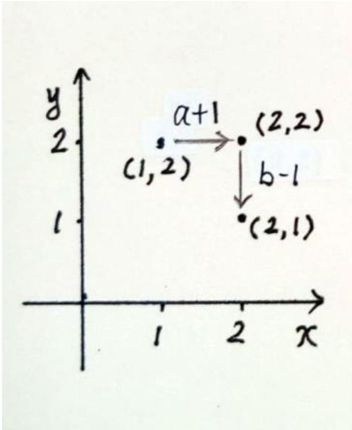
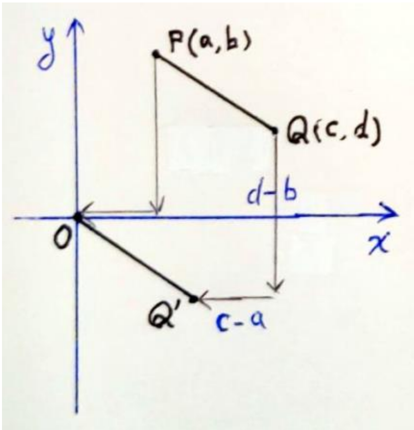
5 坐標算法二（平移與面積）



同學們此時已經知道函數圖形（例如二次函數 $y=2x^2$ ）在坐標平面上的平移。但是可能卻沒正式學過更基本的：點的平移。在平面上，只要做上下、左右的平移，就能達成任何「斜向」平移的效果；所以，我們只要討論上下、左右平移就夠了。將一點 $P(a,b)$ 的 x 坐標 $+1$ 就會將它向右移動 1 單位，而 -1 就會向左移動 1 單位；同理，將 y 坐標 $+1$ 就會將它向上移動 1 單位，而 -1 就會向下移動 1 單位。如右圖的示範。

平面圖形的平移

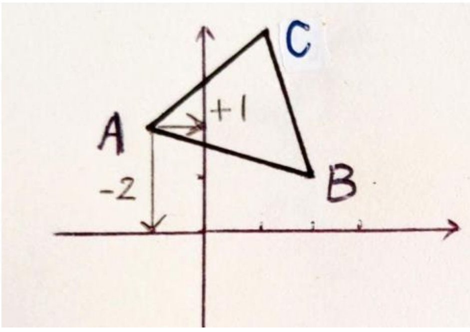


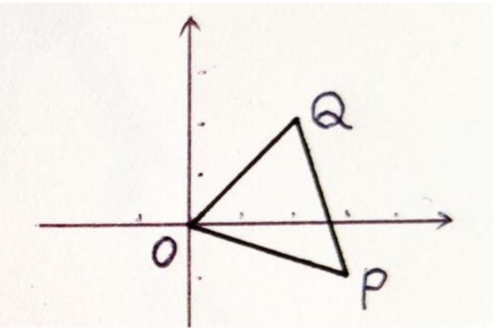
可是，所謂平移（translate）並不是指一個點的移動，而是指整個圖形的移動，而且只改變它的位置，不改變圖形的相對關係：不縮放、不旋轉、不翻轉（鏡射）。

最基本的平面圖形就是線段了。若以 $P(a,b)$ 、$Q(c,d)$ 兩點作一線段 PQ，將端點 P 移動到原點 O，只要將 x 坐標減 a 且 y 坐標減 b 就行了。若要平移整個線段 PQ，則另一端點 Q 也要作同樣的移動。所以，取 $Q'(c-a,d-b)$，線段 OQ' 就是線段 PQ 的平移。參照右圖，觀察線段 PQ 和線段 OQ' 不僅長度相同，就連「傾斜」程度都一樣。

對於坐標平面上的三角形 ABC，若已知三個頂點坐標 $A(x_1,y_1)$ 、$B(x_2,y_2)$ 、$C(x_3,y_3)$，則我們總是可以把其中一個頂點移到原點 O，讓其他兩個頂點跟著平移。假如另外兩個頂點平移到 P、Q，則 ΔABC 全等於 ΔOPQ，記作 $\Delta ABC\equiv\Delta OPQ$。在數學文件裡，經常用「$\equiv$」表達全等或等價關係。

