

2 十進制小數〔教學說明〕

教學目標

了解實數的小數表達在數線上是什麼意思？連帶了解概數的表達方式，以及十分逼近法的原理。

知

有限小數是一種特別的分數。可以用十進制小數來定義實數。

行

能判斷某分數是否可表達為有限小數。能用「準至」與「約至」來溝通概數的選取。能用計算機與十分逼近法估計三次方程的解。能根據除法原理將除法算式改寫成等式。

識

無理數當然不落在十次分點上，但很多有理數也不落在十次分點上，所以產生了無窮小數。可「感知」有理數能以有限小數表達的機率極低，實數恰是有理數的機率也極低；因此，概數幾乎是必須的。數學需要處理循環小數，因為它們是以十進制小數表達實數的小缺點，亦即表達方式不唯一：數線上同一點的坐標可能有兩種小數表達，它們必須相等。（如果規定分數必須約到最簡，則以分數表達有理點的方式是唯一的。）

主要設計理念

1. 如開場白所述，多數教材陳述 0.9 循環等於 1 的結果，而本文希望學生明白（有感），為什麼會出現像 0.9 循環這樣的數？它不是數學老師憑空編造出來考學生的。希望傳達的理念，如「識」所述，是循環小數乃十進制小數表達的小缺點，數學必須處理它們等於另一個數的問題，因為它們是數線上同一點的坐標。
2. 理解實數的小數表達在數線上的意義之後，其實就該了解十分逼近法了。十分逼近法只要能掌握「過猶不及」的觀念即可，不需要藉助於連續的函數／方程式圖形。
3. 很少看到以下事實的正式說明：用「長除法」做 $n \div m$ 的商就是有理數 $\frac{n}{m}$ 的小數表達，而且它是不超過 $\frac{n}{m}$ 的最大某位小數。本文藉除法原理給予正式說明。學生如果無法吸收也不要緊，這一節的真正目的是「暗渡」除法原理，為多項式的除法原理暖身。

教學備忘

1. 本文初次提出「定理」一詞。以後還有很多機會讓學生潛移默化地了解數學「定理」的價值，此時不必太強調，只要介紹這個名詞即可。
2. 隨堂練習 2 和作業第 1 題都不是真正的「機率」問題，高中生無法處理無限樣本空間的問題。這裡只想讓學生「感受」某種數相對另一種數少很多。這些問題可以說是主觀機率的問題。雖然這兩個問題有客觀的「正確」答案，但如果有些學生不能「感受」，請不要勉強，暫時不要追究。

3. 注意本文提出的十分逼近法並未涉及方程式圖形，請不要引用連續函數的中間值定理。範例 1 的提問是方程 $x^3 + x = 1$ ，而不是方程式 $y = x^3 + x$ ，前者沒有圖形。請看範例 1 的解，這是單純的數值問題，並不涉及圖形。

教學素養

老師們知道「任取一個實數」恰為有理數的機率是 0。高等數學是用測度（measure）觀念來處理這個問題，此時當然不必跟學生說明白。但如果有學生問這個「機率」是什麼意思？這是好問題，因為高一學生只有國三的古典機率經驗，就連樣本空間的概念都還沒有，所以當然不容易釐清此處所說的「機率」是什麼意思。建議用實驗機率的方式解釋：設計一種可以「隨機」選一個數（實數或有理數）的方法，選出來之後，檢查它是不是目標的數（有理數或可表達為有限小數的數），如果是，就登記起來。選很多很多次之後，選中的次數對實驗次數的比值，就是此試驗的機率估計值。雖然說了這麼多，但它畢竟很難真的執行；它終究是一個想像的實驗（mental experiment）。可見數學終究是個心智活動。

雖然本文只談十進制小數，但是它的特徵（包括缺點）可以推廣到任意進制，特別是電腦使用的二進制。用二進制表達來定義實數的形式也是一樣的，而二進制的循環小數就是 1 循環。在二進制，僅當分數的（約到最簡之後）分母只有質因數 2，也就是說分母是 2^k 時，才能寫成有限小數。

在世界各民族的歷史上，可能是希臘人最早面臨三次方程：倍立方問題。那是個神諭，要求把某個長方體狀的神殿體積（維持三邊比例）放大為 2 倍。所以 $x^3 = 2$ 可能是人類遭遇的第一個三次方程。可是這個方程太簡單，學生用計算機的立方根按鍵就立刻得到概數了。因此，本文範例 1 故意使用稍微複雜一點點的三次方程 $x^3 + x = 1$ ；美中不足的是，這個方程純屬數學上的練習，沒有故事。老師不妨說說希臘神殿的故事，把最簡單的三次方程帶出場。