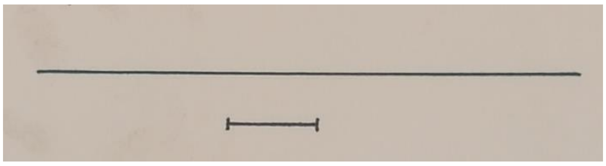
1 實數

這一課想要說明**實數**究竟「是」什麼？數學課本通常寫著「實數分為有理數和無理數」。作為陳述語句，這句話當然是對的，但是作為敘事語句，特別是教學上的敘事，它卻有邏輯語病：因為它假設讀者已經知道什麼是「實數」，但其實讀者（學生）此時並不知道什麼是實數。就好像「人分為（生理上的）女人和男人」這句話只有在讀者已經知道什麼是「人」的前提下才有意義。如果數學課本反過來寫「有理數和無理數合稱為實數」，那就好像說「女人和男人合稱為人」，亦無不可，但是它的前提就得假設讀者已經知道什麼是有理數？什麼是無理數？

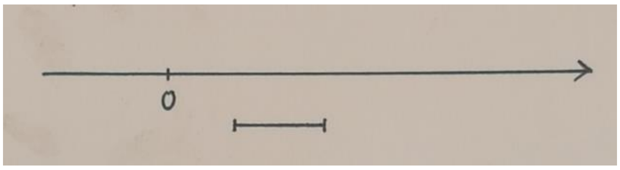
我相信讀者此時的狀態是：「有理數這東西我明白，但無理數是什麼？」[1]。大家都會人云亦云地說：「不是有理數的，就是無理數」。問題就在這裡：不是有理數的「什麼東西」才是無理數呢？例如「人」當然不是有理數，難道「人」就是無理數嗎？這個觀念當然是荒唐的。正確的觀念是「不是有理數的**實數**，就是無理數」。所以真正要釐清的問題是：**實數**「是」什麼？

實數是測量所得的數

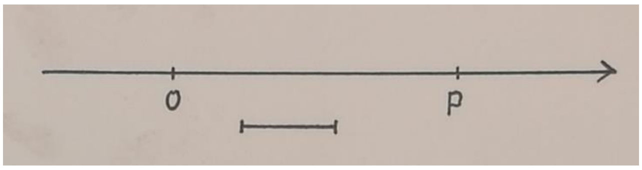
我們在國中一年級認識了數線，現在該進一步了解它了。數線觀念要從一條直線（兩端皆可無限延伸），和一條線段開始，如下圖。那一條線段的長度不是重點，可長可短，重點是它一經選定，就得固定下來不能改變。那條固定的線段稱為**單位線段**，它的長度稱為**單位長**。



在直線上任取一點，作為數線的**參考點**，又稱為**原點**（Origin），通常記作 O（Origin 的第一個字母）。然後選擇一個方向，作為數線的**正向**，在正向的那一端畫上箭頭標記；如果是水平數線，則正向通常在原點的右側，如下圖。



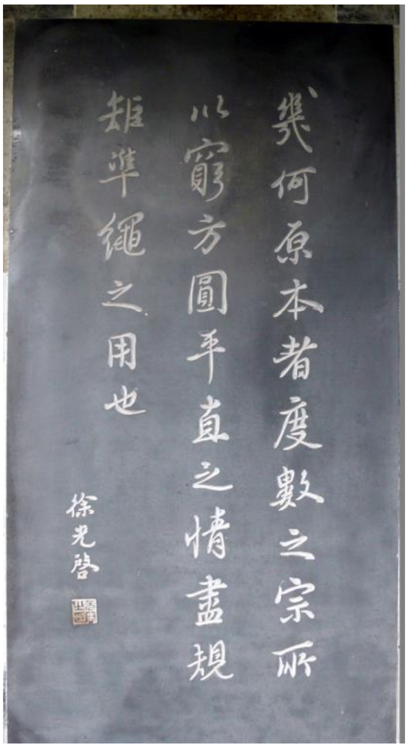
在數線上任取一點，如下圖的 P，用單位線段去「度量」[2] 線段 OP，可得到線段 OP 的長為單位線段的「倍數」[3]，記作$|OP|$，此倍數$|OP|$即為正實數。所以關於實數的最基本概念便是「**實數是測量所得的數**」。



[1] 這個句型套用羅大佑〈戀曲 1980〉的歌詞：「愛情這東西我明白，但永遠是什麼？」。
[2] 此「度量」為動詞，語音是「度良」。本文的「度量」與「測量」為同義詞。
[3] 「倍數」其實需要嚴謹的數學定義，請同學現在就以生活中的經驗來理解吧。

