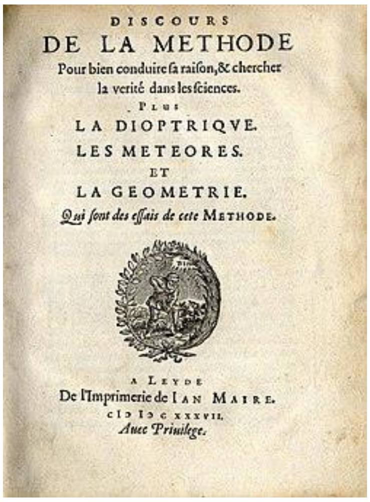
# 3 方程式圖形


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
Plus
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

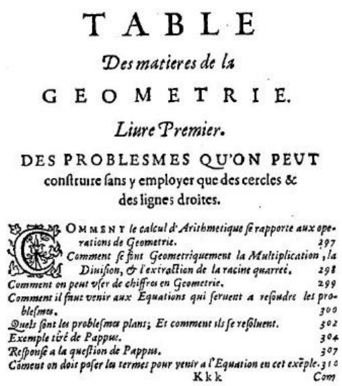


TABLE
Des matieres de la
GEOMETRIE.
Liure Premier.
DES PROBLESMES QU'ON PEUT
construire sans y employer que des cercles &
des lignes droites.
COMMENT le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie. 297
Comment se font Geometriquement la Multiplication, la Diuision, & l'extraction de la racine quarrée. 298
Comment on peut vser de chiffres en Geometrie. 299
Comment il faut venir aux Equations qui seruent a resoudre les problesmes. 300
Quels sont les problesmes plans; Et comment ils se resoluent. 302
Exemple tiré de Pappus. 304
Response a la question de Pappus. 307
Cõment on doit poser les termes pour venir a l'Equation en cet exẽple. 310
Kkk Com

同學們可能都聽說過類似「笛卡兒發明平面坐標，讓幾何和代數結為連理」這種說法。更精確一點兒的說，笛卡兒（René Descartes, 1596-1650）在西元 1637 年出版了一本提倡唯心論與理性主義的哲學著作《方法論》，主張人的心靈具備理性的基礎，因此人可以獨立於上帝而憑著自己的理性獲得真確的知識。至於運用理性的求知方法，第一步就是要「懷疑一切」。他以「懷疑自己是不是真的存在？」作為一個懷疑的範例，最後以「一個能夠提出這種懷疑的心靈必定是存在的」作為結論。這就是他那句名言「我思故我在」的出處。[1]

笛卡兒為了替他提出的思考方法找一組能夠說服世人的範例，他在書後補了一部題為《幾何》的附錄；其實這部附錄跟前面正文的頁數差不多，可見附錄本身的份量之重。笛卡兒在附錄裡示範如何利用單位長與直線參考坐標，將平面上的幾何關係（例如三點共線或三點共圓）對應成代數關係，不但運用這個方法重新證明過去已知的事實，更成功地發現了新知識：新數學定理與新作圖法，所以他的哲學論述確實說服了許多知識分子。如今的數學史，都以笛卡兒在 1637 年出版的《幾何》（附錄），當作平面直角坐標的濫觴。在西方，平面直角坐標就稱為卡氏坐標（Cartesian coordinates）。[2]

此後，在平面上不畫坐標的幾何學，例如國中階段的中垂線性質、角平分線性質、三角形的全等判定，通稱為平面幾何（plan geometry）。相對地，有坐標的幾何就稱為坐標幾何（coordinates geometry）。這部《別冊》要講的重點之一是微積分，微積分是從坐標幾何發展出來的。從直角坐標的出現，到微積分的誕生，其間只有三十幾年的光陰；也就是說，只經過一代人的思考，就從坐標幾何發展出微積分了。由此可見，微積分應該不至於太難才對。確實如此，請跟著《別冊》一步步學下去。

## 方程 vs 方程式

讓我暫時岔開話題，釐清兩個名詞。

含有代數符號（稱為「元」）的等式，基本上分為兩種。像 $7x=22$、$x^2-5x+6=0$ 這種等式，符號 $x$ 的角色是「未知數」，只有特定的實數可以代入 $x$ 而使等式成立。讓我們約定：在《別冊》裡，我一律稱這種等式為**方程**。方程是中國固有數學的名詞，出自《九章算經》；「方程」對應的英文名稱是 equation with unknowns（含未知數的等式）。

