

## 3 方程式圖形〔教學說明〕

### 教學目標

了解（二元）方程式的圖形是什麼意思？連帶涉獵中國古算與西方哲學的常識。

#### 知

方程式圖形是由無窮多個點聚集而成的。在（二元）方程式裡， $x$  和  $y$  都可以擔任自變數的角色。

#### 行

能在坐標平面上描繪方程式圖形。

#### 識

代數符號  $x$  在「方程」和「方程式」中的角色與意義是不同的。方程是各民族古文明的固有知識，方程式卻是西歐獨步於世界的新發明。「方程式的圖形」是一個偉大的發明，是經過「詮釋」而做的連結：將「滿足」方程式的兩個數對應為坐標平面上的一個點。

### 主要設計理念

1. 學生在國中階段的認知能力尚淺，數學概念也還薄弱，所以國中教師並未深入方程式圖形的意義，而僅能發展操作型的知識：讓學生能畫二元一次方程式的圖形，以及二次函數的圖形。到了高中一年級，前述兩項技能應該已經穩固，此時再跟學生說那兩種圖形的原理，難以抓住學生的好奇心與注意力。而圓方程式又太符合直觀，也無法凸顯方程式圖形的意涵。幸好高一引進變數的三次方，本文藉著三次方而讓學生面臨挑戰，進而體驗方程式圖形的真實意義。
2. 作者實踐 HPM 的理念，主張數學史（乃至於文明史、文化史）不該成為數學課「額外」的學習材料，而本該融入數學的學習脈絡之中；因為數學本來就是文化／文明的有機成分，數學概念的演化，本來就與文化／文明的演進同步。因此，本文將笛卡兒與《九章》的相關故事直接寫在課文裡。希望學生有感的是：西歐科技文明之超越全世界，就是從坐標幾何開始的。而這份數學／科技的發明，卻是從「理性」這個哲學想法延伸而來的。從人類文明史的通識角度來看，這是最關鍵的一個概念。
3. 數學作為一種語言，它與自然語言的轉化也是數學素養教育的重要目標。因此，本文特別關注從華語文化中產生的「方程」與「方程式」，對應英文的說法。
4. 108 課綱強調使用工具，並且強調不限於科技工具（計算機或電腦），很基本的「方格紙」、「直尺」也都是學習的必備工具。本文完全實踐前述理念，而作者認為這是「素養導向」的教學實踐。

### 教學備忘

1. 如前述，到了高中再回頭解釋國中生熟悉的二元一次方程式圖形、二次函數圖形，難以引起學習動機。所以，本文採取的策略是承認它們的存在，也承認國中教師告訴學生的繪圖策略，

僅以兩段文字簡略複習過去；圓方程式雖然不是國中數學的複習，但是大多數學生應該熟悉它，或者將在「正課」學到它，所以本文也不予深究。

2. 《別冊》向來鼓勵學生使用科技工具，但是在此課範圍內，請盡量忍耐，不要使用直接繪圖的電腦軟體。作者深信，就像小學生不宜過早使用計算機一樣，手腦並用的操作經驗，是學習數學（或任何知能）的必經之路。所以，學生在此課「必須」經歷描點繪圖的過程。稍後，我們將正式介紹繪圖軟體給學生，但「時而言」真的很重要，請勿躁進。
3. 並不是只有「函數」才有「自變數」，在方程式裡，也可以選擇「自變數」。
4. 請注意作者刻意避免說「方程式的解」，而說「滿足方程式的點」。在概念上，「方程」才有解，而「解」是能夠對應具體問題的數值。當數學老師說「方程式有無窮多組解」時，已經將「解」的概念抽象化／一般化了。作者認為學生此時尚無此抽象認知，而且也還沒必要發展出這種層次的抽象認知，所以在課文中使用較為具體的語言。

### 教學素養

我們都能快速畫出直線、拋物線、圓的方程式圖形，那是因為我們都知道答案。可是，教師知道答案，卻剝奪學生探索的機會，其實也剝奪了學生可能有的好奇心；更嚴重的是，剝奪了學生該經歷的成長過程。在國中階段，可能無法做太多改善，但我們寄望高中教師能夠還給學生「方程式圖形」的形成經驗。本課提出兩種涉及三次的方程式，大家都跟它們不熟，所以大家都有機會「回歸基本」，回到「方程式圖形」的最根本意義，去描點繪圖。

並不是只有函數才有自變數，（二元）方程式也可以設定自變數、應變數。事實上，方程式的另一個英文名稱是「隱函數」（**implicit function**），它的確是一種函數，它們的一般性符號是  $f(x, y) = 0$ 。例如圓方程式  $x^2 + y^2 = 1$  的隱函數表達式就是  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 。

坐標幾何是西歐科技文明的濫觴，從坐標幾何孵育而出的新數學，就是「微積分」。微積分使得西歐的數學能力，首度真正超越古希臘與中世紀以來的伊斯蘭文明，當然也一舉超越了中國和印度。微積分在近代西方科技文明中無可取代的地位，實在是不必多說，事實上想要說也說不盡（但是我們不該用「罄竹難書」這個成語）。然而，微積分的源頭，就是坐標幾何。《別冊》的寫作目標，就是想要說清楚這個故事，並且讓高中生可以搭配著「正課」，以緩升的坡度來慢慢吸收、內化微積分。作者希望這樣的讀本，能夠幫助高中數學課程更有活力，也能引導更多學生走上「有通識素養的」數理科學與技術生涯。