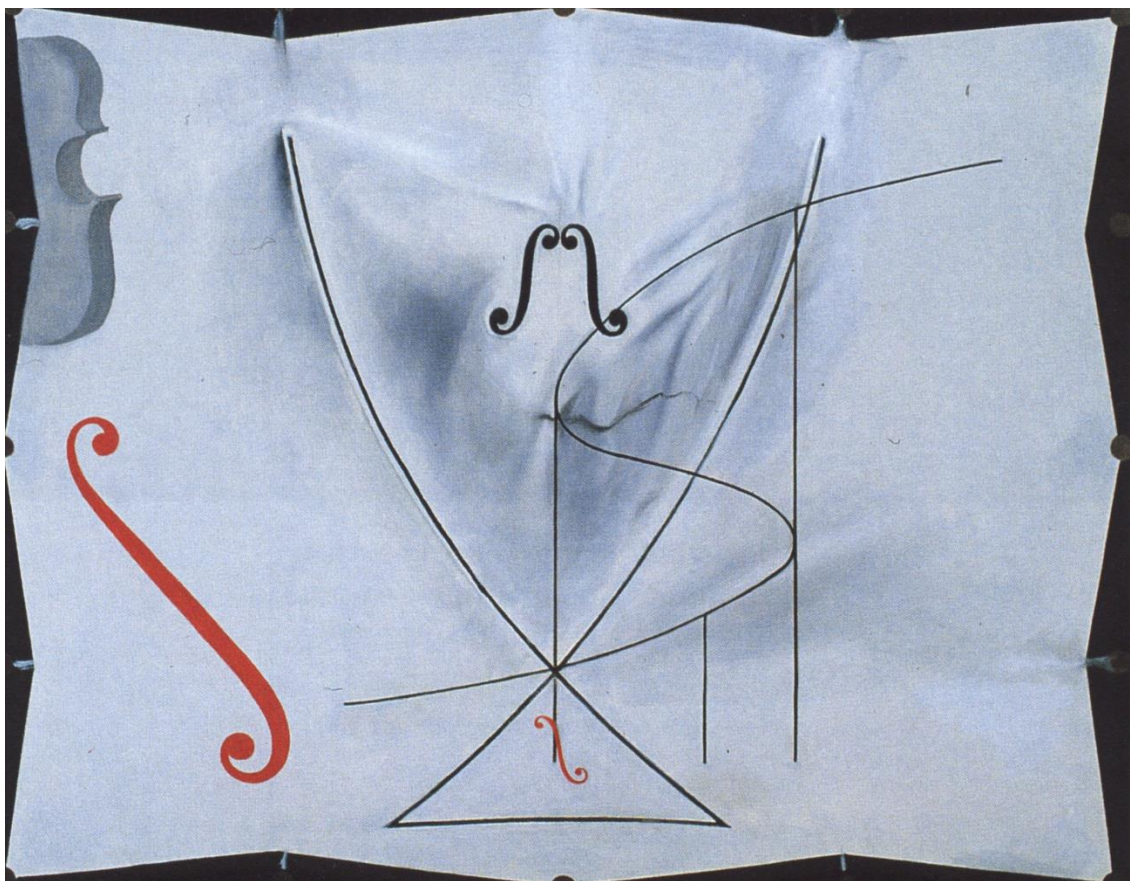


微積分拾級



單維彰

國立中央大學數學系、師資培育中心、文學院學士班

民國 111 年 12 月 6 日

封面文字是作者的高中同學李榮源先生西元 2014 年筆書，圖畫是達利的最後一幅畫：*The Swallow's Tail* (1983). Figueres: Dalí Theatre and Museum.