---

[1] 《方法論》的書名原是法文，長達 16 個字；在十九世紀以前，西方的書名經常寫得很長，彷彿書名就是書的內容摘要似的。這部書的名字譯為中文應是《談談正確引導理性在各門科學上尋找真理的方法》，因此也有人將它翻譯成感覺比較平易的《談談方法》。書中第四部（Part IV）出現 *Je pense, donc je suis* 這句話，直譯為「因為我在思考，所以我存在」，中文的標準翻譯是「我思故我在」。

[2] Descartes 是笛卡兒的法文姓氏，字裡的兩個 s 都不發音。那個時代的官方文字是拉丁文，每位菁英人士都另有一個拉丁名字，笛卡兒的拉丁文姓氏是 Cartesius。這個字的所有格就變形為 Cartesian。所以 Cartesian coordinates 的意思就是「笛卡兒的坐標」。

另一方面，像$2x+3y=1$這種等式，符號 $x$ 可以代入任何數（當我說任何數，意思就是任何實數）而找到某個$y$，使得等式成立；反之，也可以將符號$y$代入任何數，然後找出使得等式成立的$x$。在這種等式裡，符號$x$或$y$的角色都是「變數」，先隨意代入一個數的符號是「自變數」，跟著被決定的另一個符號是「應變數」。同樣要約定：在《別冊》裡，我一律稱這第二種等式為**方程式**。「方程式」對應的英文名稱是 equation with variables（含變數的等式）。

兩個方程式卻可能變成方程。例如$\begin{cases}2x+3y=1\\x-4y=-2\end{cases}$是一個方程，詳細點兒的說法是聯立方程，最詳細的說法是二元一次聯立方程。方程是世界各地的古文明遺產，巴比倫、埃及、希臘、中國都有方程概念，也都有解方程的算法。方程式卻是西歐獨步於世界的發明，它是笛卡兒發明坐標幾何之後才誕生的新物件。西歐科技超越全世界的關鍵發明之一，就在這裡。從操作的角度來分辨方程和方程式，就是

**對方程求解，對方程式作圖。**

**[隨堂練習 1]**

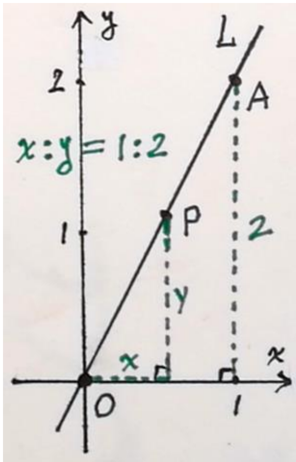
以下哪些等式是方程？哪些是方程式？

① $2x-3y=\dfrac{1}{5}$　② $x^2-3x=2x+1$　③ $x^2-3y=2x+1$　④ $\begin{cases}2x+3y=-1\\x+\dfrac{3}{2}y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

⑤ $x^2+y^2=1$　⑥ $x^3+x=1$　⑦ $x^2-2xy=y^3$

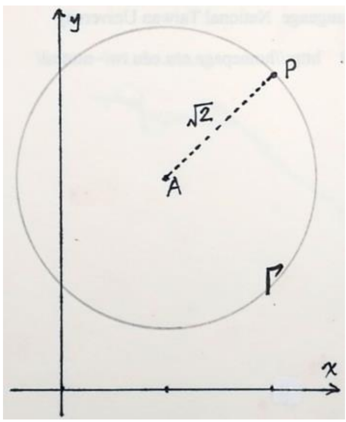
方程：____________　方程式：____________

## 方程式作圖




在笛卡兒發明坐標幾何之後，傳統的有名稱的平面幾何圖形，都找到了對應的方程式。意思是：例如，我們已經知道坐標平面上兩點$O(0,0)$和$A(1,2)$決定一條直線，稱之為 $L$，則 $L$ 上所有點$P(x,y)$的坐標值都滿足等式$y=2x$；反之，滿足方程式$2x-y=0$的所有$x$值及$y$值，若寫成數對$(x,y)$且將其「詮釋」為坐標平面上的點，則所有這些點都落在 $L$ 上。在此意義下，直線 $L$ 上的點與滿足方程式$2x-y=0$的數對，建立了一一對應的關係。因此我們說直線 $L$ 的方程式是$2x-y=0$，而方程式$2x-y=0$的圖形是直線 $L$。

