

5 指數記號〔教學說明〕

教學目標

注意標題特別聲明要教「記號」，本篇實際的重點是次方運算，但既然課綱要學生知道指數，我們便藉此機會讓學生初步接觸數學的抽象思維：以算式代表數。

知

類比於「乘」是同數自加，「次方」是同數自乘。「次方」是數學課程的第五種運算，但是它沒有運算符號，而是以排版形式表達。知道「二次方」、「三次方」有同義詞「平方」和「立方」。

行

能讀次方運算，能將一數連乘寫成指數記號，也能依照次方算式執行計算。能用「指數」、「底數」來溝通。

識

理解次方算式可以當作計算的指令，也可以當作一個數。

主要設計理念

1. 在國中階段，其實只要知道「次方」即可，不需要正式介紹「指數」。過去的課綱（民國 91 至 107 年間）內容其實僅要求知道「指數」符號，但是教科書都自行發展了「指數律」教材，那是個「很不幸」的意外；請參閱後面的「教學素養」。從 108 課綱起，要將 7 年級關於指數的教學逐步拉回正軌。本篇文本依照 108 課綱的理念而設計。
2. 為避免過於劇烈的變動（教育總是崇尚穩健），108 課綱並沒有完全刪除指數。既然課綱要學生知道指數，我們便藉此機會讓「指數」單元發揮它在 7 年級應有的價值：讓學生初步接觸數學的抽象思維：以算式代表數，亦即本篇的標題「指數記號」。小學生認知的「算式」是一個操作程序的指令，例如 2^3 就是要做 $2 \times 2 \times 2$ 算出 8，並沒有將 2^3 當作一個數來理解的經驗，所以也沒有這樣的想法。請教師不要輕視這種心理上的認知狀態，有些學生在操作數學的過程中領悟了這一點，但是有些學生卻來不及領悟就已經迷失了。本篇真正的價值，在於明確告訴學生 2^3 就是一個數，這種寫法，稱為數的「指數記號」。同樣的思維，還要用來解釋分數；到了 8 年級則有平方根數。它們都是同一類的記號：用「未完成的算式表示一個數」。
3. 通篇的脈絡設計，在於「合理化」為什麼需要學習「指數」這個名詞？因為我們要知道「指數記號」。那麼又為什麼需要指數記號？本篇只是簡單地說是為了方便，並舉科學記號為類比。其實「正課」裡的「正整數標準分解式」才是 7 年級需要指數記號的真正原因。
4. 「以算式代表數」顯然是「代數」觀念的啟蒙。本篇另一個代數啟蒙的設計在於提出「第幾層有幾名選手」的公式需求。從大處著眼，7 年級的最大教學目標是將學生從算術思維帶進代數思維。這個目標不宜集中教學，因為它不是一蹴可幾的（它在西亞和歐洲花了五百年演化出來）。《別冊》採用漸進的手段，在情境脈絡中緩緩引進代數思維。

教學備忘

1. 在國中階段，確實用不著指數律，除了在 7 年級某次段考可以故意命題讓學生做以外，在整個國中階段，再也不會出現指數律。「正課」將依課綱淺介指數律，《別冊》不再加碼，請教師也不必予以加深加廣。根據高中端的經驗，國中階段學習的指數律，多半並不能保留到高一，高中教師並不期待國中畢業生能用指數律。
2. 以算式代表的數稱為「數式」。國中教師熟悉的數式是平方根，例如 $\sqrt{2}$ 。但其實即使如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 之類的分數都是數式，繁分數當然更是數式。可是，建議此時不跟學生提這個名詞。
3. 如教學理念所述，「第幾層有幾名選手」的公式教學目標只是讓學生遭遇「用符號代表數」的需求，並舉一個例子作為示範。它是整個代數思維教學的一個初步，並非本篇要點。學生可能還很不習慣「代入」的操作，請教師在此時暫時不要多做「代入」練習，將來還有很多練習的機會。基於同樣的理由，這條公式也沒有刻意寫 n 的範圍：非負整數。這一切都是因為在教學的脈絡上，這條公式的目的是「用符號代表數」的早期經驗，不要增加沒必要的認知負荷。
4. 承上，作者刻意不提 0^0 ，也不說 $a^0=1$ 必須假設 $a \neq 0$ 。這些數學上的細節，在初學階段，教師最明智的教法就是「不提它」、「不考它」。只要教師不刻意去考學生 0^0 ，一般人本來就不會遭遇這個疑問。如果有學生主動提問「 0^0 也是 1 嗎？」則建議的回答是：

數學並沒有 0^0 是多少的規定，數學稱它為「不定形式」，意思是說它可能等於任何數，也可能不存在；將來如果學到微積分，就會明白。可是某些科學、工程和財務金融領域，卻規定它是 1。因此，要看是在哪個領域裡討論這個問題？等到同學長大進入一種專業，就知道該怎麼做了。在國中，放心，不會考這一題。