古代的東方和西方文明，都區分了「度量」的數與「點數」[4] 的數。「點數」用在可以一個一個區隔的對象，例如幾個人？一天有幾次車班？鞦韆盪了幾回？東方和西方都稱「點數」的結果為**數**（number），因此古代所謂的「數」都是整數。相對地，「度量」用在無法一個一個區隔的對象，例如有多長？有多重？有多久？有多熱？西方稱「度量」的結果為**量**（quantity），古中文的說法之一則為**度**。徐光啟[5] 在《幾何原本》序裡寫著：

幾何原本者，度數之宗。[6]



意思是說《幾何原本》這部書，可同時作為「點數」和「度量」方法的基礎。可見古代的「數」演化為今天的整數，「量」演化為今天的實數；「數」與「量」以前是兩種觀念，如今整合在一起了。

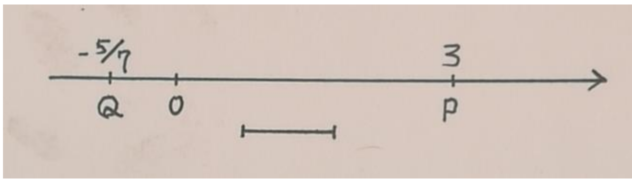
可以用整數來「點數」的對象，稱為**離散量**。需要用實數來「度量」的對象，稱為**連續量**。

[隨堂練習 1]

請為離散量、連續量各舉兩個例子；必須有別於前面課文已經舉過的「點數」和「度量」例子。

實數即數線上所有點的坐標

在數線上，當點 P 在原點的正向那一側時，規定它在數線上的**坐標**為實數$|OP|$；否則它的坐標為$|OP|$的相反數，亦即$-|OP|$。以前面的 P 點為例，若線段 OP 是單位線段的三倍長，則$|OP|=3$，故 P 點坐標為 3，我們也可以在數線上標記實數 3。另取一點 Q，使它在原點的正向之反側，且線段 OQ 是 $\frac{1}{7}$ 條單位線段的 5 倍長，則$|OQ|=\frac{5}{7}$，而 Q 點坐標為$-\frac{5}{7}$。如下圖。



所以實數說來也很簡單，就是將一條直線裝配成數線之後，線上所有點的坐標。數線就是根據數學觀念所造的一把「尺」，我們用這把尺來度量天下的連續量。

在「數線」這把尺上，從 O 開始（包含它）向左、向右每隔一單位長所標示的點，稱為**整數點**，我們知道整數點的坐標是$\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$。要特別說明的是：正整數點的坐標是實數裡的正整數，而不是「點數」離散量的正整數。小學老師曾經要我們做一種功課，讓我們重溫一次童年的美好回憶吧。

[4] 此「點數」為動詞，語音是「點鼠」。

[5] 徐光啟（1562-1633）是明朝萬曆年間的進士，中國第一批天主教徒。他與利瑪竇神父合作翻譯的《幾何原本》（前六卷）出版於西元 1607 年，是西方數學進入中文世界的第一部書。

[6] 碑文照片由作者攝於上海市徐家匯的「徐光啟紀念館」。

[隨堂練習 2]

(1) 以公分為單位，用尺量出前面「單位線段」的長度。(2) 用直尺畫一條 2 公分長的線段。

做第 (1) 小題時，有沒有疑惑：該準到小數點下第幾位？做第 (2) 小題時，會不會擔心：線段的兩端點「真的」對準直尺的刻度 0 和 2 嗎？妳／你敢保證畫出來的線段長度真的是 2.000… 公分嗎？妳／你或許不記得了，只要小朋友測量出「接近」的答案，小學老師就打勾了，因為「**測量必有誤差**」。這就是整數 2 和實數 2 的差別：用整數 2 來「點數」離散量的時候，是沒有誤差的，但是用實數 2 來「度量」連續量的時候，卻永遠無法避免誤差。

符號 $\pm a$ 以及 $n\in\mathbb{N}$

我們以後常有機會說「n 是正整數」還有「a 或 $-a$」這樣的句型，數學是一種愛用符號來簡化文字的語言，所以我們正式介紹以下兩種符號：

- $\pm a$ 讀作「正負 a」，它是「a 或 $-a$」句型所對應的數學語言；
- $n\in\mathbb{N}$ 讀作「n 屬於 N」，它是「n 是正整數」句型所對應的數學語言；同理 $n,m\in\mathbb{N}$ 是「n、m 都是正整數」對應的數學語言。符號 $\mathbb{N}$ 表示正整數，它來自**自然數**（Natural number）的首字母；在這本書裡，自然數和正整數是同義詞。[7]