再舉一個例子。坐標平面上，與點$A(1,2)$的距離皆為$\sqrt{2}$的所有點，形成以 $A$ 為圓心、$\sqrt{2}$為半徑的圓；若我們稱此圓為 $\Gamma$，[3] 則 $\Gamma$ 上所有點$P(x,y)$的坐標值都滿足等式$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{2}$，將等號兩側平方，得到較簡單的方程式$(x-1)^2+(y-2)^2=2$；反過來說，滿足方程式$(x-1)^2+(y-2)^2=2$的所有$x$值及$y$值，若寫成數對$(x,y)$且「詮釋」為坐標平面上的點，則所有這些點都落在圓 $\Gamma$ 上。因此，圓 $\Gamma$ 上的點與滿足方程式$(x-1)^2+(y-2)^2=2$的數對，建立了一一對應的關係，我們說圓 $\Gamma$ 的方程式是$(x-1)^2+(y-2)^2=2$，而方程式$(x-1)^2+(y-2)^2=2$的圖形是圓 $\Gamma$。




[3] $\Gamma$ 是對應於 G 的希臘大寫字母，讀作 Gamma。而 G 是 Graph（圖形）的字頭。

[定義] 方程式圖形

將滿足二元方程式的數對 $x$、$y$ 詮釋為坐標平面上的點坐標 $(x,y)$，則所有（通常有無窮多）這些點在坐標平面上聚集而成的圖形（通常是直線或曲線），即是方程式圖形。

前面的定義有兩個重點：

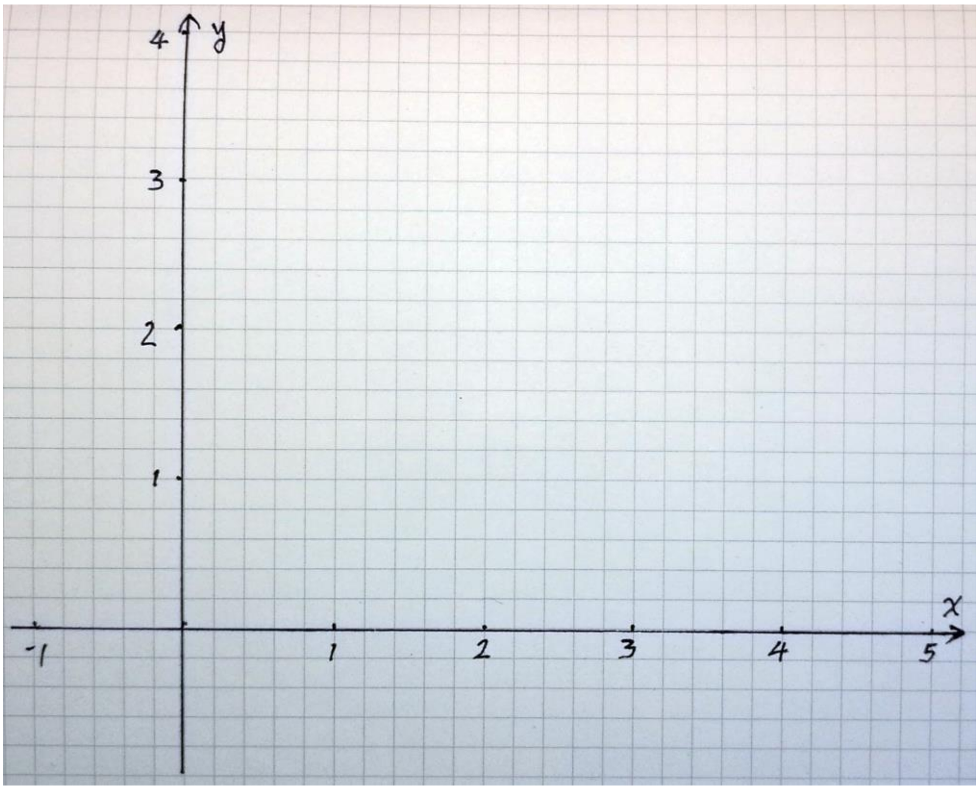
(1) 方程式並非「天生」就有圖形，而是有人「發明」了坐標，並將滿足二元方程式的兩個數「詮釋」為點坐標之後，才「創造」了方程式圖形。

(2) 方程式圖形是由無窮多個點「聚集」而成的，並非由若干個點「連」起來的。

如今同學們都知道方程式 $2x+3y=1$ 的圖形是直線，二次函數 $y=x^2-4x+3$ 的圖形是拋物線，國中老師已經教會妳／你們畫這些方程式圖形的「巧門」，例如：用兩個點畫直線，用三或五個點畫拋物線。同學們要能繼續使用這些技巧，並且延伸到其他情境。