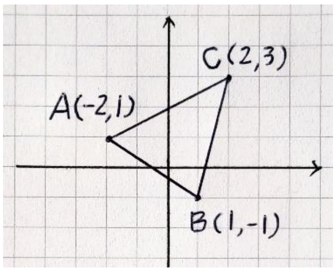
舉例而言，若三角形 ABC 的頂點為 $A(-1,2)$、$B(2,1)$、$C(1,4)$，如以下左圖。若要將頂點 A 移到原點，則需將 x 坐標加 1，y 坐標減 2。因此，若要頂點 B、C 跟著平移到 P、Q，並且維持 $\Delta ABC\equiv\Delta OPQ$，則它們也要同樣做 x 坐標加 1、y 坐標減 2，因此 P 點坐標是 $(2+1,1-2)$ 也就是 $P(3,-1)$，而 Q 點坐標是 $(1+1,4-2)$ 也就是。ΔOPQ 如以下右圖，應可觀察 ΔABC 與 ΔOPQ 全等；若想要證明，建議使用 SSS 全等條件。



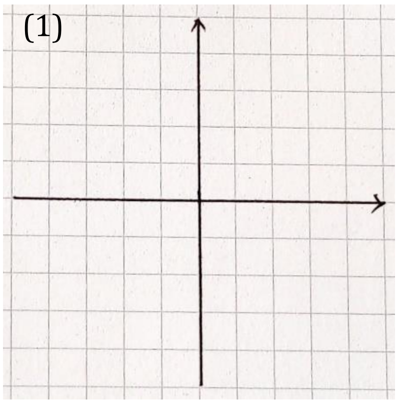


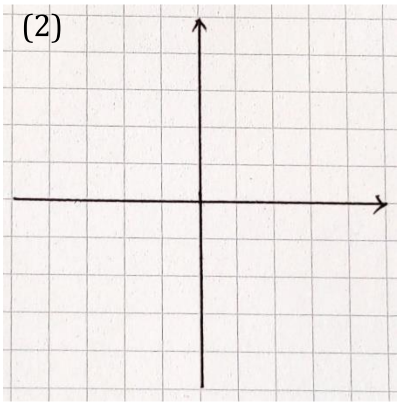
如果要將一般 ΔABC 的其中一個頂點移到原點，顯然把 A 或 B 或 C 其中任何之一移動到原點都可以，而另外兩個頂點就要跟著一起平移。如以下練習所示。

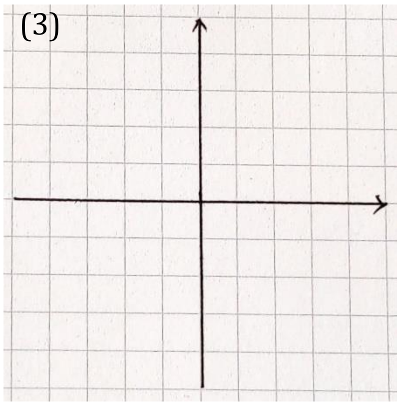
[隨堂練習 1]



三角形 ABC 如右圖。在以下三幅坐標圖片上，分別畫出將點 $A(-2,1)$、點 $B(1,-1)$、點 $C(2,3)$ 移到原點 O，另兩個頂點跟著平移到點 P、Q 所成的三角形 OPQ，並標示點 P 與點 Q 的坐標。







一般而言，若將三角形 ABC 的頂點 $A(x_1,y_1)$ 移到原點，而頂點 B、C 跟著平移到 $P(a,b)$、$Q(c,d)$，則

$$\begin{cases} a=x_2-x_1 \\ b=y_2-y_1 \end{cases} \text{、} \begin{cases} c=x_3-x_1 \\ d=y_3-y_1 \end{cases}$$

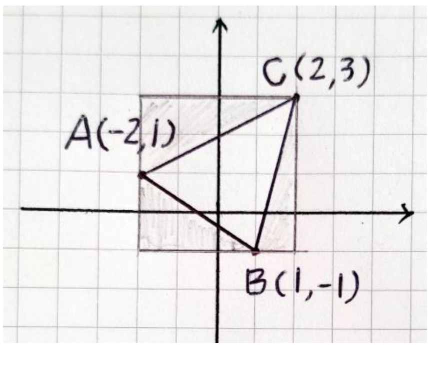
同學們當然知道：不要「背誦」以上公式，只要了解「平移」原理，執行上述程序就可以了。但是，為了讓同學練習一下代數操作，還是請做以下習題。

[隨堂練習 2]

