首先，我們中華民國身分證字號一共有十碼，包括起首第一個大寫的英文字母與接續九個阿拉伯數字。其中起首的英文字母會以該登記的戶籍地區來區分編號，如桃園市為 H。而第二碼數字是用來區分男女性別，男性為 1，女性為 2。其餘第三碼至第九碼為流水編號，第十碼為驗證碼。

回到本題，因為女性的第二碼為 2，所以我們只要考慮剩餘的八碼有無出現 2 即可。則我們設事件 A 為剩餘八碼沒有 2，因此女生後八碼至少出現一個 2 的機率為 1 − P(A)，即為女生獲得優待的人機率。另一方面，因男性第二碼為 1，所以我們設事件 A 為剩餘八碼沒有 2，以及事件 B 為剩餘後八碼有 1 個 2，則男生後八碼至少有兩個 2 以上的機率為 1− P(A)-P(B)，即為男生獲得優待的人機率。

由上段可知我們在計算過程中，簡單地運用複合事件裡餘事件的概念來排除所發生的關鍵事件來解答。回到看到題目的第二行，我們從「身分證字號號碼內

有 2 個 2 以上，票價皆 200 元。」的敘述來討論，依然可以對應到我們在對 A-02-V3 與 A-28-V3 的說法，當學生的生活經驗要用數學知識來做檢視時，可以推敲出學生的心中想像正蘊含著某個概念想法逐漸形成，而在這裡更能說明的是我們所提的餘事件。

綜合以上所述，我們可知道數學家能夠用熟練、直覺、反射地反應方式來理解一道題目背後所蘊藏的概念架構。概念知識由淺至深，對架構來說是嚴謹分明的。但對九年級學生而言，他們的想法並不然，或許有的學生有截然不同的思維設想其中。如在上述所提的三題討論，學生對題目的敘述，我們能以他們對藉由生活經驗、文化的說法來可得，然而，這些說法恰巧要與我們數學的某些知識概念形成交互之時，例如「排除」、「剩餘」、「以上」等說法考驗著餘事件概念的想像，儘管沒有接受過正式的訓練，已能在表達論述中，推敲出一絲概念存在裏頭。然而我們的引導是否能用最簡單的知識組織來滿足學生各別對概念層次的適性？如上述的例子所看到，研究者認為在學習複合事件，可藉以不具集合概念的方式來達成教學目標。而需要的是一個正確的技術與工具，會為此考量的是學生本身就有具備的概念形成，二來是貼近此時階段的思考能力。

三、獨立事件

下圖 19 為 A-28-V3，這是一題包含三種機率概念層次所成的題組，依序各小題號可分類成(1)客觀機率－古典機率、(2)複合事件－餘事件、及(3)獨立事件共三種。並且此題在本次的擬題活動中，是學生少數能夠以不同類型概念組合而成的題組題目。而在機率擂台賽中，總共有 32 位學生作答此題，研究者將根據學生的作答，如表 11，提出以下內容的說明。。

題號：		出題者：	
班級：	座號：	姓名：	得分：

一個紙箱中裝有藍球 3 顆，紅球 4 顆，白球 5 顆，自紙箱中取一球
PS 抽出來的放外面
(1)取出是白球的機率為多少?
(2)取出的球不是藍球的機率為多少?
(3)之後把所有球放回去，依照順序抽到紅白藍的機率是多少

圖 19　獨立事件 A-28-V3

表 11
A-28-V3－答題統計描述

題號 128 (機率概念層次)	第一小題 (古典機率)	第二小題 (餘事件)	第三小題 (獨立事件)
答對人數	32	31	15
答錯人數	0	1	17
總人數	32(人)		

