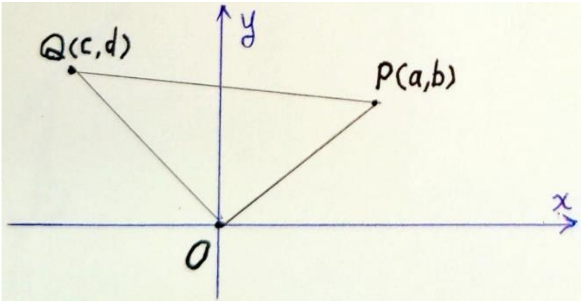
6 行列式

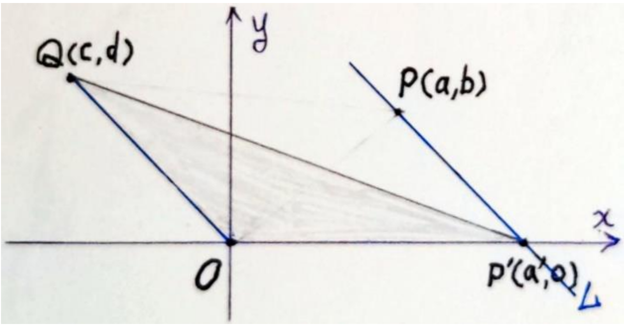
前一課計算三角形面積的「平行線法」可以發展出公式。意思是：給定 $P(a,b)$ 與 $Q(c,d)$ 兩點，其中 O 為原點，我們可導出計算 $|\Delta OPQ|$ 的公式。因為任意位置的三角形，都可以將其中一個頂點平移到原點，所以這條公式並無侷限，它可以用來計算坐標平面上已知三頂點坐標的任意三角形面積。雖然前一課介紹的「拼貼法」也可以算出任意三角形的面積，但「平行線法」提供較有系統的數學思維示範，同學們在此有機會觀察平面幾何、直線方程式的應用。

頂點在原點的三角形面積



我們先討論點 Q 不在 x 軸上的「非退化」情況：也就是 O, P, Q 確實形成一個三角形。右圖示範 ΔOPQ 的一種特別配置：點 Q 在上半平面，點 P 在 OQ 直線的右半平面；我們想要計算三角形 OPQ 的面積，也就是希望用 a, b, c, d 四個參數表示 $|\Delta OPQ|$。

從前一課的平行線原理，我們可以將 ΔOPQ 的頂點 P 平行於 OQ 移動到 x 軸，而保持面積不變。我們已經知道，當三角形有一頂點在 x 軸上時，面積是很容易算的。參閱下圖示例，令 L 是平行於 OQ 的直線，因為 L 不是水平線，所以必然交 x 軸於 $P'(a',0)$。因為 $|\Delta OPQ|=|\Delta OP'Q|=\frac{1}{2}|a'd|$，我們只要算出 a' 即可。



同學們可以用直線 L 的方程式求得 a'，作法如下。首先，通過 $O(0,0)$，$Q(c,d)$ 兩點的直線方程式為 $dx-cy=0$。平行於 OQ 的直線方程式皆為 $dx-cy=k$ 之形式，而 L 通過點 $P(a,b)$，所以代入 $x=a$, $y=b$ 得到 $k=da-cb$，整理 L 的方程式為 $dx-cy=ad-bc$。將 $y=0$ 代入 L 方程式之後，解得 L 的 x 截距為

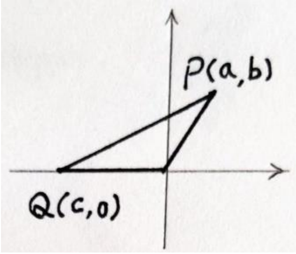
$$a'=\frac{ad-bc}{d}\ 。$$

注意點 P 只要不在 OQ 直線上即可，它不一定要在 OQ 直線的右半平面，也可以在左半平面，算出來的 a' 都是以上形式。如果點 P 在 OQ 直線的右半平面，則 $a'>0$；如果點 P 在 OQ 直線的左半平面，則 $a'<0$。不論如何，$\Delta OP'Q$ 的底邊長是 $|a'|$ 而高是 $|d|$，因此

