

3 負數與乘法〔教學說明〕

教學目標

本篇藉正負（整）數乘法運算規則，引入一項重要的數學思維：推廣。

知

等式可以從兩個方向讀。 -1 乘以任何數等於其相反數，負數可「分解」成 -1 乘以其相反數（絕對值）。

行

正負混合的乘法計算，經處理負號後，轉換為兩正數相乘。

識

關於正數相乘的乘法性質，可以推廣到負數。正負混合相乘的關鍵公式是 $-a = (-1) \times a$ 。

主要設計理念

1. 在本文的脈絡中，可能「類比」或「類推」是比較適當的動詞，但是作者擔心 7 年級學生不動這些詞彙，所以改說「推廣」。還好「推廣」也是專業數學的常用說法。
2. 本文第一節大量引用「相反數」概念。作者假設學生此時已經掌握了「相反數」概念，不管學生的概念心像是「鏡射」還是「對稱」還是「旋轉」，都可以，我們不再增加新的解釋方法。
3. 可以連結前面說過的：「負」是性質符號，相對於「減」是運算符號，然後理解「負」是一元運算，「加減乘除」都是二元運算（搭配計算機更佳）。這樣一元運算比二元運算容易執行，就可提醒學生在化簡時，正負號的一元運算可先處理，然後再處理二元運算。
4. 本文刻意不使用「交換律」、「結合律」等專有名詞。學生知道可以那樣操作就好了。
5. 教師可做分類異號的加或減及同號的加或減，如： 8 ± 5 、 $8 \pm (-5)$ 、 $(-8) \pm 5$ 、 $(-8) \pm (-5)$ 。為配合「正課」進度，本冊不細說正負混合加減，改以一篇附錄提供統整的觀點。
6. 作者主張「正負混合除法」應併入「有理數運算」的學習，而這個主題的真正需求發生在「方程求解」的過程中。因此，作者在此不提除法，延後再說。

教學備忘

1. 少數學生在小學畢業時，自然數的加減運算尚未熟練。這時候是他們的第二次機會。對於這些學生，應該更紮實地從加／減在數線上的前進意義來重新理解加和減。對於需要補救的學生，不宜強加以複雜數據的計算，宜回歸基本原理，讓學生能心算 ± 20 以內的加減或 ± 100 以內的乘法即可。更複雜的狀況，原則上應讓學生學會使用科技工具（計算機），使得學生即便心算能力不足，至少還能用工具為自己增能。
2. 小學生習慣將「等號」理解成「從左到右的計算過程」，國中生必須能懂「等式」是雙向的。這才是「等式」的正確概念。這是剛進入國中的大多數學生感到不適的課題之一，請教師勿輕視建立此觀念的重要性。

3. 提醒學生，讓他們明白小學時候的「商...餘」算式僅為計算過程的紀錄，不是「等式」。這裡是一個伏筆，為稍後的有理數運算作準備。再往後，除式要改寫成「除法原理」，後者才是正確的「等式」。
4. 請勿使用「交換律」、「結合律」等專有名詞。有此溝通需求時，用一般口語的說法即可，例如說乘法可以調整順序。加法也可以，但是減法和除法不可以；若有必要，用實例示範一下即可。
5. 此時還沒有「平方」，請勿引入 $(-1) \times (-1) = (-1)^2$ 。

教學素養

很多人知道，數學的核心精神之一是「以簡馭繁」。我們不能直接這樣跟學生說，其實說了也沒用。教師應該要使學生潛移默化地感受此一精神。從技術面來看，此一精神是用「舊物件」來架構「新物件」，而新物件可「繼承」舊物件的大部分性質；從舊物件的觀點來看，相當於把它的性質「推廣」到新物件。此一思維精神，在西元 1960 年代被計算機領域吸收，成為「物件導向」程式語言的設計動機之一（Object-Oriented Programming Language, OOP）。用這種「設計」眼光來看，新物件與舊物件的差異，不是「新物件未繼承某性質」，就是「新物件多出了某性質」。舉例來說，從 Hilbert 空間拓展到 Banach 空間，後者就沒有繼承「垂直」概念，於是就不再有「內積」算法。從全數（零或正整數）拓展到整數，整數繼承了全數的所有性質，但整數新增了元素 -1 ，外加「小減大」可以算出答案的新性質，或者說「每個數都有加法反元素」的新性質。

換一個觀點來看「繼承」，就是數學的「舊版相容」原則（backward compatibility）。因為世界各地古往今來的數學家，不約而同地堅持這項信念（這樣做有其明顯的實用價值，所以數學家都會自然而然地這樣做），使得「數學」這門「企業」，將它的「產品」保持了三千年以上的舊版相容。於是可說：數學是全人類最負起「永續責任」的企業。

俗話說「凡有原則就有例外」，以上原則存有少許例外。作者尚未在國中階段發現不符合「舊版相容」原則的數學內容。在高中則至少有一個引起很多困擾的例子：在實數裡， $(-1)^{1/3} = -1$ ；但是拓展到複數之後， $(-1)^{1/3} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ 。我們無法「解決」這個麻煩，因為它本來就不相容。因此，在高中課程裡，為了「避開」這個麻煩，課程規定當指數 $x \notin \mathbb{Z}$ 時，只討論底數 $a > 0$ 的次方 a^x 。注意前述情況並不類似 $(-1)^{1/2}$ ：它在實數裡不存在，在複數裡等於單位虛數 i ；因為 i 是從實數拓展到複數「新增」的元素，而 $(-1)^{1/2} = i$ 則是從實數拓展到複數新增的性質，所以並非「不相容」的情況。但是，相對地，在實數裡 $(-1)^{1/3} = -1$ 本來是對的，拓展到複數之後卻不對了，所以它成為「新舊版不相容」的例子。

在數學裡，「新舊版不相容」的情形非常罕見，而且只有專家才會受到影響，一般使用者大可以放心。