6 行列式〔教學說明〕

教學目標

應用直線方程式與平面幾何，發展直角坐標上的三角形面積算法，並藉此介紹行列式。

知

知道坐標平面上兩點的行列式，其絕對值為平行四邊形面積，其半為三角形面積。一般平行四邊形或三角形皆可將其中一個頂點平移到原點。

行

能計算行列式，能做三角形的平移，能計算給定三頂點坐標的三角形面積。

識

知道坐標平面上的點坐標，相當於已經知道許多資訊，應當可以利用那些資訊來解決問題。行列式是隨著坐標幾何而誕生的代數物件，將成為很重要的小工具。

主要設計理念

1. 「二階行列式」是在笛卡兒剛發明坐標幾何之後不久就知道的算法（雖然那時候還沒有寫成行列式），它成為 17 世紀許多知識分子的基本工具，我們的課程把它推遲到向量主題才學習，錯失了一個認識「坐標威力」的大好機會，而且也使得向量的學習缺乏前置經驗。事實上，平面坐標的各種算法，就是在醞釀空間向量的概念。作者認為「正課」之中，坐標幾何發展不足，向量幾何卻發展得過多、過快，《別冊》的使命之一，是企圖緩解這個現象。
2. 「平移」之後再用行列式，其效果就像平面向量。但此時我們讓學生體會的是「坐標」的威力，並不需要引進向量觀念。事實上，先把三角形、平行四邊形平移到原點，然後使用行列式的算法，就是向量思維的前置經驗。這是十七、十八世紀數學家的經驗，然後才造就了十九世紀的向量觀念。此處的寫法，基本上依循數學概念的發展史。
3. 這一課示範了一種縝密性的數學思維特徵：發現了新公式之後，關心它是否跟過去已知的知識相容？也關心它是否能夠處理「極端狀況」或「退化」狀況？思維的縝密性，在電腦程式設計也很需要；但不只是程式設計者需要它，縝密性是所有人都需要的「素質」。數學提供特別多縝密性的學習機會。

教學備忘

1. 這一課用到「過點 $P(a,b)$ 平行於直線 OQ 的直線方程式」，雖然課文中推導了，但並未從最基本說起，所以假設學生在「正課」已經習得這項技術。
2. 有些學生可能會從點斜式來推論直線方程式，但這樣做的前提是有斜率（排除鉛直線），所以較不理想。作者利用「文字框」解釋了直線方程式的作法，老師們看得出來那就是「法向式」或「兩點式」。因為現在還沒有向量，也沒有法向量觀念，所以不要提及法向量，只要在代數上了解：

   (1) 通過原點的直線方程式為 $\square x+\square y=0$，

   (2) 如果又通過點 (a,b)，則 $\square\cdot a+\square\cdot b=0$，它的一組特殊解是 $(b)\cdot a+(-a)\cdot b=0$，

所以通過 O、 $P(a,b)$ 兩點的直線方程式為 $bx-ay=0$ 。

3. 教師同仁一定看得出來，這一課講的「就像」平面向量。確實如此，但是如課文所述，這些知識在 17 世紀中期（在牛頓和萊布尼茲出場之前）就已經發展出來了。請教師不要在這一課引進向量，讓學生有機會從「樸素」的平面坐標，連結平面幾何，逐步體會坐標的妙用。
4. 請不要將 $|\Delta OPQ|$ 讀作「絕對值…」，應讀作「三角形 OPQ 的面積」。
5. 本課的隨堂練習一再要求同學畫圖，請務必請同學照做，養成畫圖的習慣，肯定是一個受用無窮的好習慣。
6. 學生若自行發現行列式的逆交換律，當然很好，但是若沒發現也不必提醒。此時，講逆交換性質的時機未到。「時而言」真的很重要，請勿躁進。
7. 教師們知道行列式之所以算出「有號面積」是因為從線段 OP 旋轉到線段 OQ 的方向性。在旋轉角為劣角（小於 180 度的角）的前提下，逆時鐘方向旋轉則行列式為正、順時鐘為負。可是，講方向角的時機未到，作者做過的教學實驗顯示，此時使用絕對值就好了。行列式的正負性將來反而可以成為旋轉角之方向性的動機之一。

教學素養

課文裡特別指出：若 O、P、Q 三點共線，則行列式 $[P,Q]=0$。事實上，行列式的英文是「決定算子」的意思（determinant）：它就是「決定」O、P、Q 三點是否共線的算法。把它翻譯成「行列式」實在是神來之筆，既不是音譯也不是意譯，而是「形譯」。太美妙了。

回想一下平面幾何計算三角形的面積公式，就知道坐標幾何的行列式是多麼偉大的成就！在平面幾何，基本上就只有底乘以高這個定義而已；在平面幾何裡，三角形面積的最高成就是海龍公式，那個公式並不容易算。下一個成就便需要三角比，也就是面積的正弦公式；各種三角比的關係，可以用來決定某個頂角的正弦，然後計算面積。但是這些推論經常需要較高深的數學能力。可是，一旦有了坐標，居然有這麼簡單的公式：行列式的絕對值。

但是話說回來，「天下沒有白吃的午餐」。其實，要獲得三角形的三頂點坐標，本身就是很「高級」的動作，並不一定可以輕易做到。所以，基本定義、海龍公式和三角算法，都還是很實用的。

提早介紹「行列式」並非揠苗助長。二階行列式確實是在 17 世紀「坐標幾何」誕生之初就被發現的公式，只是還要再過一百多年才會寫成今天的模樣。將來要學的「矩陣」也是從行列式衍生而來的，所以行列式不但是一個有用的小工具，也是一些數學觀念的動機源頭（例如：角的方向性、有向角、逆交換律），值得早點介紹給學生。萊布尼茲發現了三階行列式求解三元一次聯立方程式的算法（其實就是後來的三階克拉瑪公式），但是他的這項發現只寫在私人通信裡，沒受到注意，所以並沒有發揮影響力。