[隨堂練習 3]

(1) 請將「a 或 $-a$ 的絕對值都等於 a 的絕對值」用數學符號寫出來。

(2) 請問「若 $n,m\in\mathbb{N}$ 則 $n-m\in\mathbb{N}$」這句話對不對？簡述理由。

數線上的有理點

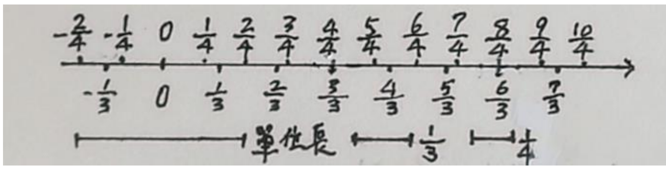
當數線上一點 X 與原點的距離 $|OX|$ 為 $\frac{1}{m}$ 條單位線段的 n 倍長，X 的坐標（也就是它所對應的實數）就是 $\frac{n}{m}$ 或 $-\frac{n}{m}$，其中 n 和 m 當然都是正整數。在這種情況下，我們說 X 是**有理點**。另外規定原點也是有理點，它的坐標是 0。用數學符號語言來寫，就是：

$$\text{數線上的有理點坐標為}\pm\frac{n}{m}\text{ 或 }0\text{，其中 }m,n\in\mathbb{N}\text{ 。}$$

當數線上一點 X 的坐標是 x 時，記作 $X(x)$。

因為整數點就是 $m=1$ 的情形，所以整數點也都是有理點。當 $m=2$，也就是用 $\frac{1}{2}$ 單位長畫出來的有理點，稱為**二分點**。同理，用 $\frac{1}{3}$ 單位長、$\frac{1}{4}$ 單位長畫出來的有理點，分別稱為**三分點**、**四分點**，依此類推。下圖示範三分點和四分點。

[7] 有些書把自然數定義成正整數或零，但是本書不採此定義。

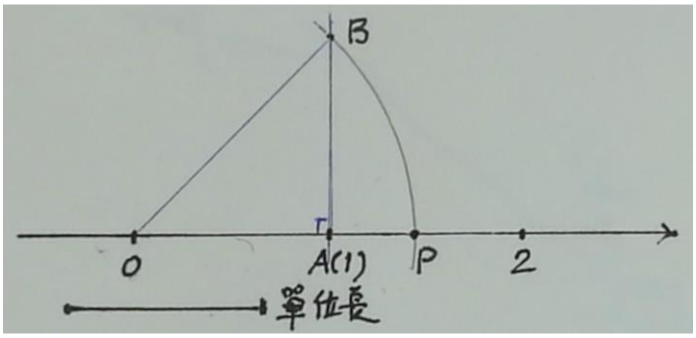


因為實數就是數線上的點坐標，所以$\pm\dfrac{n}{m}$和 0 當然也都是實數。這些特殊的有理點坐標，稱為**有理數**。顯然有些有理數所對應的點是重疊的，例如 $\dfrac{2}{2}$、$\dfrac{3}{3}$、$\dfrac{4}{4}$ 所對的有理點都跟 1 所對的整數點重疊。在此情況下，我們就說這些數彼此相等，也就是 $\dfrac{2}{2}=\dfrac{3}{3}=\dfrac{4}{4}=1$。

讀到這裡，同學或許有一個疑問：有理數不就是以前學過的「分數」嗎？簡單地說，「有理數」與「分數」真的差不多可以當作同義詞，同學們不妨將「有理數」當作學名，「分數」當作俗稱。如果一定要挑出它們的差異，只能說整數-1、0、1、2 等，一般而言並不被認為是分數，但它們都是有理數。

數線不全是有理點

如果數線上的所有點都是有理點，或者說如果所有實數都是有理數，那麼就根本不會出現有理數這個觀念。哲學的辯證論說得好：「每一個概念，都是因為與它相對之概念的存在而存在的。」數線上不全是有理點，所以才有必要定義有理點。最著名的「非有理點」例子就是 $P(\sqrt{2})$。



讓我們先確認數線上真的有$P(\sqrt{2})$這個點。如右圖，在數線上，過點$A(1)$作垂線，在其上取點 B 使得 AB 線段長等於單位長，則$\triangle OAB$是一個等腰直角三角形，兩股長皆為 1；根據畢氏定理，斜邊 OB 長為$\sqrt{2}$。以 O 為圓心，OB 為半徑畫圓，交數線的正側於P點。則 $|OP|=\sqrt{2}$，所以點 P 的坐標是$\sqrt{2}$，記作$P(\sqrt{2})$。