5. 正課裡的「正整數標準分解式」才是 7 年級需要指數記號的真正原因，教師可以在那裡做適當的連結。

教學素養

知道次方運算就好了，為什麼要特別說出「指數」呢？因為需要用它溝通，有時候我們必須明確說出次方算式裡的「上面」那個數；就好像「乘數」和「被乘數」一樣，這些名詞的存在，是為了溝通。但是，「指數」的特殊需求，在於有一種「函數關係」，變化的不是底數，而是指數。例如冪函數 $x \mapsto x^2$ 是比較早學到的函數關係，相對地， $x \mapsto 2^x$ 這種對應關係，是比較晚學到的（高二），它叫做指函數。到了學習「指數律」和「指函數」的時候（不管哪個先發生），才真正需要用到「指數」這個名詞。在國中階段，因為並沒有那兩者的（真正）需求，其實學生只要知道次方符號即可，不需要特別知道「指數」；即使知道，也僅用來溝通「上面的數」以便分辨「底數」。

國中階段唯一「接近」需要指數律的地方，在平方根的化簡。例如 $\sqrt{32} = (2^5)^{1/2} = 2^2 \times 2^{1/2} = 4\sqrt{2}$ 。但是老師們應該都同意吧：為了這一點用途而使用指數律，實在太過「殺雞用牛刀」了吧？而國中階段確實需要指數記號，最明顯的位置就在於「正整數的標準分解式」。這一個課題的學習，需要指數記號，但是並不（真的）需要指數律。在民國 91 年以前的國中課

程，基本上就是這樣設計的。多項式的乘法運算「疑似」出現指數律，但其實不必。諸如 $x \cdot x = x^2$ 、 $x^2 \cdot x = x^3$ 、 $x \cdot x^3 = x^4$ 、 $x^2 \cdot x^2 = x^4$ 等運算，用次方觀念即可，實在不必套用指數律。

那麼，民國 91 年的「九年一貫」數學課程為什麼加入指數律呢？簡單地說，那時候的總體課程開始關注「學科統整」，因此舉辦幾次全領域的大型籌備會議。在某次會議中，自然領域教師希望數學領域支援「科學記號」教學，而數學領域答應了。因此，科學記號進入 7 年級課綱。因為「標準分解式」本來就需要次方符號，也就是本篇所說的「指數記號」，所以將它應用在科學記號的 10^n ，應該不會對學生造成過多的額外負擔。自然領域需要我們幫忙的，只是科學記號數字的定義，以及它與普通記號數字的互化，他們並沒有要求數學課教導科學記號的計算；理化老師自己會在合適的情境中處理科學記號的計算。課綱委員知道科學記號裡的 10^n 並不是真的計算，而是小數點位置的記號，就如《別冊》第 4 課講的那樣。因此，其實數學課綱並沒有科學記號四則運算的需求，也沒有指數律的需求。「不幸」的是，課綱的書面文字寫得寬鬆，而且「分年細目」裡又舉了稍微靈活一點的例子，導致各版教科書競相加碼，而教科書審查委員面對各版教科書一致的設計時，容易傾向於接受他們的設計。因此，國中 7 年級上學期的數學課程，就陸續新增了完整的（整數）指數律，以及一般性的科學記號四則運算。這些內容，如作者一再解釋的，其實不適合作為國中階段的學習目標，尤其不適合放在第一冊。在第一冊，學生還在學習正負混合的整數與分數運算，實在不宜外加指數律與科學記號運算，加重學習的負擔且擾亂教學的脈絡。許多國中教師、校長察覺了這份沉重的負擔，因此在民國 105 年提出討論，促成了 108 課綱對這些課題的調整。

回顧民國 91 年以前的國中課程，檢視國際同儕國家的初中數學教材，都不會在國中階段（更不會在 7 年級）出現指數律與科學記號的四則運算。這些事實再次表示，我們不必擔心刪除這兩個主題會損失什麼。

指數為什麼叫做「指數」？其實並沒有什麼大道理。指數與對數同時在明朝末年傳入中國（不是利瑪竇，是他之後的耶穌會神父），當時主要以實用的表格呈現。在表格的使用說明裡，教導了指數律與對數律。但是當時並沒有給它們正式名稱，而是依照實際需求，用「文言」敘述操作程序，於是出現「所指之數」與「所對之數」這些說法。後來就衍生了「指數」和「對數」這兩個習慣用語，經過晚清中國數學家與明治日本數學家的書寫，變成了專有名詞。

關於指數為什麼叫做「指數」，作者有一句話的教學。教師同仁可以參考看看。教學影片的網址是 <https://youtu.be/jykqqsqykU>，或掃描右側二維條碼。只要看這支影片的前 30 秒即可。



本篇採用的賽程表，從形式來說就是「樹狀圖」，或者更特定地說，是「二元樹」（binary tree），亦即每一個節點分出兩支。將來若有需要，教師可再使用。

如文本後記所述，如果不使用計算機，則次方只是純數學的記號，幾乎沒有實用價值。到了高中，次方運算的底數和指數都可能不是整數，那種情形，更加需要計算工具。因此，作者想要再次呼籲教師趁此機會讓學生有機會接觸計算機。我國因為長年忽視工具，所以確實缺乏應用次方運算的題目。這些題目有待教師們逐漸開發出來。