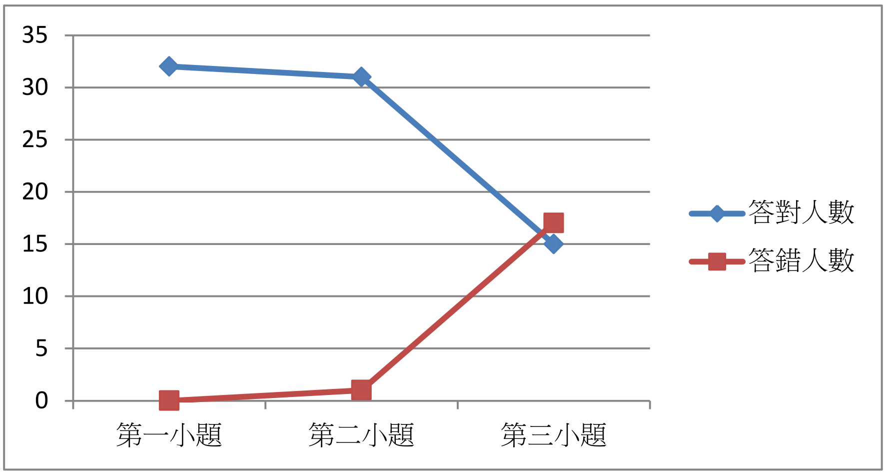


圖 20　A-29-V3 答題折線圖

在上一小節對複合事件的討論中，我們已知道有三份擬題被分類到規準中，含有餘事件的概念想法，其可間接地說明部分學生是可以在接受正式的機率教學之前，有能力並自發地想像關於餘事件概念的事件，並在活動中將其以題目擬題出。

回到上表 11 的統計描述，總人數 32 位學生中有 31 人答對了第二小題(餘事件)。從答題情況來說可謂將近有總答題人數全對。因此，不僅是我們在擂台賽活動前分類出有三位學生具備了餘事件的概念層次，多數的學生也皆具備餘事件的概念層次來回答此題。所以，再一次地說明已有部分的學生在被正式教導之前，對餘事件概念上的形成有相當的確立，並且有能力去作解題與運用。

接下來在第三小題(獨立事件)中，在總人數 32 位學生中有 15 人是答對的，約占了總人數的一半。而我們仔細觀察這 32 位學生作答的解題過程，不難發現幾位學生所擁有共同的疑難點，對此研究者將一一提出。一是學生對題目的理解錯誤與不甚清楚，如當題目只要提及到「取後放回」與「取後不放回」之涵義理解時，學生進而轉向困惑與不清楚。而是實際遇到的困難反應到數學上的操作，如所觀察的學生已能夠熟練地舉出抽到各種顏色的球機率，其說明他們心中對古

典機率概念層次的成熟。但若有情況為「取後放回」，則因現實與數學之間的理解不周到，而導致在計算方法數時，學生會做出將事件母體總球數計算時作出扣除的動作，或相反地「取後不放回」的不扣除。而這兩者問題也是在擂台賽活動過程中，常被學生尋求提問幫助的部分。

第二是學生使用樹狀圖最為工具思考來幫助解題，但使用方式並不恰當以及所延伸出概念性不足的問題。

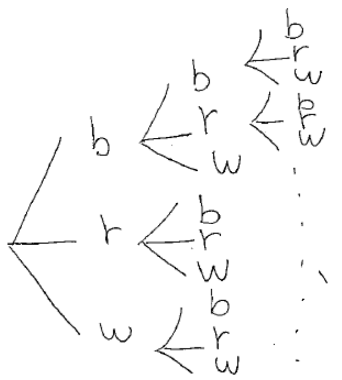


圖 21　獨立事件(樹狀圖 1)

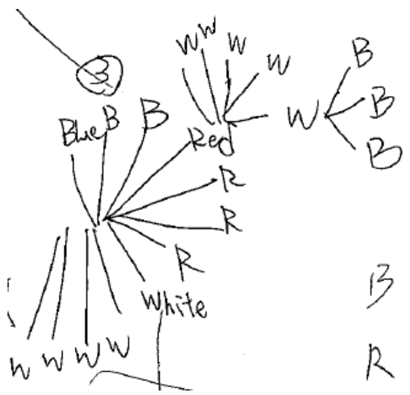


圖 22　獨立事件(樹狀圖 2)