同學們肯定早就「聽說」$\sqrt{2}$不是有理數，可能也看過所謂的「證明」。可是，請試試看以下「不掉書袋」的論述，也許會有不同的感受。首先，很明顯地$1<\sqrt{2}<2$，故已經確定$\sqrt{2}$不是整數。如果$\dfrac{n}{m}$是最簡正有理數，意思是說$m,n\in\mathbb{N}$且 m、n 互質。所謂互質就是沒有共同的質因數。重點是：如果 m、n 互質，則m^2、n^2依然互質，[8] 例如 2、3 互質，它們的平方 4、9 也互質，同樣地，1697、1200 互質，它們的平方 1697^2、1200^2 也互質。可見如果$\dfrac{n}{m}$是最簡正有理數，$\dfrac{n^2}{m^2}$依然是最簡有理數。既然是最簡有理數，當然不能約分。既然不能約分，更不能約分為 2。結論是：「所有最簡正有理數的平方都不等於 2」，也就是說「所有最簡正有理數都不等於$\sqrt{2}$」。因為有理數都可以約分成最簡有理數，所以可推論「所有有理數都不等於$\sqrt{2}$」，這當然就是說「$\sqrt{2}$不是有理數」。換句話說，$P(\sqrt{2})$不是有理點。

---

[8] 這是因為「平方」並不會增加新的質因數。例如$1200=2^4\cdot3\cdot5^2$，它有三個不同的質因數 2、3、5。作了平方之後$1200^2=2^8\cdot3^2\cdot5^4$，不同的質因數還是只有 2、3、5，只是次方的指數都變成兩倍。由此可見，如果 m、n 本來就沒有共同的質因數，則 m^2、n^2 還是沒有共同的質因數。換句話說，如果 m、n 互質，則 m^2、n^2 也互質。

同樣的理由，我們可以論述$\sqrt{3}$ 、$\sqrt{5}$ 、$\sqrt{7}$ 、…、$\sqrt{p}$ 、… 都不是有理數，其中 p 是質數。因此 $\sqrt{p}$ 在數線上的對應點，都不是有理點。

無理數是「揀剩的」

由前節論述可知，數線上不全是有理點。數線上的點，扣除有理點之後，都稱為**無理點**。無理點的坐標也是實數，而這些數就是從實數揀出有理數之後，剩下的數。它們就稱為**無理數**。

無理數當中，既沒有 0 也沒有 1，沒有我們熟悉的整數和分數。在國中畢業時，我們唯一認識的一族無理數就是平方根 $\sqrt{a}$ 其中 a 不是「完全平方數」。此外，我們還認識一個特殊的無理數：圓周率 π 。它的定義是

$$\pi=\frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}}$$

它的近似值是 3.14 或 3.1416，而它是一個無理數。這個事實，還沒有人能用中學程度的數學知識解釋清楚，所以學生都是被「告知」的。

實數成為一個完整的算術體系，意思是說：**兩個實數加、減、乘、除的結果，都仍然是實數**。[9] 這個事實，其實哲學成分大於數學成分，我們不再加以論述。有趣的是，有理數也自成一個算術的體系，意思是說：**兩個有理數加、減、乘、除的結果，都仍然是有理數**。這個事實不難論述，請讀者自行練習。相對地，因為無理數是從實數中扣除有理數的「剩數」，所以它們並不成為算術體系，也就是說兩個無理數加、減、乘、除的結果，未必還是無理數，也未必不是。這個事實並不重要，同學們稍予留意即可。

[9] 這句話內含一個約定：兩個實數的加、減、乘、除都是「合法」的算式，所以不必贅述「除數」不等於 0；除數為 0 的除式本來就不合法，已經被排除了。

作業 1

班級座號____________________ 姓名____________________

1. 如果 p、q 是有理數，試論述 $p+q$ 也是有理數。
2. 如果 u 是無理數，則 $1-u$ 能肯定是有理數還是無理數嗎？為什麼？
3. 如果 u、v 是無理數，試論述 $u+v$ 未必是無理數。
4. 數學界慣用 $\mathbb{Q}$（Quotient 的首字母）表示「有理數」。請用 $\in$ 和 $\mathbb{Q}$ 這些符號寫出「p 是有理數」和「p、q 都是有理數」這兩個句子。

科技工具

同學們在課堂上應該學過計算機（手持式電算器）的操作，也學到了數字的科學記號。本文附帶一則計算機「科學記號模式」的教學影片，網址如下，或掃描右邊的二維條碼。若有需要，請跟隨網頁的指引，學習先備的計算機操作法。

http://shann.idv.tw/video/210831.html