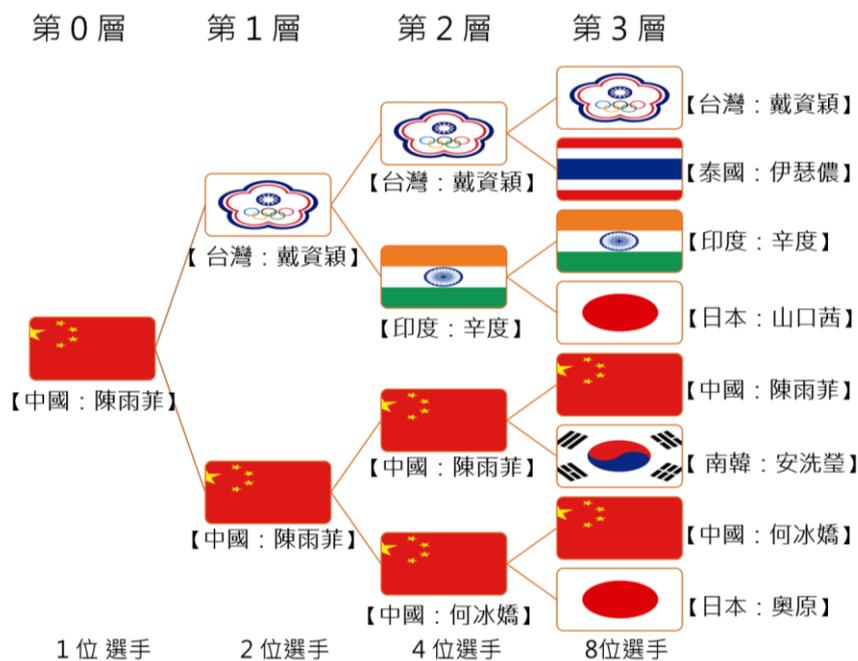


5 指數記號

下圖是 2020 東奧女子羽球前八強對賽的賽程表，所謂的「捉對廝殺」就是「兩兩對決」。我們現在就透過這張圖來討論這樣的賽程表與數學有何關係？



從上圖中，我們知道第 0 層的冠軍（金牌）必是從第 1 層中的二位選手中勝出，然後第 1 層中的另一位選手即為亞軍（銀牌）；同樣地第 1 層的二位選手，必是由第 2 層的 4 位選手中脫穎而出，如此 1 來自 2、2 來自 4、4 來自 8，依此類推。也就是說，每一層的上層人數是這層的 2 倍。

[隨堂練習 1]

- 中華隊戴資穎從進入前 8 強（第 3 層）開始，一路「捉對廝殺」最後確定榮獲亞軍。請問她需要打幾場？答：_____
- 依此類推，第 4 層共有幾人？她們應該算是世界女子羽球前幾強？答：_____

次方運算

了解「層」與選手人數之間的規律後，可以算出第幾層就有幾人。比方說：第 0 層是 1 人，第 1 層是 2 人；第 2 層的人數是第 1 層人數乘以 2，得到 $2 \times 2 = 4$ ，第 2 層有 4 人；第 3 層的人數是第 2 層乘以 2，得到 $4 \times 2 = 8$ ，第 3 層有 8 人。我們也可以寫成下面的形式：

- 第 2 層用 2×2 算出有 4 人，兩個 2 相乘。
- 第 3 層用 $4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2$ 算出有 8 人，它是三個 2 相乘，又說是連乘。
- 依此類推，第 4 層用 $8 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 算出有 16 人，它是四個 2 連乘。

小學的時候，已經知道同數連加叫做「乘」，例如四個 2 連加 $2+2+2+2$ 就是 2×4 的意思，結果是 8。現在我們學到加減乘除以外的第五種運算，名叫次方。次方不像加減乘除有它們專屬的運算符號（ $+-\times\div$ ），次方算式寫成「妹妹背著洋娃娃」的樣子。例如

四個 2 連乘 $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 就是「2 的 4 次方」，記作 2^4 ，結果是 16。同理， 2^3 讀作「2 的 3 次方」，它是三個 2 連乘 $2 \times 2 \times 2$ 的意思，結果是 8。

[隨堂練習 2]

- 四個 3 連乘怎麼用「次方」符號寫出來？請讀出來，並算出結果。答：_____
- 請讀出 4^3 並算出結果。答：_____

同學們想必已經知道：一個數乘以自己就是二次方，又稱為平方。例如兩個 5 相乘，記作 5^2 ，可以說 5 的 2 次方，也可以說 5 的平方，等於 25。三次方又稱為立方，例如 2^3 也可以說 2 的立方，等於 8。四次方或者更高次方，就沒有別名了。