[隨堂練習 2]

請在以下方格紙上，畫方程式 $x=y^2-4y+3$ 的圖形。妳／你認為該怎樣稱呼這個圖形？（請勿使用電腦繪圖軟體；手繪之後，可以比對軟體繪製的方程式圖形。）




以上練習要帶給同學的新知是：方程式 $x=y^2-4y+3$ 也可以視為以 $y$ 為自變數的二次函數，這時候，它的作圖方法跟二次函數 $y=x^2-4x+3$ 的作圖方法完全相同，只要把縱軸（$y$ 軸）當作自變數的軸就好了。

如果現在繼續使用二元一次方程式或者二次函數（以 $x$ 或 $y$ 為自變數皆可）來繪圖，因為同學們已經學過了技巧，所以就沒機會「體驗」方程式圖形乃是由無窮多點聚集而成的概念。因此，我們換一個比較有新奇感的例子來練習方程式作圖。

[隨堂練習 3]

請在以下方格紙上，畫方程式 $x^2-2xy=y^3$ 的圖形。

（請勿使用電腦繪圖軟體；手繪之後，可以比對軟體繪製的方程式圖形。）

[活動] 我們必須製造一張滿足方程式 $x^2-2xy=y^3$ 的 $x$、$y$ 對照表。

<table>
<tr><th>$x$</th><th>$y$</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$-1$</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

按照習慣，先代入 $x=0$，可解得 $y=0$，請自行填寫右側表格。

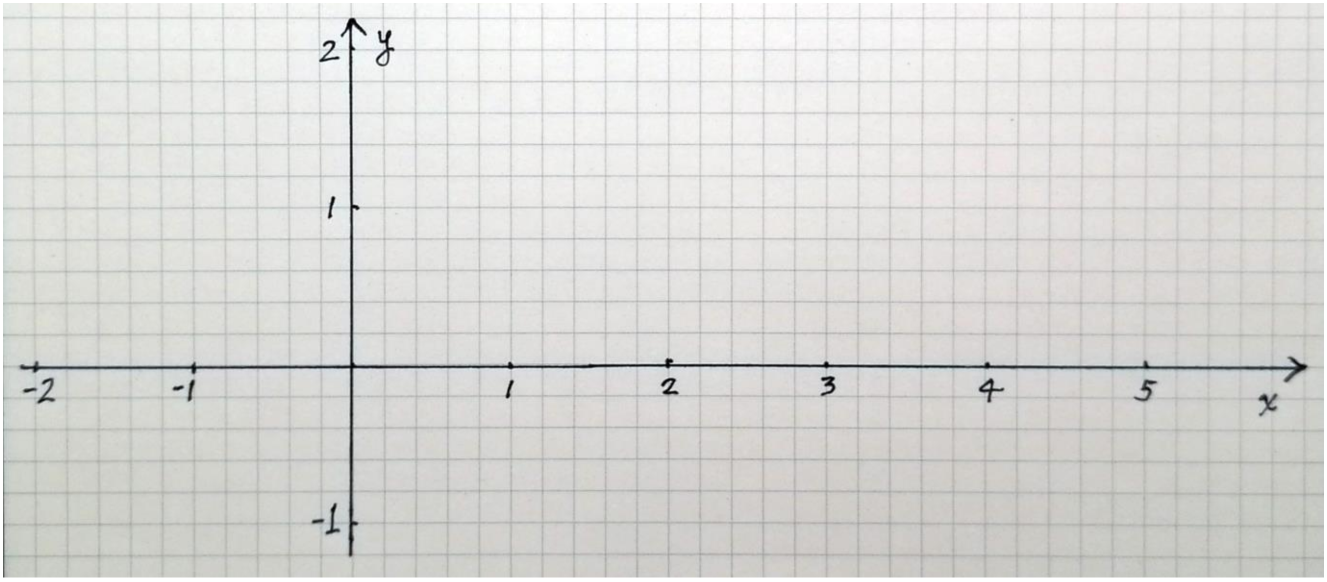
接著代入 $x=1$ 發現要解三次方程 $y^3=1-2y$，雖然我們「會」用計算機去求近似解，但是太麻煩。不如代入 $y$ 吧；其實這也是設計此方程式的用意之一：不一定要讓 $x$ 自變，也可以讓 $y$ 自變，先代入 $y$，再求 $x$。