> 同學可能會根據 OQ 直線的斜率 $\frac{d}{c}$ 且通過原點 $O(0,0)$，得到它的點斜式 $y=\frac{d}{c}x$，再推論直線 OQ 的方程式為 $dx-cy=0$。這樣做的缺點是：必須假設 $c\neq 0$，也就是必須排除點 Q 在 y 軸上的可能。不妨直接想：方程式 $dx-cy=0$ 的圖形是直線，而且它通過 $(0,0)$ 和 (c,d) 兩點，所以它就是 OQ 直線的方程式。

$$\left|\Delta OPQ\right|=\left|\Delta OP'Q\right|=\frac{1}{2}\left|a'd\right|=\frac{1}{2}\left|ad-bc\right| \text{。}$$

請注意，只要點 Q 不在 x 軸上，以上的推導都是正確的。目前，我們的公式$\left|\Delta OPQ\right|=\frac{1}{2}\left|ad-bc\right|$ 僅排除了 Q 在 x 軸上，或者 O, P, Q 三點重疊或共線（不成為三角形的頂點）的情況。以下我們分別討論這兩種情況。



首先，假如點 Q 在 x 軸上，而 O, P, Q 三點可形成三角形，則點 P 一定不在 x 軸上，如右圖所示。這時候ΔOPQ 的底邊長是 $|c|$ 而高是 $|b|$，所以 $\left|\Delta OPQ\right|=\frac{1}{2}\left|bc\right|$；但因為此時 $d=0$，所以我們的公式 $\left|\Delta OPQ\right|=\frac{1}{2}\left|ad-bc\right|$ 還是對的。

至於「退化」情況，也就是 O, P, Q 三點不能形成三角形時，我們可以規定 $\left|\Delta OPQ\right|=0$。在此前提之下，如果 O, P, Q 有所重疊，亦即 $P(a,b)=O(0,0)$ 或 $Q(c,d)=O(0,0)$ 或 $P(a,b)=Q(c,d)$，都很容易檢查 $ad-bc=0$，所以我們的公式正確。最後，如果 O, P, Q 三點共線，這表示點 P 落在 OQ 直線上，所以 $x=a,\ y=b$ 滿足直線 OQ 的方程式 $dx-cy=0$，也就是 $ad-bc=0$。我們的公式也對。

現在我們已經確認了所有情況，可以放心做成以下結論，不必擔心任何特殊狀況。

[定理] 三角形面積的坐標算法

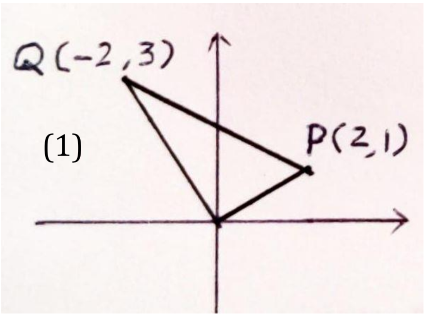
坐標平面上原點 O 與兩點$P(a,b)$ 、$Q(c,d)$ 決定的三角形面積為

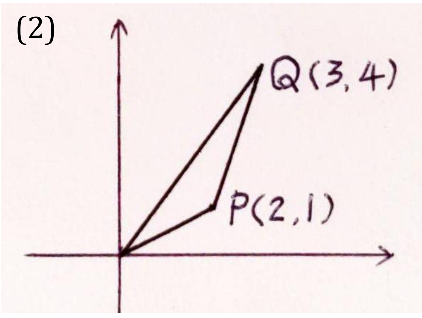
$$\left|\Delta OPQ\right|=\frac{1}{2}\left|ad-bc\right| \text{。}$$

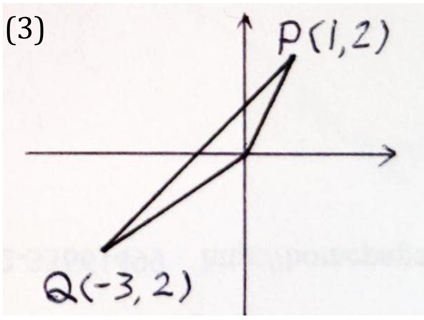
所謂「定理」就是在前提條件之下一定正確的結論。有些定理提供了計算的公式，例如前面那個定理。但是定理並不一定提供公式，例如「兩個奇數相加，結果為偶數」可謂定理，但是它並沒有提供計算的公式。

[隨堂練習 1]