圖 22 及圖 23 皆為某兩位學生試圖利用畫樹狀圖來幫忙理解並解題第三小題，但顯然地在這學生所使用的方式並不對。首先，圖一在一開始即為分類錯誤，因此學生是有意識到他接下來是做不下去的，因而打住繼續作題。但事實上，圖一的畫法只要將機率值標記在樹枝上即可繼續討論。第二，圖二顯然是對的，但學生有意識到若依此方式繼續窮舉，其會發現出現可能的結果會多到畫不下去，因而次停止作題。然而，若要使用樹狀圖來解題，樹枝上的使用與標示就占了繁多複雜的過程，一時之間並不是一般常人能夠馬上做出來的，更何況對目前的九年級生來說，若思考程序不夠清楚，則會在作圖的過程中，因碰到技術上的問題進而打退堂鼓。而此小題若要用樹狀圖來解釋獨立事件，我們需要更具完整的圖形與技術方式來表示，顯然在這會是艱難的挑戰。所以最後，上述圖一及圖二的兩

種情形，可說明著學生皆有正確的思維與企圖去解決機率問題，但在正式課程上並沒沒給予正確的技術思維來傳達(許哲毓、單維彰與劉柏伸，2016)。

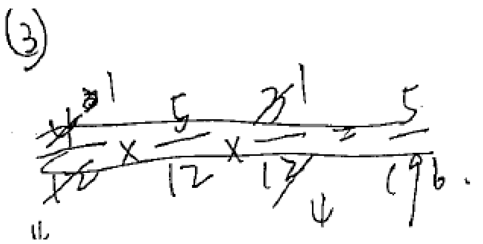


圖 23　獨立事件(機率連乘 1)

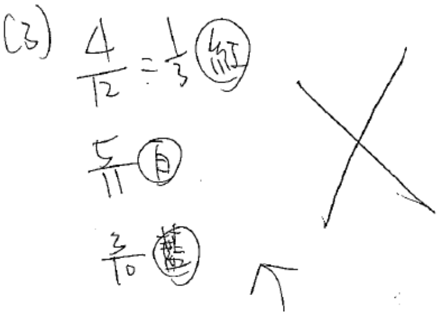


圖 24　獨立事件(機率連乘 2)

第三，圖 24 與圖 25 皆為獨立事件的運算過程，或許學生在此只是一時的粗心，也或是題意「取後放回」的意思是不甚清楚的，因此沒有將對應到要將母體總球數做扣除的認知動作。其實這樣的學生也不佔少數，但值得一提的是這樣的學生，他們知道在運算最後的步驟要把它們做相乘起來。雖然這樣的乘法方式是我們所知的獨立事件概念，但對九年級學生而言，是什麼樣的知識環節讓他們懂得使用乘法原理來描述選取的每個步驟，還是本來就存有一個概念與想像，可以告訴他們作相乘呢？相反地，從圖四的例子中，我們看到學生釐清題意後能夠列舉出三種抽取球之顏色情況下的機率，卻在接下來不知道下一步驟該往何種程序走，作答因而打住停住。而這個現象也呼應了圖三的技術缺乏而形成對比，因此再次回到上一段的小論點，學生在獨立事件的想法上，已有正確的思維與企圖去解決問題，但依然在正式課程上並沒給予正確的技術思維傳達。。

最後小結，我們不能確定學生已經具備獨立事件概念的想法存在，但又能從部份的學生能夠表現出乘法原理的分門步驟關係中，看出一絲概念端倪存在。研究者考慮這情形的發生，是否為本身從課程所學的樹狀圖作連結，亦或是從前述所題複合事件的討論，其對數學概念與經驗的影響關係。然而，不管是從哪種角

度出發來說明，皆表示學生正處於概念知識的跳躍使用，顯然是機率學習脈絡不夠完整、正確而導致的。進而導致解題出現一些直觀做法的出現，卻說明不清楚來由。因此當問題涉及到更高層次時，學生將出現圖1至圖4的情形而答題停止。換句話說，學生需要的是正確的引導，以上的情況皆能說明學生在想法上是走在一套正確的思維上面。儘管最後沒有答對，但還是能說明這些學生是可以被教的、可以學的以及試試看的基礎存在。