(這一頁是封面裡。雙面印刷時，放在封面的背面。)

簡版序言

2022 年 12 月 11 日

這一套微積分學習模組雖然是 2014 至 16 年間的製作，但是就模組架構、學習理念，與教學法的創新性而言，至今仍然沒有其他大規模的作品可以比擬，因此它仍然是有價值的參照材料：不論是微積分的學習，或者是教材教法的參酌。

這一套學習模組取名《微積分拾級》，打算分成六個區塊，其中第一區塊微積分拾級（一）的播放清單放在 <https://goo.gl/ujmiKB>，設計理念是搭配普通高中一年級的多項式學習，以淺緩的坡度引進微積分，並涵蓋目前高三選修數學甲的微積分內容。其他區塊可以在 Youtube 頻道找到（區塊四、五、六還沒做）。



所謂「模組」的意思是：它是學習的材料，卻未必是「教材」。與大家熟悉的教科書對比，模組沒有預定的編序，每個單元（unit）原則上專注於一項學習目標，由一支大約 15 分鐘的影片，配合大約 2 頁的輔助文本，以及 5 題的自我檢測組成。雖然數學的學習有其內在邏輯，不太能隨意跳躍，但是當學習者的基礎知能逐漸穩固之後，模組的編序與取捨就可以越來越有彈性。而且，簡短的單元內容，使得具備合適基礎的讀者，根據關鍵字搜尋到模組之後，即可針對目標而學習；這樣的設計，可望符應網路時代的新型學習模式。

學習模組有以上優點，而且它可以因應需求編序而組成「課程」。但是模組也有一些缺點：(1) 當讀者無法習得某單元，不知道需要何種先備知識？或者當讀者習得某單元，如果還想繼續學，不知合適的下一單元。這其實可以利用 AI 輔助的推薦系統解決，只是還沒有做。(2) 如果要編成「課程」，則模組與模組之間反而顯得缺乏連結，需要教師填補適當的串場言談，才能將模組「串」成課程。(3) 如果編成課程，缺乏足夠的練習題；目前倚靠「臺灣微積分題庫平臺」另外提供線上習題，或者由開課的教師補充作業。

微積分拾級模組的應用範例之一，是為高中一年級下學期以上的學生所設計的一學期 2 學分選修課程「微積分先修」，請看說明網頁 <https://shann.idv.tw/calculus/ap.html>。



在模組設計之外，微積分拾級的創新學習理念，一言以蔽之：

數學 + 電腦，升級我們的大腦

其實要說它「創新」還頗尷尬，這個理念是作者 1980 年春在建國中學聽中央大學數學系華洋教授講的。只是，四十多年過去了，這項具有偉大洞察力的數學教育創新理念，還是鮮少實踐——在大學還算有所變化，在中學可惜進步遲緩。

這項理念的宗旨是：善用電腦，可以讓大腦學會更多數學，也讓人們能用數學解決更多問題。在能夠嫻熟操作電腦的前提下，我們需要下功夫學習更清晰的數學概念，以及更多元的數學應用；我們仍然需要熟練的心算與筆算技能，但是範圍僅限於學習數學概念所需的典範例，需要「蠻力」或者記憶特定技巧的計算，全都轉交電腦。

各單元的創新教學則不勝枚舉；初學者無法分辨教法的新舊，所以無所謂，但網路上已經有相當多「再學者」對於創新教法的稱頌。整體而言，教學內容的創新包括以下幾大項目：

1. 數學作為一種語言，從跨文化的語言學習角度引出數學概念。
2. 從十七世紀單純的微積分（naïve calculus）說起，搭配高中一年級的多項式函數知識與技能，藉多項式徹底了解可微函數的特性，以及微分與積分的概念和典型應用。
3. 從綜合除法轉向泰勒多項式，從泰勒多項式引出所有的微分計算公式，並用它引出極限符號，在多項式和有理函數的範圍內學會極限的代數操作。
4. 微分方程是微積分的核心內容，應融入微積分的教學。
5. 機率與統計是未來亟需的數學，應融入微積分的教學；直方圖是黎曼和的另一個自然動機。
6. 微積分的應用範圍已經不限於自然科學了，應適度展示它在社會科學的應用。

最後，取名「微積分拾級」是為了向李善蘭（1810-82）致敬；他與英國傳教士偉烈亞力（Alexander Wylie, 1815-87）合譯的《代微積分拾級》，出版於咸豐九年（西元 1859 年），是第一批傳到東方的解析幾何與微積分知識。也就是這一本書，發明了代數、微分、積分等譯名，使得 Calculus 合併微分與積分兩種算法，簡稱「微積分」。此外，「拋物線」也出自此書。