試試看 $y=1$，代入之後，方程式變成二次方程 $x^2-2x-1=0$，用公式得到兩個解 $x=1\pm\sqrt{2}$。但是含根式的解無助於繪圖，取它們的兩位小數近似值 2.41 和 $-0.41$，請填寫表格。

接下來試試看 $y=-1$，代入之後，方程式變成二次方程 $x^2+2x+1=0$，可求解 $x=-1$，請填寫表格。再試 $y=2$，請同學自行算出兩個解，將它們約至二位小數，填入表格。

接著試 $y=-2$，代入之後得到方程 $x^2+4x+8=0$，卻發現無解。哪些 $y$ 會無解呢？將 $y$ 當作參數，則二次方程 $x^2-(2y)x+(-y^3)=0$ 的判別式為 $\Delta=4y^2+4y^3$，[4] 解不等式 $\Delta\geq 0$ 得到解區間 $y\geq -1$。因此，當 $y<-1$ 則方程式無解，不必再嘗試了。

將以上表格中的 6 組解，詮釋為坐標平面上的 6 個點，畫在以下方格紙上。各位同學能夠將這 6 個點「連」成一個圖形嗎？很難吧。因此我們需要知道更多點。請看作業。



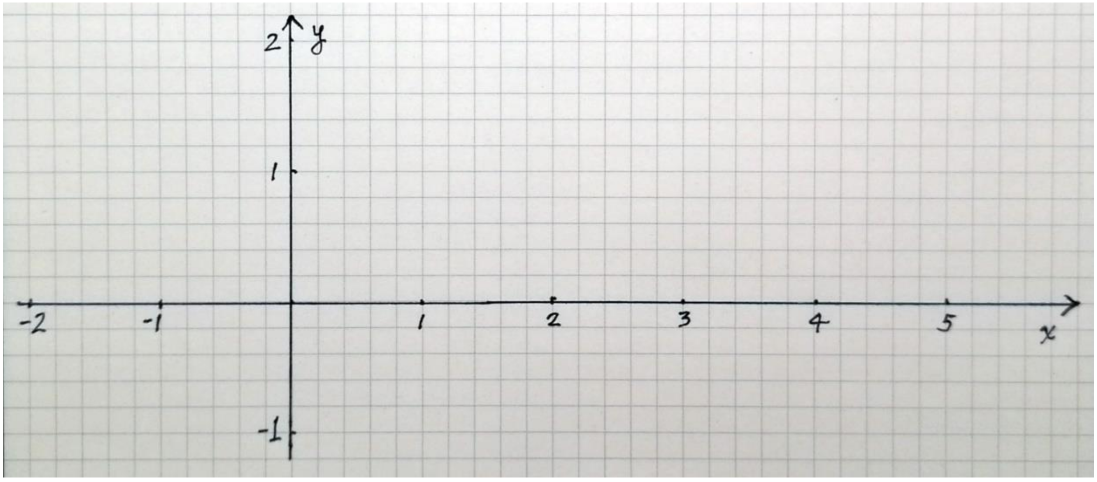

[4] $\Delta$ 是對應於 D 的希臘大寫字母，讀作 Delta。而 D 是 Discriminant（判別式）的首字母。

## 作業 3

班級座號＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 完成隨堂練習 3 的方程式圖形。如果有同學可以合作，建議分配大家計算 $y$ 的二分點與四分點所對應的 $x$ 解：代入 $y=-0.5$、$0.5$、$1.5$，然後代入 $y=-0.75$、$-0.25$、$0.25$、$0.75$、$1.25$、$1.75$。將對應的 $x$ 約至二位小數。如果人手夠多，讓每個 $y$ 被兩個人算過，比對彼此的解，當作驗算。在方格紙上，塗繪前述 18 個點之後，可否猜想方程式圖形的模樣？如果還不確定，在不確定的範圍內代入 $y$ 的八分點，以便求得更細緻的圖形。到了能夠確定的程度之後，就把圖形畫出來。

   這份作業希望同學們確實理解：方程式圖形是無窮多點聚集而成的。




2. 大家都能立刻畫出方程式

$$x^2+y^2=1$$

的圖形。讓我們只調整一個數，請在右側方格紙的坐標範圍內，描繪方程式

$$x^3+y^2=1$$

的圖形吧。請忍耐一下，不要用電腦軟體，這樣才能體會「方程式圖形」的意義，順便體會計算機是學習數學的一個多麼方便的工具。