[隨堂練習 3]

- 邊長為 12 單位的正方形面積，用次方算式寫出來，並算出結果。答：_____
- 邊長為 5 單位的正方體體積，用次方算式寫出來，並算出結果。答：_____

指數

在賽程表上，我們可以用次方算出第幾層應該有幾人，那我們可以寫出第幾層就有幾人的「公式」嗎？回顧前面的次方算式，第 2 層有 2^2 人，第 3 層有 2^3 人，第 4 層有 2^4 人。我想，大家都看得出來吧？公式就是：第幾層的人數，就是 2 的「層數」次方。數學的寫法很簡潔：

賽程表上第 n 層應有 2^n 名選手

前面的公式可以把 n 置換成 2 或 3 或 4 或者更大的正整數，這叫做代入。例如將 $n=4$ 代入 2^n 就是 2^4 ，等於 16。

回頭看看前面那張賽程表，第 1 層有 2 人，這表示 $2^1=2$ ，意思是說任何數的 1 次方都是它自己。更精彩的是第 0 層僅有 1 人（冠軍），這不就是說 $2^0=1$ 嗎？沒錯，數學的確這樣規定：任何正數的 0 次方等於 1。在次方算式裡，寫在右上方（被背著的）那個數叫做指數。

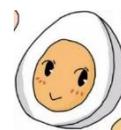
- 第 0 層有 $2^0 = 1$ 名選手
 第 1 層有 $2^1 = 2$ 名選手
 第 2 層有 $2^2 = 4$ 名選手
 第 3 層有 $2^3 = 8$ 名選手

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

指數

底數

有時候，為了方便，我們直接把「未完成運算」的次方當作一個數來看待。或者反過來說，我們把一個數寫成次方的樣子。這樣寫出來的數，就稱它寫成了指數記號。為什麼喜歡寫成指數記號呢？就跟寫成科學記號一樣，因為怕麻煩。例如我們懶得寫 1,200,0000 所以改寫成 1.2×10^8 。類似地，有時候寫 2^{10} 比寫 1024 方便而且清楚。同學們將會學到正整數的「標準分解式」，它也是比較方便寫成指數記號的一個好例子。



要特別強調一下： 2×3 是代表有 3 個 2 相加，但是 2^3 是代表有 3 個 2 相乘哦！

隨喜練習

1. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5$ ，代表 ___ 個 ___ 相乘，讀作 ___ 的 ___ 次方，等於 ___。

2. 讀出以下算式，並算出結果。

(1) 5^3 (2) 2^6 (3) 4^0

3. 將第 2 題各算式的指數加 1，然後算出結果。

4. 將第 2 題各算式的底數加 1，然後算出結果。

5. 有右列三張卡片，上面各有一個數字，你可以任意抽取 1 或 2 或 3 張卡片，並將上面的數字相加，作為「獲得」的數。

1

2

4

(1) 你最多可以獲得多少個不同的數？

(2) 所能獲得的最大數是多少？

(3) 如果新增第四張卡片，上面的數字是 8，你認為可以獲得的最大數是多少？

(4) 如果還可新增第五張卡片，你覺得那張卡片上的數字應該是多少？

科技工具

如果我們不會背九九乘法表，那麼像 6×7 這種乘法算式，就只能用 $6+6+6+6+6+6+6$ 慢慢加起來。如果這樣的話，在生活中就很難用「乘法」了。對吧？類似地，除非我們背誦「次方表」，否則像 7^5 這種次方算式，也只能用 $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ 一步步算出來。可是，有誰想要背「次方表」嗎？其實大家都會背「平方」，「立方」也值得背誦，但是很少人能背更多。可參考作者的另一份「次方」教學影片。



<https://youtu.be/XqINC4dpX2c>

這麼說來，在生活中不就很難使用「次方」了嗎？「是」也「不是」。「是」是因為一般人的日常生活中，確實很少需要次方。「不是」是因為科學家、工程師、財務分析師的專業生活中，將會經常需要次方。難道這些人都背了「次方表」嗎？才沒有呢，她／他們都用計算機。

如果不用計算機，很少人能夠心算「次方」。所以，要讓次方有用，就必須使用計算機。請看計算機操作的教學影片。學會操作計算機之後，不妨用它檢查前面作業的答案。



<http://shann.idv.tw/video/210904.html>