設三角形 ABC 三個頂點坐標為 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，若將頂點 B 移到原點 O，而頂點 A 和 C 跟著平移到點 $P(a,b)$ 和 $Q(c,d)$，則 $\Delta ABC \equiv \Delta OPQ$。試寫出 a、b、c、d 與 x_i、y_i 的關係，其中 $i=1,2,3$。

三角形面積：拼貼法

在坐標平面上，如果知道一點 $P(a,b)$ 的坐標，相當於已經知道由 P 朝 x 軸、y 軸做垂線所得的垂足在哪裡？也就知道 P 到 x 軸、y 軸的距離是多遠？這些訊息可謂相當「豐富」，理應可以用來發展一些算法。例如，在國中時已經知道，若已知坐標平面上兩點的坐標，則可以根據畢氏定理算出線段長。



舉例而言，再看隨堂練習 1 的三角形 ABC，其中 A、B 兩點的水平距離是 3，鉛直距離是 2，所以 AB 線段長是

$$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\approx 3.6 \text{ 單位長}$$

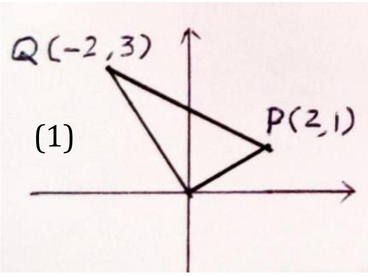
更厲害的是，我們可以根據頂點坐標計算 ΔABC 的面積。從圖形觀察：ΔABC 有一個「外接長方形」（它恰好是邊長為 4

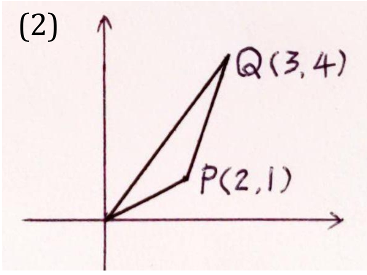
單位的正方形），長方形的面積是 16 平方單位，扣掉三個直角三角形的面積（分別是 4、3、2 平方單位），得知ΔABC 的面積是 7 平方單位。

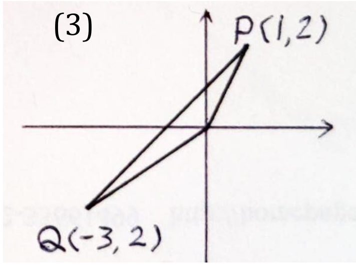
根據三角形的特徵，我們可以「見招拆招」，不見得要找外接長方形，也可能從一個梯形或直角三角形，扣除一些直角三角形或梯形之後，獲得三角形的面積。

[隨堂練習 3]

以下三幅圖中，各有一個三角形 OPQ，其中頂點 O 為原點（不標示）。試計算各 ΔOPQ 的面積







前面的算法雖然有效，但好像總得根據三角形頂點的相對位置「見招拆招」，有沒有更為「一致」的作法，甚至有沒有辦法創造「公式」呢？雖然數學老師經常勸誡學生不要「背公式」，但是數學的「威力」老實講就在於公式。數學老師希望學生們不要「背」公式而要「了解」，說穿了其實是因為「了解」之後就能自然而然地記得，不必費力「強記」與「追憶」也能即時想起來。所以，數學還是希望找到公式。

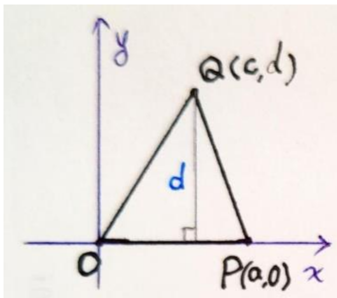
如果想要找到公式，就要具有一般性，所以要「代數化」——不能使用已知的數值坐標，必須處理以符號表示的任意坐標。以下就介紹一種獲得公式的方法。

三角形面積：平行線法

本節要講的三角形面積坐標算法公式，是在笛卡兒「發明」坐標幾何之初，立刻就被「發現」的基本算法之一，也因此而誕生了一種新的代數「式」。

整理這套思路，第一步是想：既然所有三角形都可以跟著其中一個頂點平移到原點，而平移前後的三角形面積不變，所以「不失一般性」（without loss of generality）地，我們可以只討論某一頂點在原點的三角形 OPQ。