第四節 結果討論

一. 數學自由擬題價值討論

1. 融入生活情境的價值

「生活性」的進展效力不高，但題目字裡行間的敘述，表現著學生對題目類型的喜愛。我們可以看到學生對擬題與融入生活情境之運用相當踴躍，且學生用來出題的素材很多，常見的有如電玩題材、體育相關、教室情境、學校文化、電影情節、卡通動漫...等等，如以下 A-28-V1 的擬題範例，以電玩為題材擬出題目「在全民槍戰十連抽可以抽到騎士的機率是多少？」。然而，從研究結果顯示，學生擬題的「生活性」為達顯著，原因出在三次版本的評量分數皆接近滿分，說明學生對此的表現並不差。而推論其原因出自於學生對生活上的經驗成熟不多，以至於學生總是圍繞著相同的經驗打轉，換句話說同學之間彼此生活層面性質一致性高，因此讓擬題的「生活性」於各版本之間差異不見任何的起色。另外有趣的是，學生此番生活特徵的描述，苦了研究者在研究過程中的分析。研究者與學生次之間文化產生的認知斷層，除了對研究者來說相當有趣之外，也得深思熟慮學生的想法其中。但最後無論擬題過程的何時，我們依然能再次了解到學生對題目的喜愛，是離不開從生活層面上的帶入。而融入生活情境是有可助於提及學生的興致參與。

接著，機率作為擬題活動的主題而言，是屬於相當容易發揮的單元。機率的課程較於其他課程顯得更為活用及應用，從國內的教科書編排，不妨也可看出幾點的大同小異，如從硬幣、骰子、撲克牌等易見於生活情境中的發現與引導，可見機率充斥者生活當中的重要性。然而，在相關的機率擬題研究活動中，都使用結構或半結構的擬題類型進行，兩者擬題類型的自由度，

落實於生活層面上的應用不易看出。而若要順著機率的思維層次前進，我們該提到與生活面有強烈連結的「主觀機率」。已知主觀機率是來自觀察者的自憑心證，進一步的說在想法與經驗上皆與生活面息息相關，屬於自發性的認知。

最後，自由擬題是個不一樣的學習活動機會，再加上情境融入有助於思考的論點，研究者認為自由擬題的另一項價值為學生端不僅能透過歷程來獲得概念學習。教師端亦能活動中展現專業能力，精進向前。如研究者意識到次文化的落差；如何在教學內容上，考量如何做起架構，賦予知識在其中。

2. 語文能力與數學連結的表達

「可讀性」的進展，說明數學與語文不再各分東西，而是彼此有著相互的連結，喚起學生察覺對生活文化所蘊含的數學語言。與江家瑋 (2014) 研究五年級學童擬題活動比較，將擬題時程拉長，題目文字品質相對能夠提升。而本研究除了原有的擬題活動的歷程修改時間點外，另一時間點為學生從小學階段進入到國中階段的期間，不僅是學校提供的語文課程，更透過年齡的增長，生活經驗的見聞累積，是助於學生在語言表達上的想法的成熟進展，因此從研究結果顯示，「可讀性」進展之表現，在於修題歷程的拉長，使得品質上的累積。另外，如何表達想法的思緒，能透過擬題對語文和數學之間的連結獲得加強。所以，不管是本研究結果統計分析上的小瑕疵，或許我們該相信是有它價值存在的地方。

回到機率的課題上，對此的言語表達顯然較為不吃虧，為何？在緒論中，我們提到機率作為一種語言於生活當中。常見的機率問題能從生活中發現，無形的言語之中，能確立其條件的成立。相較於其他數學概念課程，譬如在

函數的概念性質，抽象化的想法不易於學生對外部的連結，有不易於察覺的限制存在。

再一次地說明語文表達融入價值，研究者就依上段所談的差異進行討論。根據江家瑋 (2014) 的研究發現在國小階段的擬題活動，學生的用字、數字大且冗長，不外乎是來增加難度來壯聲氣勢 (陳斐卿等人，2015)。對比到國中生，此項擬題特徵依然得到保留。學生在字數上的經過每一版本的修改都在持續地增加，但事實上根據擬題「可讀性」表現的結果，學生早已亦然在作文的層次上顯出相當成熟的程度。因此修改的歷程變成了他們語文表達的修正。以上這給了研究者一項啟示再次探討數學與語文連結的重要性，數學表達並不是講出幾個數學重要的定義、定理，而是透過語言的表達，認識到數學概念在於其中，數學也充滿了文字符號象徵，然而這不也從語言傳達而來的嗎？