請用上述結論，計算作業 5 第 2 題的三個三角形面積，並與作業 5 比對答案：





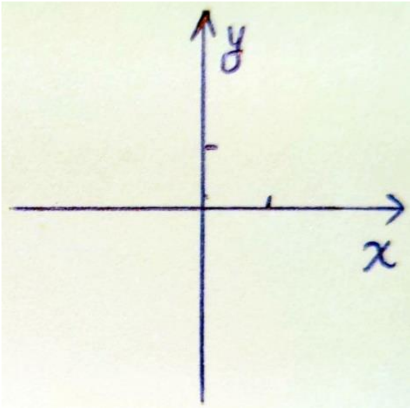


對於一般位置三角形，只要把其中一個頂點移到原點，整個三角形跟著平移成 ΔOPQ，然後再代公式就可以了。

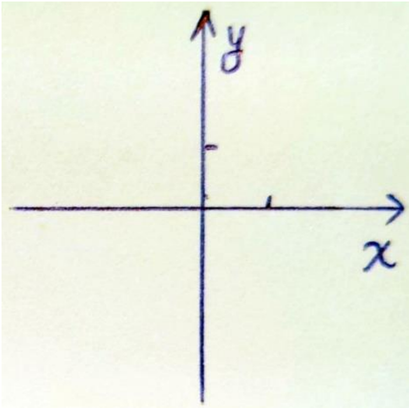
[隨堂練習 2]

以下各題指定了 A, B, C 三點的坐標，請在指定的坐標平面上畫出 ΔABC，並計算它們的面積。〔不一定要將頂點 A 移到原點，將任何一個頂點移到原點都可以，只是另外兩個頂點要跟著平移。〕

(1) $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(0,-1)$



(2) $A(-2,0)$, $B(0,1)$, $C(1,-1)$



行列式

三角形面積的坐標算法是坐標幾何誕生之初就被發現的公式，這個公式也促成了一個新的代數物件，稱為「行列式」。行列式後來成為非常有用的數學小工具，不妨現在就介紹給同學。

在數學語言中，橫排的叫做「列」（row）、直排的叫做「行」（column）。前面發展的算法，可以先將各點坐標寫成「行」，例如 P 的坐標寫成 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$、$Q$ 的坐標寫成 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$，再將 P、Q 兩行坐標合併成「列」，形如 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$。因為它是將平面上的點坐標「先寫成行，再合併成列」，所以稱為「行列式」。

[定義] 行列式

坐標平面上兩點 $P(a,b)$、$Q(c,d)$ 的行列式符號與算法如下：

$$[P,Q]=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}=ad-bc$$

行列式的絕對值應該寫成 $|[P,Q]|$，但是為了美觀，簡化成：

$$|P,Q|=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=|ad-bc|$$

同學們將來可能會常用行列式，用慣之後就不容易忘記了。初學的時候，建議大家一個口訣：「交叉相減」。也就是把 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 先交叉相乘為 ad 和 bc，然後相減：$ad-bc$。

[隨堂練習 3]

請計算以下行列式。（勿取絕對值。）

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

[隨堂練習 4]

試將以下各題的兩點坐標，先寫成行列式符號 $[P,Q]$，然後計算結果。（勿取絕對值。）

(2) $P(2,0)$, $Q(0,-2)$　　(2) $P(1,-2)$, $Q(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$　　(3) $P(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, $Q(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

有了新物件之後，讓我們再次整理結論，用行列式表述。

[定理] 三角形面積的行列式算法

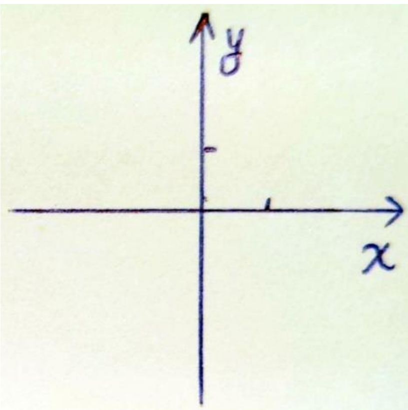
坐標平面上原點 O 與兩點 $P(a,b)$ 、$Q(c,d)$ 決定的三角形面積為

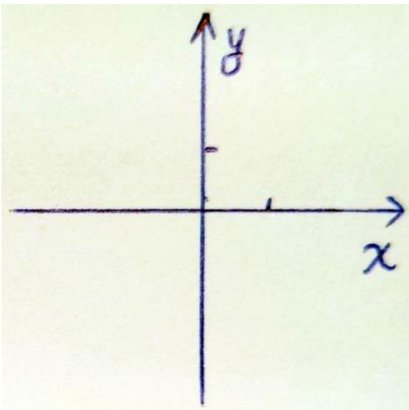
$$|\Delta OPQ| = \frac{1}{2}|P,Q| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