因為我們經常要寫「三角形 OPQ 的面積」，所以想要節省一點墨水，用符號 $|\Delta OPQ|$ 代表「三角形 OPQ 的面積」。



第二步，假如 P、Q 兩點之一在 x 軸或 y 軸上，那就簡單了。例如，參照右圖，假如三角形的一個頂點是原點 $O(0,0)$、另一個頂點 $P(a,0)$ 在 x 軸上，則顯然第三個頂點 $Q(c,d)$ 到底邊 OP 的高就是 Q 到 x 軸的距離 $|d|$，而底邊長為 $|a|$，所以三角形 OPQ 的面積公式是

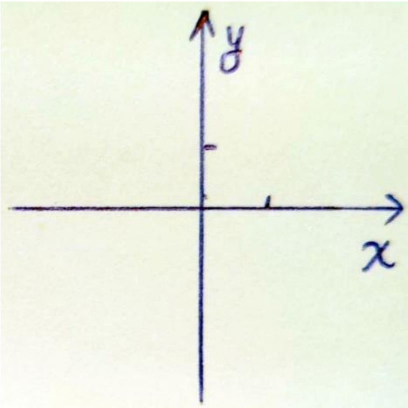
$$|\Delta OPQ| = \frac{1}{2}|ad|$$

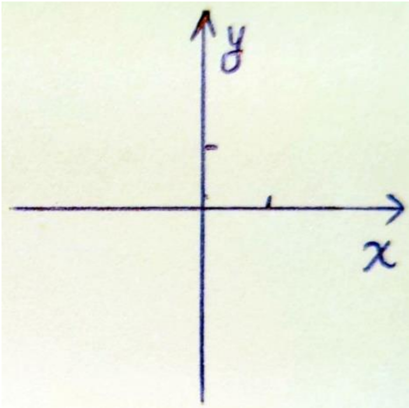
請注意，雖然右圖以 P 點在 x 軸正側，Q 點在上半平面為例。但因為 a 和 d 皆為符號——這種用途的符號稱為參數（parameters）——我們只要求 $a \neq 0$ 與 $d \neq 0$（否則 OPQ 不成為三角形）所以 a 和 d 都可能是正數或負數，因此在寫公式的時候，應該冠以絕對值。

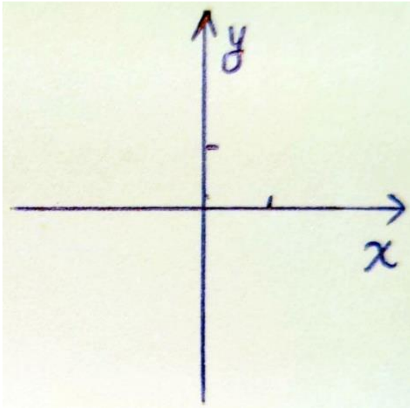
[隨堂練習 4]

以下各題，先在所附的坐標平面上畫出 ΔOPQ，然後計算 $|\Delta OPQ|$。注意：每幅坐標都規定了單位長，O 表示坐標原點。

(1) $P(2,0)$, $Q(0,-2)$　　(2) $P(-2,0)$, $Q(2,1)$　　(3) $P(-2,1)$, $Q(0,-1)$

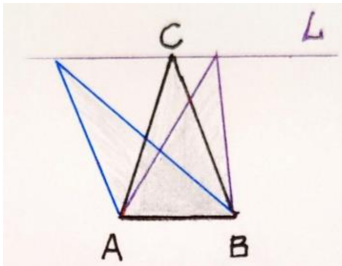






俗話說的好，「哪有天天過年的？」。坐標平面上的 ΔOPQ，哪會總是恰好有一個頂點 P 或 Q 落在坐標軸上？這就是關鍵的第三步了。第三步的關鍵是引用一項平面幾何的基本原理：

三角形某一頂點平行於對邊移動時，面積不變。



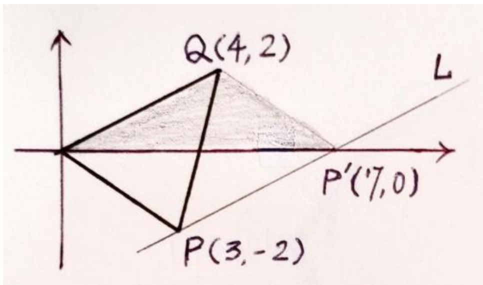
以上那句話的意思是（參閱右圖）：過三角形 ABC 之頂點 C 做平行於對邊 AB 的直線 L，則不論 C 移動到 L 上的哪一點，三角形 ABC 的面積都一樣。原因是 BC 邊上的高就是直線 AB 與直線 L 的平行線距離，而那個距離是固定的。所以，既然底不變、高也不變，則當然面積不變。