因此，不管是國小數學的研究主題，亦是現在國中機率課題，離不開的是在這數學世界裡需要語文融入的重要性，而自由擬題的價值在「一題多磨」的歷程，能正視到對於語言表達的意義與數學連結的奧妙。

二. 機率思維的發展

在機率思維的發展上,學生有自發性的概念想法展出不同的機率層次。在專家還沒介入的第一版本中，其機率擬題概念層次分別由多至少以「主觀機率」、「客觀機率」及「獨立事件」排序。但這三種概念的層次，在國中現行機率課程的編排，主觀機率的認識卻極為少談，皆以頻率機率的角度切入為主，再根據多次試驗的結果來比較古典機率的想法，以上為國中正式課程的機率概念教學。而另一項的發現為：未接受機率正式課程的九年級學生，出現了像「獨立事件」的思維，而這思維的課程為高中階段的範疇。接著在機率擂台賽中，在正式接受機率課程教導之後的學生，是有能力展現超前或不是國中課程上的技術方式答題。

從研究結果顯示，學生初始擬題表現的機率思維在「主觀機率」與「古典機率」兩者。隨著擬題時間的下去，「主觀機率」逐漸減少，相對的其他機率層次的表現獲得提升，尤其是「獨立性」的思維。對學生而言，如何擬出可行的題目，促使他們對條件的設計，產生賦予意義的想法。從結果來看「可解性」、「精緻性」與「機率概念層次」一同進展之下，表現思維也功在「可讀性」與「生活性」的架起。若進一步的說明自由擬題評量規準，除了衡量擬題品質外，也是衡量學生的機率思維表達。

三. 學生解題的興趣與能力

從機率擂台賽得到學生對高中範圍的機率題目答題能力討論。高手區的題目分類為高中課程的範疇，對國中九年級學生而言，解出問題成為他們的挑戰，因此可培養學生對未知的數學問題的解題及興趣參與。另外，研究者發現部分學生在「高手區」的答題內容上，能使用不是國中階段所學的技術方法，以求解更高層次的機率問題，如樹狀圖、機率連乘方法。然而，學生

的解題過程，經過問題的處理，需要透過回想來加以組織，若基礎的認識不夠穩健，如研究結果發現學生對樹狀圖的意義與技術方法不當，則容易被後續高階數學的處理遭到誤用，如生物提及的機率連乘方法。因此上述的情形，在遇到正式的課程時，學生學習新的技術方法容易遭到混淆，或造成認知錯誤的使用，亦或是課程領域的不協調，如七年級的生物題目在九年級的教科書卻沒談起，這將導致學生在建構真正的概念想法時，與先前知識的處理產生跳躍式的知識斷層。對學生的學習歷程而言，無法染上正確的學習成效。

第五章 結論與建議

第一節 結論

一. 擬題的變化表現

在機率自由擬題活動歷程中，學生擬題之作品「可解性」、「可讀性」、「精緻性」與「機率概念層次」達到統計上的顯著差異，「生活性」則無。首先，學生擬題的三種向度「可解性」、「精緻性」與「機率概念層次」有一同進展之表現，而這三種向度可說明構成一道正確的機率題目之所成要素。接著，在「可讀性」的表現上，學生擬題的作品會隨著版本之間的修改而字數增加，但並不會因此導致題目文字內容累贅、訊息多餘的情形發生，反而對內容品質有更好的表現。最後，「生活性」表現的一致性，學生擬題之作品「外部連結性」強，但由於彼此充斥著相同的生活圈、文化與經驗，因此在三次版本的歷程修改沒有顯著的表現。

二. 機率思維發展與

在機率思維的發展上，學生有自發性的概念想法發展出不同的機率層次。從結果來看，學生能從自身的生活文化、經驗或平時的言語想法中，有足夠的認知去發現與解決相關的機率問題，如古典機率、餘事件與獨立性等概念。