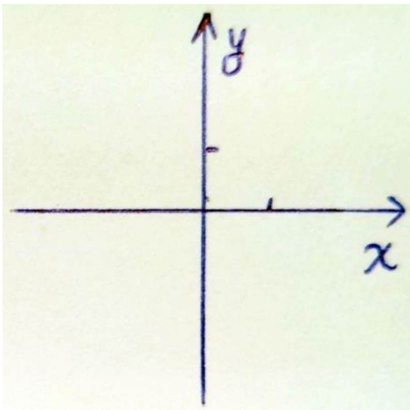
[隨堂練習 5]

以下各題，請畫出三角形 OPQ，寫出行列式絕對值的算式，計算它的面積。

(1) $P(2,1)$, $Q(1,2)$　　(2) $P(-2,2)$, $Q(2,1)$　　(3) $P(-2,-2)$, $Q(1,2.5)$



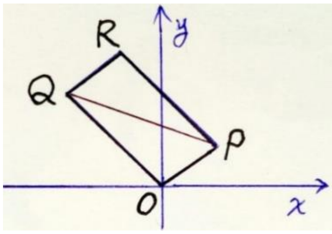




作業 6

班級座號＿＿＿＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. **平行四邊形面積**。以右圖為例，在坐標平面上給定兩點 P、Q，則以 O、P、Q 為其中三個頂點，以 OP、OQ 為其中兩邊的平行四邊形 $OPRQ$ 稱為「由 O、P、Q 決定的平行四邊形」。其中 O 為坐標原點。

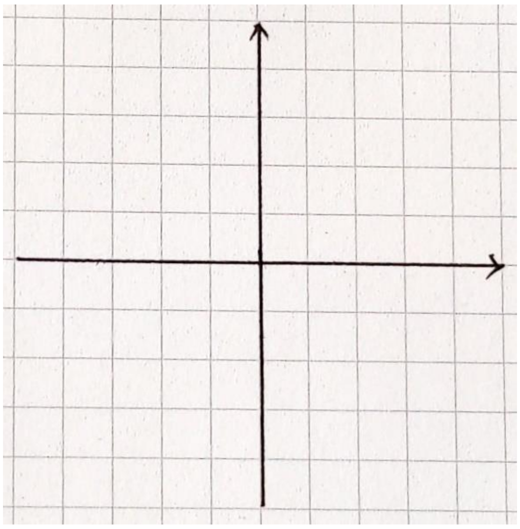


　　因為 ΔOPQ 和 ΔRQP 彼此全等，所以平行四邊形 $OPRQ$ 的面積是 $2|\Delta OPQ|=|P,Q|$。結論是：

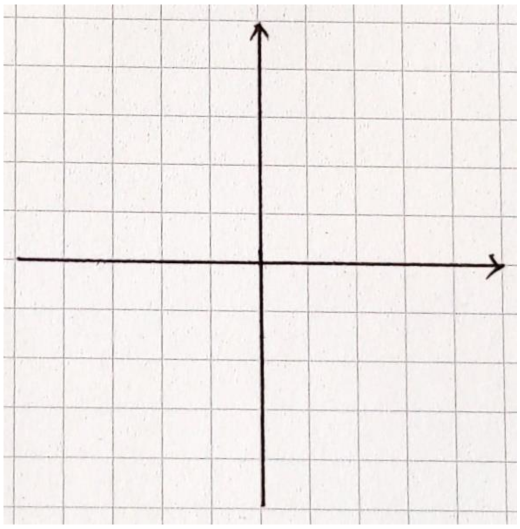
$$\text{由 } O(0,0)\text{、}P(a,b)\text{、}Q(c,d)\text{ 決定的平行四邊形面積 }=|P,Q|=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

請在以下各坐標平面上，畫出由 O, P, Q 決定的平行四邊形，並計算其面積。（兩格當作一單位。）

(a) $P(1,1)$, $Q(-2,1)$



(b) $P(2,1)$, $Q(-1,-2)$



2. 令 $A(-1,1)$, $B(2,-1)$, $C(1,-2)$, $D(-2,0)$，請畫出四邊形 $ABCD$，確認它是平行四邊形。然後用**行列式**計算它的面積。（兩格當作一單位。）