根據以上原理，如果 ΔOPQ 的頂點 P 和 Q 都不在軸上，我們只要過 P 點作平行於 OQ 的直線 L，求 L 與 x 軸的交點 $P'(a',0)$。則

$$|\Delta OPQ| = |\Delta OP'Q| = \frac{1}{2}|a'd|$$

像上面「分解問題」的系統性思維方法，倒也不是數學的專利，在自然科學、管理科學、計算機科學也都很常見。

我們先用隨堂練習 1 第 (1) 小題的 ΔOPQ 做一次具體數字的示範（已知其面積是 7），下一篇再用參數推導一般性的公式。



參照右圖，欲求 $|\Delta OPQ|$。令 L 是通過點 P 且平行於 $\overleftrightarrow{OQ}$ 的直線，P' 是 L 與 x 軸的交點。$\overleftrightarrow{OQ}$ 方程式為 $2x-4y=0$，推知 L 方程式為 $2x-4y=14$，代入 $y=0$ 解得 $x=7$，故 L 的 x 截距為 $a'=7$。因此

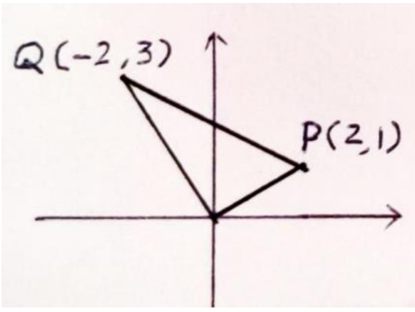
$$|\Delta OPQ| = |\Delta OP'Q| = \frac{1}{2}|a'd| = \frac{1}{2}(7\times 2) = 7 \text{。}$$

作業 5

班級座號__________________ 姓名__________________

1. 試求點 $P(2,1)$ 繞點 $Q(1,3)$ 逆時鐘旋轉 90 度的坐標。〔建議的程序如下：
   (1) 將線段 QP 平移到 OP'，其中 O 表示原點，把 Q 點移到 O 點，P 跟著平移到 P'。
   (2) 令 P' 繞原點逆時鐘旋轉旋轉 90 度是 P''，算出 P'' 的坐標。[1]
   (3) 將線段 OP'' 的端點 O 移回去 Q，則 P'' 平移後的坐標即為 P 繞 Q 旋轉 90 度的坐標。〕
2. 以下三幅圖是隨堂練習 3 的三個 ΔOPQ，試以「平行線法」計算分別的 $|\Delta OPQ|$，跟隨堂練習 3 用拼貼法所得的面積對答案。

(1)



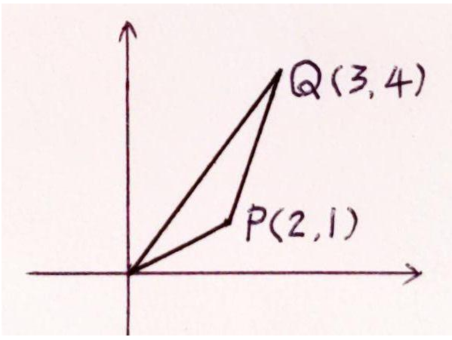
$\overleftrightarrow{OQ}$ 方程式：

L 方程式：

$a' =$

$|\Delta OPQ| =$

(2)



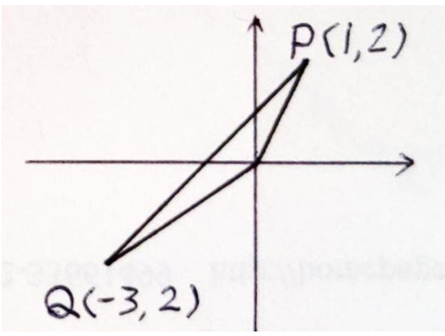
$\overleftrightarrow{OQ}$ 方程式：

L 方程式：

$a' =$

$|\Delta OPQ| =$

(3)



$\overleftrightarrow{OQ}$ 方程式：

L 方程式：

$a' =$

$|\Delta OPQ| =$

---

[1] P'' 讀作 P double prime。