三. 學生的解題能力及興趣

從機率擂台賽活動中得知，學生是有能力及興趣來解決高中階段的機率問題，如餘事件及獨立事件，並且能使用不是在現有國中課程上的技術方式進行解題，如乘法原理的相乘。然而在使用方法上，學生還尚未熟練地操作，或思考起點存有錯誤，因此需要正確的學習指導。

第二節 建議

一. 自由擬題活動的推廣

自由擬題活動豐富了生活情境與語文表達，具有推廣的價值。自由擬題的最大突破點為突破字數的限制，打破傳統數學的簡而美，不單只有單一形式，總有令人意想不到的生活情境連結。而這樣的外部連結能使學生對學習有參與感、提起興致與投入思考。更重要的是，「連結」能使學生從活動中對數學概念產生意義感進而抽象化產生理解。而推廣價值的信念與我國十二年國教以素養導向教材中的「知」、「行」、「識」教學架構有著共同的目標存在。

二. 擬題活動的課程安排

自由擬題活動需要長時間的進行一「題」多磨，在台灣的數學課程時數上，並不利於教師於教學現場上的實施，因此多半藉以課餘時間來進行。因此建議學校能進行系統性的規劃、教師合作與課程安排，如特色課程的設計，藉以將自由擬題活動的價值作一延續，使得進步與向上。

三. 數學自由擬題的拓展

擬題的實施，在台灣已有不少的研究產出，但多為在國小階段實施，而在國、高中方卻為甚少。若有，則多半為結構或半結構的擬題活動進行。然而，機率不同於其他代數、幾何、數與量等面向的抽象，相形之下也易於生活上的連結，也利於自由擬題活動的進行。

所以自由擬題會遭到數學概念的受限嗎？不對，受於生活情境更能使得學習有興致以及「數學作為一種語言」作為進路，自由擬題是能夠打破數學概念的限制，從中識出新的學習活動。因此，建議後續的研究自由擬題活動拓展到其他的數學概念並教學，以觀察其學習成效。

四. 課程編排的建議

本研究發現多數的學生在正式進入機率課程前，已達到課綱編排的基本學力，甚至有部分的學生屬於超前的。尤其是獨立性與餘事件概念，學生更可從日常生活情境、社會文化中獲得認知。對比於現行機率課程只安排在九年級的下學期，但我們已知學生自發性的概念，顯然並不單只發生在此一時期。因此基於課綱及教科書的編排，或許能更早而提前準備，以及銜接其他課程領域安排，或補足所欠缺的數學技術與方法，如樹狀圖的應用。

研究者建議在機率課程安排上，能夠重新審視安排時程，並能夠將屬於高中課程範疇中的獨立性與餘事件的概念納入國中的基本考量。另外建議有著正確的跨領域的學習分配，才能滿足學生在已有相同且正確的思維下，建立出完整的認知概念，以減少分散脈絡所帶來的斷層負荷。

五. 機率教學方法與技術

本研究除了在擬題活動中討論出思維的發展,更在擂台賽發現學生解題也有不同層次可考量,如嘗試使用樹狀圖來解題更高層次機率問題,或出現機率的連乘方法,不外乎在工具概念不足之下,進而感到不知所措。因此,研究者建議建立出完整的機率技術使用架構,且配合學生本有的正確思維進行,尤其是樹狀圖,不單只有發生的可能結果,互斥、獨立性或機率填寫樹枝的討論,皆能夠涵蓋一同說明。

參考文獻

一、中文部分

丁村成 (2008)。走一趟高中機率教學之旅。**數學傳播，32**(4)，33-50。

江家瑋 (2014)。**數學擬題活動的合作效果—五年級學童之經驗。**(未出版之碩士論文)。取自 http://ir.lib.ncu.edu.tw/handle/987654321/65895#.WV5K1IiGPIU

呂溪木 (1986)。變遷時代中我國數學課程的發展。**臺灣省國民學校教師研習會三十年紀念專刊**。新北市：台灣省國民學校教師研習會。

呂溪木 (2007)。**民國 75 年之前我國數學課程演變**。論文發表於「吳大猷先生百歲冥誕科學教育學術研討會～我國近五十年之科學教育發展」研討會，臺灣師範大科學教育所，臺北市。

周祝瑛 (2003)。**台灣教育改革之研究**。論文發表於「民辦教育」研討會。上海華東師範大學。取自 http://www3.nccu.edu.tw/~iaezcpc/C-%20The%20research%20of%20taiwan%20education%20revolution%201.htm

陳斐卿、江家瑋、張鐵懷、黃佩岑、單維彰 (2015)。數學自由擬題之設計與評量—一個合作的取徑。**科學教育學刊，23**(2)，185-211。

陳玟樺 (2017)。**民國五十至八十年代（1961-2000 年）數學課程改革之探究**。教育部普通高級中學課程 **數學學科中心** (臺北市立建國高級中學)。

翁秉仁 (2016)。小朋友適合學機率嗎？**科學人雜誌，**170。取自 http://sa.ylib.com/MagArticle.aspx?Unit=columns&id=3058

教育部 (1964)。**高級中學生物、化學、物理教材編輯大綱及數學教材大綱**。臺北市：正中書局。

教育部 (1971)。**高中數學課程標準**。臺北市：正中書局。

教育部 (1975)。**國民小學課程標準**。臺北市：正中書局。

教育部 (2008)。**國民中小學九年一貫課程綱要數習領域**。取自 http://teach.eje.edu.tw/data/files/class_rules/math.pdf

教育部 (2014)。**十二年國民基本教育課程綱要總綱**。取自 http://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/87/pta_5320_2729842_56626.pdf

梁淑坤 (1994)。「擬題」的研究及其在課程的角色。**國民小學數學科新課程概說(低年級)**。新北市：台灣省國民學校教師研習會。

許哲毓、單維彰、劉柏伸 (2016)。樹狀圖在機率教學的應用-臺灣與英國教科書之比較。**第四屆師資培育國際學術研討會**，國立臺灣大學

單維彰、陳斐卿、許哲毓 (2017)。**以課測與擬題探討九年級學生的自發性機率概念**。科技部專題研究成果報告(編號：NSC-104-2511-S-008-002-MY2)，未出版。

甯平獻 (2010)。數學教材教法。臺北市：五南。

劉秋木 (1996)。 國小數學科教學研究。臺北市：五南。
鄭章華、單維彰 (2015)。素養導向之數學教材初探。**邁向十二年國教新課綱的第一哩路：從課綱轉化到學校教育的系統性變革學術研討會**，國家教育研究院。

二、英文部分

Bognar & Nemetz(1977). On the teaching of probability at secondary level. *Educational Studies in Mathematics*, *8* , 399-404.

Bush, W., & Fiala, A. (1986). Problem Stories: New Twist on Problem Posing. *The Arithmetic Teacher, 34*(4),6-9.

Brown , S. I. & Walter, M. I. (1993). Problem Posing in Mathematics Education. In S. I. Brown & M. I. Walter (Eds.) Problem Posing: Reflection and Applications 16-27, Hillsdale, *New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.*

Charles,R . I., & Silver, E. A. (Eds.). (1988). Thet eachinga nd assessing of mathematical problem solving.Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics.*

Cunningham, R. (2004). Problem posing: an opportunity for increasing student responsibility, *Mathematics and Computer Education, 38*(1), 83-89.

Cifarelli, V. & C. Sheet,(2009). *Problem Posing and Problem Solving: A Dynamic Connection. Sch. Sc. Math, 109*(5): 245-246.

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems: a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 261-271.

English. L. D. (1996). Children’s problem posing and problem solving preferences, In J. Mulligan & M. Mitchelmore (Eds.), *Research in Early Number Learning* ,227-242. *Australian Association of Mathematics Teachers.*

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 183–217

Hart, K. (Ed.). (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Hashimotto, Y. (1987). Classroom parctice of problem solving in Japanese elementary schools. In J. P. Becker & T. Miwa (Eds), *Proceedings of the U. S.-Japan seminar on mathematical problem solving* (pp. 94-119). Carbon dale, IL: Southern Illinois University.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., & Tarr, J. E. (1999). Understanding students' probabilistic reasoning. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in Grades K-12: 1999 Yearbook* (pp.146-

155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Li, J. (2000)., Chinese students understanding of probability, *Unpublished doctoral dissertation*,National Institute of Education. Nanyang Technological University, Singapore, 2000.

Lavy, I. & Shriki, A. (2007). Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. In W. Jeong-Ho, P. Kyo-Sik, L. Hee-Chan & S. Dong-Yeop (Eds.), *Proceedings of the 31th international conference on the Psychology of Mathematics Education (PME)* (pp. 129–136). Seoul, South Korea, III.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics *National Council of Teachers of Mathematics Commission on Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM

NCTM (2000). National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children* (L. J. Leake & P. D. Burrell & H. D. Fischbein, Trans.). London: Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1951)

Reitman, W.(1965). *Cognition and thought*. New York：Wiley.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: National Council of Teachers of Mathematics and MacMillan.

Silver, E. (1993). On mathematical problem posing. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F.L. Lin (Eds.). *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 66-85). Tsukuba (Japan): International Group for the Psychology in Mathematics Education.

Silver, E. A. (1994). *On mathematical problem posing, For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28

Silver, E. A (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives.*International Reviews on Mathematical Educqtion,* 2, 67-72.

Silver, E. A, & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 521-539.

Silver, E. A., Mamona-Downs J., Leung, S. S. & Kenney P. A. (1996). Posing Mathematical Problems: An Exploratory Study *Journal for Research in Mathematics Education, 27 (3),* 293-309.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students’ problem posng in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), T*echnology in mathematics education* (pp. 518-525). *Mathematics Education Research Group of Australasia. The University of Melbourne*.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/

Writz, R. W. & Kahn, E. (1982). Another look at application in elementary school mathematics. *Arithmetic Teacher*, *30*,21-25.

附錄一、單維彰老師主編---機率擬題學習單 20151021

1. 機率是什麼？

2. 機率的基本數學性質。

3. 機率有幾種？

4. **全體**：全部可能的情況。 **部份**：想要他發生的情況。
   怎樣的機率問題可以算？

範例：

A.

〇〇國中擬題達人

班級：	座號：	所攜帶物品：	協助出題者簽名與建議 (空間不足可寫在背面)
題目(第一版)：你是一個今年要去逢塗國中報到的新生，而報到的新生有400人，每個年級有20班，今年每班有20人，但今年卻有3個異常機車的老師，請問，你被分到其中一個機車老師的班上的機率有多少？			姓名： 建議： 姓名： 建議：

B.

〇〇國中擬題達人

班級：	座號：	所攜帶物品：	協助出題者簽名與建議 (空間不足可寫在背面)
題目(第一版)： 假設教室的電扇6個、電燈12個 士賢要全部擦乾淨，他擦到第10個 掉下來的機率是多少？ 承上題他被第10個砸死的機率是多少？			姓名： 建議： 姓名： 建議：

C.

〇〇國中擬題達人

班級：	座號：	所攜帶物品：	協助出題者簽名與建議 (空間不足可寫在背面)
題目(第一版)： 下週誠凜高中即將對戰洛山高中。誠凜派出先發5人(火神、黑子、木吉、日向、伊月)，洛山則派出赤司、葉山、根武谷、實渕、黛千尋這5人上場。若： • 火神在前30分鐘就進入zone的機率為15%，最後10分鐘才進入zone的機率為90% 請問火神在最後20分鐘能進入zone的機率是多少？			姓名： 建議： 姓名： 建議：

D.

班級：	座號：	所攜帶物品：	協助出題者簽名與建議 (空間不足可寫在背面)
題目(第一版)： 有天，王豬柔和大旭老師打賭， 和對方猜拳，輸的人要cos水手月亮一節下課(15分) 假設王○柔輸了，她必須穿著水手服cos 15分鐘， 好 她想去上廁所，她在從一樓走到三樓走廊 (共300m)不會被生教發現的機率有多少？ 註：生教出沒點：二樓走廊／速度＝150m/10分／王噪速＝100m/5分			姓名： 建議： 姓名： 建議：
解答：(寫出詳細解題過程) 設			